

Valeh Baxşəliyev

TƏTBİQİ MEXANİKA

Nəzəri mexanika və materiallar müqaviməti

Dərs vəsaiti

*Azərbaycan Respublikası
Təhsil Nazirliyi tərəfindən
dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir
(568 sayılı əmr 15.05.2009-cu il)*

**“Nəzəri mexanika: məsələ həlli ilə” (2012)
dərs vəsaitinin əsasında təkmilləşdirilmiş,
tamamlanmış və yenidən işlənmişdir**

BAKİ – “Elm” - 2016

UOT 531.01

Elmi redaktor:

AMEA-nın müxbir üzvü, prof. R.S. Qurbanov (ADNSU)

Rəyçilər:

t.e.d., prof. N.A. Nəsimov (AzTU)

t.e.d., prof. Ö.M. Kərimov (ADNSU)

f.r.e.n, dos. E.A. Aslanov (AzTU)

V.İ. Baxşəliyev. Tətbiqi Mexanika: Nəzəri mexanika və materiallar müqaviməti. Bakı: «Elm», 2016, 450 s.

Kitabda nəzəri və tətbiqi mexanikanın statika, kinematika, dinamika və materiallar müqaviməti bölmələrinə aid səciyyəvi məsələlər və onların həlli metodları verilmiş, hər fəsilə lazım olan nəzəri məlumatlar, ifadələr və teoremlər qısa şəkildə şərh olunmuşdur. Dərs vəsaiti texniki universitetlərin bakalavriat və magistratura pillələrində təhsil alan tələbələr üçündür. O, elmi və mühəndis - texniki işçilər üçün də faydalı ola bilər.

V.I. Bakhshaliyev. Applied Mechanics: Theoretical mechanics and Strength of materials. Baku, «Elm», 2016, 450 pp.

In the book is considered decision methods of characteristic problems of statics, kinematics, dynamics and strength of materials sections of theoretical and applied mechanics. In each chapter necessary theoretical data and expressions are resulted and theorems are shortly explained. The manual is intended for bachelors and masters of universities. It can be useful for the researchers and the mechanical engineers.

ISBN 987-9952-453-35-5

© V.İ. Baxşəli, 2016

B $\frac{1603020000}{655(07) - 2016}$ **Qrifli**

G İ R İ Ş

Ölkəmizin ali təhsil sisteminin Bolonya prosesinə rəsmi qoşulması (2005) və Avropa təhsil məkanına inteqrasiyası ilə əlaqədar bu gün mövcud təhsil standartlarının forma və məzmunca təkmilləşdirilməsinə ehtiyac vardır.

Mexanika müasir texnikanın elmi əsası olmaqla mühəndis ixtisasları üçün baza fənnlərdən biridir. Avropa təhsil məkanında, o cümlədən Almaniyada Engineering Mechanics və ya Technical Mechanics adlanan bu fənn müvafiq universitetlərdə bakalavriat pilləsində 4 semestr (Statika, Elastostatika, Dinamika-1, Dinamika-2) və magistraturada 2 semestr (Maşın dinamikası, Ali Texniki Mexanika) tədris edilir. Hər semestr fənnin tədrisinə 150 akademik saat (52 saat auditoriya və 98 saat sərbəst) ayrılır. Auditoriya saatlarında fənnin əsas nəzəri və praktiki məzmunu öyrədilir, sərbəst saatlarda isə aralıq (midterm examination) və əsas imtahanlara (final examination) hazırlıq görülür, o cümlədən ev tapşırıqları və kurs işlərinin yerinə yetirilməsinə tyutorlar (təlimatçılar) tərəfindən yardım edilir. Göründüyü kimi burada praktiki dərslər nəzəri dərslərdən iki dəfə artıq keçilir. Fikrimizcə, Mexanikanın ənənəvi tədris proqramlarının və metodlarının Avropa və ABŞ universitetlərinin təcrübələri ilə əlaqələndirilərək təkmilləşdirilməsinə ehtiyac vardır. Bu, həm də tələbə və mütəxəssis mübadiləsinə şərait yaradardı.

Klassik mexanika Aristotel və Arximed kimi qədim dünya mütəfəkkirlərinin, Q. Qaliley, İ. Nyuton, L. Eyler və s. orta əsr alimlərinin müşahidələri və elmi araşdırmaları nəticəsində formalaşmışdır. Onun bugünkü inkişafında Azərbaycan alimlərindən L. Landau, A. Mirzəcanzadə, Z. Xəlilov və digər görkəmli alimlərin böyük xidməti olmuşdur.

Son dövrlər Mexanika özünün yeni inkişaf fazasına qədəm qoymaqladır. Artıq onun bir sıra anlayışları və terminləri

özünün ilkin forma və məzmunundan fərqlənir. Məsələn, Mexanikanın ən yeni bölməsi olan Nanomexanikada materialların kəsilməzliyi hipotezi özünü doğrultmur. Burada cisimlərin sürtünmə və yeyilməsinin yeni nəzəri əsasları yaradılmaqdadır. Nanoölçülü materialların mexaniki tədqiqinin və idarə olunmasının yaxın illərdə elm və texnikada inqilabi dəyişikliklərə səbəb olacağı şübhəsizdir. Müasir mexanikanın prinsiplərinə əsaslanaraq yaradılan maşın və mexanizmlərin ömürüzunluğunun 10-15 dəfə artacağı gözlənilir. Avropa mexaniklərinin elmi işlərinə istinad edərək demək olar ki, “Müasir Mexanikanın inkişafı nəticəsində 4-5 ildən sonra elmdə yeni böyük inqilab gözlənilir. Bu inqilab son dövrlərdə İnformasiya Kommunikasiya Texnologiyalarında baş verən böyük sıçrayışlarla müqayisə oluna bilər”. Hesab edirik ki, bu prosesdən ölkəmizin mütəxəssisləri də kənarda qalmamalı və öz töhfələrini verməlidirlər.

Azərbaycanda keçən əsrin 50-ci illərindən başlayaraq Z.I. Xəlilov, H.Q. Məmmədov, H.Ə. Süleymanov, N.B. Qədirov, T.H. Bəktaş və digər müəlliflər tərəfindən yazılmış bir sıra nəzəri və tətbiqi mexanika dərsləklərinin olmasına baxmayaraq, məsələ həllinə dair dərs vəsaitləri xeyli azdır. Xüsusilə son dövrlər bakalavr və magistr hazırlığı ilə əlaqədar olaraq bu sahədə müəyyən boşluq hiss olunur.

Mexanikanın dərinlən öyrənilməsi üçün məsələ həllinin xüsusi əhəmiyyəti vardır. Kitabda Mexanikanın statika, kinematika, dinamika, zərbə nəzəriyyəsi və materiallar müqaviməti bölmələrinə aid əsas nəzəri materiallar və səciyyəvi məsələlərin həlli metodları verilmişdir. Məsələlərin şərti “Nəzəri və tətbiqi mexanika” fənnin proqramına əsasən I.V.Meşşerskinin «Nəzəri mexanika məsələləri» kitabından və digər mənbələrdən götürülmüşdür.

Kitabın statika bölməsində bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sistemi, fəzada və müstəvi üzərində ixtiyari surətdə yerləşən və paralel olan qüvvələr sisteminin müvazinətinə aid xarakterik məsələlərin həlli metodları verilmişdir. Bundan başqa, bərk cismin ağırlıq mərkəzinin tapılmasına aid və sürtünmə qüvvələri nəzərə alınan məsələlərə də baxılmışdır. Kinematika bölməsində nöqtə kinematikasını, bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkəti, bərk cismin müstəvi hərəkəti, bərk cismin tərpənməz nöqtə ətrafında fırlanma hərəkəti, nöqtənin və bərk cismin mürəkkəb hərəkətlərinə aid məsələlərin həllinə baxılmışdır. Dinamika bölməsində dinamikanın birinci və ikinci əsas məsələləri, maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənlikləri, nöqtə dinamikasının ümumi teoremləri, nöqtənin rəqs hərəkətinə və zərbə hadisəsinə aid səciyyəvi məsələlərin həllinə baxılmışdır. Materiallar müqaviməti bölməsində tədris proqramına uyğun müəyyən nəzəri materiallar verilmiş və əsas səciyyəvi məsələlərin həlli metodları şərh edilmişdir.

Kitab Tətbiqi Mexanika - 1 fənninin tədris proqramına (Syllabus) uyğun olaraq tərtib olunmuş və universitetlərin bakalavriat və magistratura pillələrində təhsil alan tələbələr, həmçinin elmi və mühəndis-texniki işçilər üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Təklif və iradlarınızı aşağıdakı elektron unvanlara göndərə bilərsiniz:

v.bakhshali@aztu.edu.az

STATİKA

Nəzəri mexanika maddi cisimlərin müvazinətinin və mexaniki hərəkətinin ən ümumi qanunlarını öyrənən elmdir. Nəzəri mexanika 3 hissədən ibarətdir: Statika, Kinematika, Dinamika.

Statikada verilmiş qüvvələr sisteminin təsiri altında mütləq bərk cismin müvazinət şərtləri öyrənilir. Statikanın üç bölməsi vardır: bərk cisim statikası, elastostatika (deformasiya olunan cisimlərin statikası) və analitik statika. Bu bölmədə bərk cisim statikasına baxılır.

I Fəsil. Bərk cisim statikası

1.1. Statikanın əsas anlayışları

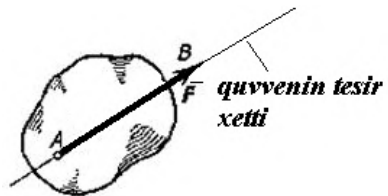
Statikada iki əsas məsələyə baxılır: 1) verilmiş qüvvələr sisteminin ona ekvivalent olan digər sistemlə əvəz olunması, 2) mütləq bərk cismin müvazinət şərtlərinin öyrənilməsi.

Mütləq bərk cisim dedikdə qüvvələrin təsiri altında deformasiyaya uğramayan, forma və ölçülərini dəyişməyən cisim nəzərdə tutulur. Başqa sözlə mütləq bərk cismin nöqtələri arasındakı məsafələri dəyişmir.

Cismin müvazinəti (tarazlığı) onun başqa cisimlərə nəzərən sükunət halına və ya düzxətli bərabərsürətli hərəkətinə deyilir.

Əsas anlayışlar:

1. Qüvvə - maddi cisimlərin bir-birinə etdikləri qarşılıqlı təsiri xarakterizə edən kəmiyyətdir.



Şəkil 1.1

Qüvvənin təsiri 3 amillə müəyyən edilir: ədədi qiyməti, istiqaməti və tətbiq nöqtəsi (Şəkil 1.1).

Qüvvənin üzərində yerləşdiyi xəttə qüvvənin təsir xətti deyilir. Qüvvəni öz təsir xətti boyunca bir nöqtədən digər nöqtəyə köçürmək olar. Odur ki, qüvvəyə bəzən sürüşən vektor deyilir. Qüvvə vektorial kəmiyyətdir. Onun BS sistemində vahidi Nyutondur (N).

2. Eyni cismə təsir edən qüvvələrin yığınınə qüvvələr sistemi deyilir.

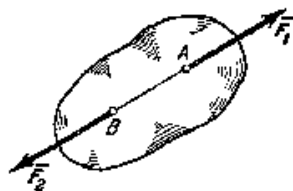
3. İki müxtəlif qüvvələr sisteminin təsiri altında cisim eyni hərəkətdə və ya sükunətdə olarsa belə sistemlərə ekvivalent qüvvələr sistemi deyilir.

4. Verilmiş qüvvələr sisteminə ekvivalent olan bir qüvvəyə həmin qüvvələr sisteminin əvəzləyicisi deyilir.

5. Qüvvələr sisteminin təsiri altında cisim sükunətdə qalarsa belə sistemə müvazinətdə olan qüvvələr sistemi deyilir. Müvazinətdə olan qüvvələr sisteminin əvəzləyicisi sıfır bərabərdir.

1.2. Statikanın aksiomları

I aksiom. Mütləq bərk cismə təsir edən iki qüvvə müvazinətdədirsə, onlar qiymətcə bərabər, istiqamətcə bir düz xətt boyunca əks istiqamətdə yönəlirlər.

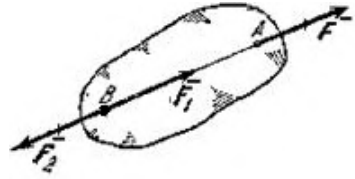


Şəkil 1.2

Şəkil 1.2-də göstərilən cismin müvazinətə olması üçün ona təsir edən F_1 və F_2 qüvvələri aşağıdakı şərti ödəməlidir:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, F_1 = F_2$$

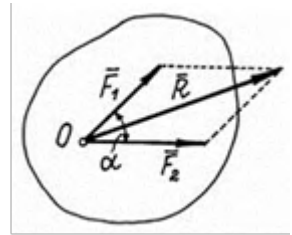
II aksiom. Verilmiş qüvvələr sisteminə müvazinətdə olan iki qüvvəni əlavə etsək və ya çıxsaq, bu sistemin cismə təsiri dəyişməz.



Şəkil 1.3

I və II aksiomlardan aşağıdakı nəticə çıxır: Qüvvəni öz təsir xətti boyunca bir nöqtədən digər nöqtəyə köçürmək olar (Şəkil 1.3).

III aksiom. Cismin bir nöqtəsində tətbiq olunmuş iki qüvvənin əvəzləyicisi bu nöqtədə tətbiq olunur və qüvvələrin üzərində qurulmuş paraleloqramın diaqonalı ilə ifadə olunur.



Şəkil 1.4-də göstərilən F_1 və F_2 qüvvələrinin R əvəzləyicisi aşağıdakı kimi tapılır:

Şəkil 1.4

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

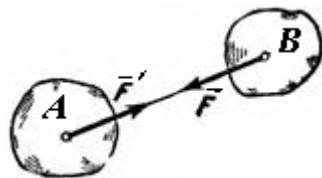
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

Burada α - bu qüvvələrin arasında qalan bucaqdır.

IV aksiom. İki cismin qarşılıqlı təsir qüvvələri qiymətcə bərabər olub istiqamətcə bir düz xətt boyunca əks tərəflərə yönəldirlər.

Şəkil 1.5-də göstərilən A və B cisimlərinin bir-birinə etdikləri təsir qüvvələrini F və F' ilə işarə etsək yazı bilərik:

$$F = F', \bar{F} = -\bar{F}'$$



Bu aksioma bəzən təsirin əks təsirə bərabərliyi prinsipi deyilir.

Şəkil 1.5

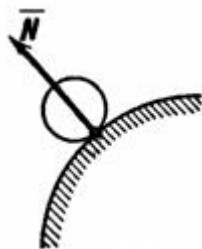
V aksiom. Müvazinətdə olan qüvvələr sisteminin təsiri altında deformasiya olunan cisim bərkityərsə (mütləq bərk cismə çevrilərsə) bu sistemin müvazinəti pozulmaz.

1.3. Rabitələr və onların reaksiya qüvvələri

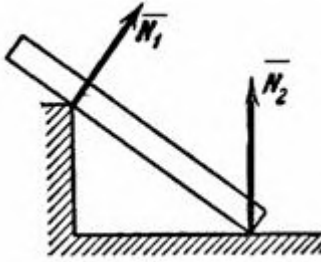
Digər cisimlərlə bağlı olmayan, fəzada istənilən istiqamətdə hərəkət edə bilən cismə sərbəst cisim deyilir. Başqa cisimlər tərəfindən fəzada hərəkəti məhdudlandırılan cismə qeyri-sərbəst cisim deyilir. Qeyri-sərbəst cismin hərəkətini məhdudlandıran maneəyə (cismə) rabitə deyilir. Rabitənin qeyri-sərbəst cismə etdiyi təsir qüvvəsinə onun reaksiya qüvvəsi deyilir. Reaksiya qüvvəsinin istiqaməti qeyri-sərbəst cismin hərəkətinin məhdudlandığı istiqamətin əksinə yönəlir.

Rabitələrin 3 növü vardır.

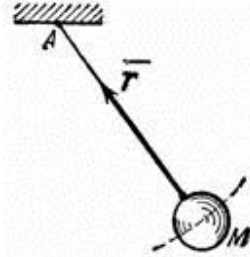
Birinci növ rabitənin reaksiya qüvvəsinin 2 elementi - tətbiq nöqtəsi və istiqaməti məlum olur. Bu rabitələrə misal olaraq ideal səth (Şəkil 1.6 və 1.10-da A rabitəsi) və ya dayaq (Şəkil 1.7), ip (Şəkil 1.8), kanat, çubuq (Şəkil 1.9), və s. göstərmək olar.



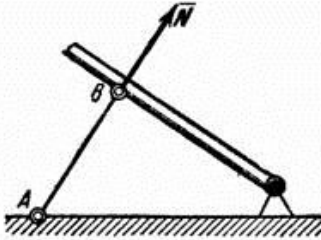
Şəkil 1.6



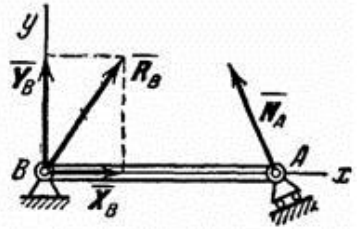
Şəkil 1.7



Şəkil 1.8

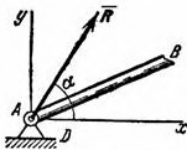


Şəkil 1.9

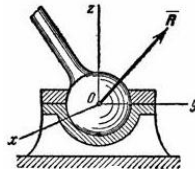


Şəkil 1.10

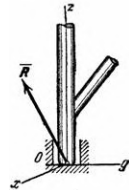
İkinci növ rabitənin reaksiya qüvvəsinin yalnız bir elementi- tətbiq nöqtəsi məlum olur. Bu rabitələrə misal olaraq silindrik oynaq (Şəkil 1.10-da B rabitəsi və Şəkil 1.11), sferik oynaq (Şəkil 1.12), dabanlıq (Şəkil 1.13) və s. göstərmək olar.



Şəkil 1.11

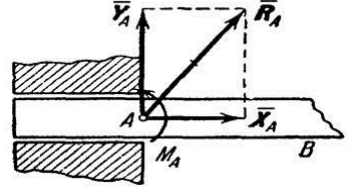


Şəkil 1.12



Şəkil 1.13

Üçüncü növ rabitənin reaksiya qüvvəsinin heç bir elementi məlum olmur. Bu rabitələrə misal olaraq tirin sərt bərkidildiyi divarı (Şəkil 1.14), tərpnəməz pərçim birləşmələrini və s. göstərmək olar.



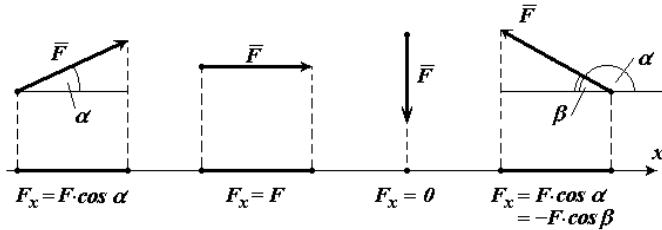
Şəkil 1.14

Rabitələrdən azad olunma prinsipi (şərbəstləşdirmə prinsipi). Qeyri-sərbəst cismə sərbəst cisim kimi baxmaq olar, bu şərtlə ki, rabitələr atılsın və əvəzində onların reaksiya qüvvələri cismə tətbiq edilsin.

1.4. Qüvvənin ox üzərindəki proyeksiyası

Qüvvənin ox üzərindəki proyeksiyası onun başlanğıc və sonundan bu oxa çəkilən perpendikulyarın oxla kəsişdiyi nöqtələr arasında qalan düz xətt parçasına deyilir.

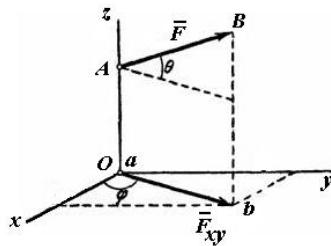
Qüvvənin ox üzərindəki proyeksiyası skalyar kəmiyyətdir və onun qiyməti qüvvənin qiyməti ilə oxla bu qüvvənin arasında qalan bucağın kosinusunu hasilinə bərabərdir (Şəkil 1.15).



Şəkil 1.15

1.5. Qüvvənin müstəvi üzərindəki proyeksiyası

Qüvvənin müstəvi üzərindəki proyeksiyası onun başlanğıc və son nöqtələrinin bu müstəvi üzərindəki proyeksiyaları arasında çəkilən vektora deyilir. Şəkil 1.16 F qüvvəsinin Oxy müstəvisi üzərindəki F_{xy} proyeksiyası göstərilmişdir. Qüvvənin A başlanğıc və B sonunun bu müstəvi üzərindəki a və b proyeksiyaları arasında çəkilən ab vektoru F_{xy} proyeksiyasına bərabərdir.



Şəkil 1.16

Bu proyeksiyanın qiyməti aşağıdakı kimi tapılır:

$$F_{xy} = F \cos \Theta$$

Burada Θ - qüvvənin istiqaməti ilə müstəvi arasındakı qalan bucaqdır.

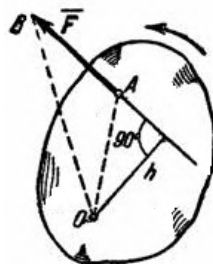
Qüvvənin müstəvi üzərindəki proyeksiyası ox üzərindəki proyeksiyadan fərqli olaraq vektorial kəmiyyətdir.

1.6. Qüvvənin nöqtəyə nəzərən momenti

Qüvvənin təsiri altında cismin fırlanma effekti onun momenti ilə xarakterizə olunur. Qüvvənin nöqtəyə nəzərən momenti onun müddü ilə qolunun vurma hasilinə bərabərdir. Qüvvənin nöqtəyə nəzərən qolu həmin nöqtədən qüvvənin təsir xəttinə qədər olan ən qısa məsafəyə deyilir. Şəkil 1.17-də göstərilən F qüvvəsinin O mərkəzinə nəzərən momenti aşağıdakı kimi tapılır:

$$m_0(\vec{F}) = \pm Fh.$$

Burada h - qüvvənin O mərkəzinə nəzərən qoludur.



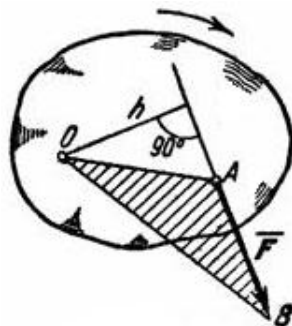
Şəkil 1.17

Qüvvə cismi O mərkəzi ətrafında saat əqrəbinin fırlanma istiqamətinin əksinə fırlatmağa cəhd edərsə moment müsbət, saat əqrəbinin fırlanma istiqamətində fırlatmağa cəhd edərsə moment mənfi olar.

Şəkil 1.18-ə əsasən qüvvənin nöqtəyə nəzərən momentinin digər ifadəsi aşağıdakı kimi olur:

$$m(\vec{F}) = 2S_{\triangle OAB}$$

Burada $S_{\triangle OAB}$ - qüvvənin başlanğıc və sonunu moment mərkəzi ilə birləşdirdikdə alınan üçbucağın sahəsidir.



Şəkil 1.18

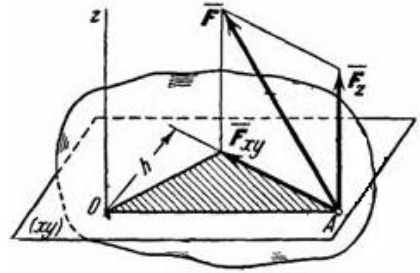
Nöqtə (moment mərkəzi) qüvvənin təsir xətti üzərində olarsa qüvvənin bu mərkəzə nəzərən momenti 0-a bərabər olur.

Varinyon teoremi

Bir nöqtədə tətbiq olunan müstəvi qüvvələrin əvəzləyicisinin hər hansı mərkəzə nəzərən momenti həmin qüvvələrin bu mərkəzə nəzərən momentlərinin cəbri cəminə bərabərdir.

1.7. Qüvvənin oxa nəzərən momenti

Qüvvənin oxa nəzərən momenti onun bu oxa perpendikulyar müstəvi üzərindəki proyeksiyasının oxla müstəvinin kəsişdiyi nöqtəyə nəzərən momentinə bərabərdir (Şəkil 1.19).



Şəkil 1.19

$$m_z(\vec{F}) = m_0(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} h$$

Şəkində göstərilən F qüvvəsinin z oxuna nəzərən momenti onun bu oxa perpendikulyar xy müstəvisi üzərindəki $\vec{F}_{xy}$ proyeksiyasının oxla müstəvinin kəsişdiyi O nöqtəsinə nəzərən momentinə bərabərdir.

Qüvvənin oxa nəzərən momenti aşağıdakı iki halda 0-a bərabər olur: qüvvə oxla paralel olduqda və qüvvənin təsir xətti ilə ox kəsişdikdə. Başqa sözlə qüvvə ilə ox bir müstəvi üzərində yerləşdikdə həmin qüvvənin bu oxa nəzərən momenti sıfıra bərabər olur.

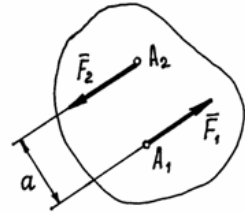
1.8. Cüt qüvvələr. Cütün momenti

Qiymətcə bərabər olan, əks tərəflərə yönələn iki paralel qüvvəyə cüt qüvvələr və ya cüt deyilir (Şəkil 1.20). Cütün qüvvələrinin əvəzləyicisi 0-a bərabər olur, lakin onlar müvazinətdə deyillər. Cütün təsiri altında cisim fırlanma hərəkəti edir və bu fırlanma cütün momenti ilə xarakterizə olunur. Cütün qüvvələrinin arasındakı məsafəyə onun

qolu deyilir. Cütün qüvvələrinin yerləşdiyi müstəviyə onun təsir müstəvisi deyilir.

Cütün momenti onun qüvvələrindən birinin qiyməti ilə cütün qolunun vurma hasilinə bərabərdir.

$$m = F_1 \cdot a = F_2 \cdot a$$

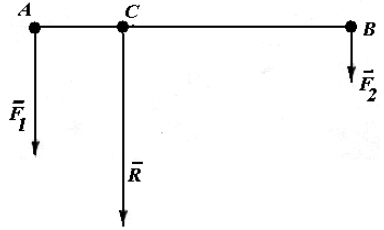


Burada a - cütün qoludur.

Şəkil 1.20

1.9. İki paralel qüvvənin toplanması

Eyni tərəfə yönələn iki paralel qüvvənin əvəzləyicəsi qiymətcə onların cəminə bərabər olub, istiqamətcə bu qüvvələrə paralel eyni tərəfə yönəlir. Əvəzləyicinin təsir xətti toplanan qüvvələrin arasındakı məsafəni daxilən həmin qüvvələrin qiymətlərinə tərs mütənəsib hissələrə bölür (Şəkil 1.21).

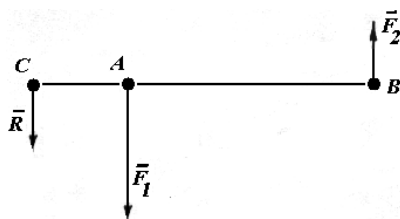


Şəkil 1.21

$$\left. \begin{aligned} R &= F_1 + F_2 \\ \frac{AC}{BC} &= \frac{F_2}{F_1} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Əks tərəfə yönələn iki paralel qüvvənin əvəzləyicəsi qiymətcə onların fərqinə bərabər olub, istiqamətcə bu qüvvələrə paralel böyük qüvvə tərəfə yönəlir. Əvəzləyicinin təsir xətti toplanan qüvvələrin arasındakı məsafəni xaricən həmin qüvvələrin qiymətlərinə tərs

mütənasib hissələrə bölür
(Şəkil 1.22). Fərz edək ki,
 $F_1 > F_2$.



$$\left. \begin{aligned} R &= F_1 - F_2 \\ \frac{AC}{BC} &= \frac{F_2}{F_1} \end{aligned} \right\}$$

Şəkil 1.22

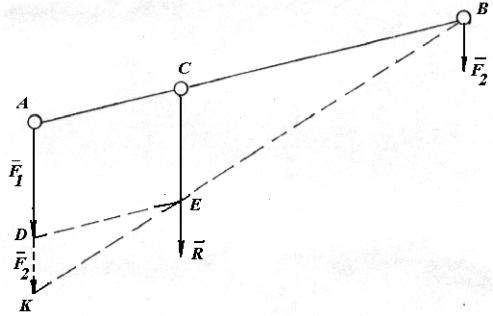
1.10. Paralel qüvvələrin qrafik üsulla toplanması *)

Statikanın bəzi məsələlərinin qrafik üsulla həlli müəyyən praktiki əhəmiyyətə malikdir. Məlum olduğu kumi keçən əsrin 50-ci, 60-cı illərində yazılmış “Nəzəri Mexanika” dərsliklərində “Qrafiki Statika” bölmələri olmuşdur. Sonralar həmin vacib bölmə əlverişli olmadığı üçün dərsliklərdən çıxarılmışdır. Fikrimizcə, bu gün kompüter texnologiyalarının həyatımızın bütün sahələrinə nüfuz etdiyi bir dövrdə həmin bölmənin inkişaf etdirilməsi və mühəndis ixtisaslarında öyrənilməsi aktualdır.

Qeyd edək ki, qüvvələrin qrafik üsulla toplanması üçün “ip çoxbucaqlısı” və ya Varinyon metodu (10-12 xətt çəkməklə) mövcudur (1855-ci il). Burada biz paralel qüvvələrin qrafik üsulla toplanması üçün daha münasib və əlverişli (4-5 xətt çəkməklə) yeni metod təklif edirik. Bunun üçün aşağıdakı teoremləri veririk.

*) *Müəllifin Moskva Dövlət Universitetinin elmi əsərlərində nəşr olunan məqaləsi əsasında* [10].

Teorem 1. Eyni tərəfə yönələn iki paralel qüvvənin əvəzləyicisinin tətbiq nöqtəsi və təsir xəttinin tapılması: A nöqtəsində tətbiq olunmuş F_1 qüvvəsinin D sonuna B nöqtəsində tətbiq olunmuş F_2 qüvvəsini özünə paralel olaraq köçürüb, onun K sonunu B nöqtəsi ilə birləşdiririk. R əvəzləyicisinin təsir xətti KB xətti ilə F_1 -in D sonundan AB -yə çəkilən paralel xəttin E kəsişmə nöqtəsindən keçir. R əvəzləyicisinin tətbiq nöqtəsi E nöqtəsindən qüvvələrə çəkilən paralel xəttlə AB xəttinin kəsişdiyi C nöqtəsində yerləşir.



Şəkil 1.23

İsbati. Şəkil 1.23-də F_2 qüvvəsini özünə paralel olaraq F_1 qüvvəsinin D sonuna əlavə edək. Sonra onun K sonu ilə F_2 -nin B tətbiq nöqtəsini birləşdirək. Daha sonra F_1 qüvvəsinin D sonundan AB – yə paralel çəkib onun KB xətti ilə kəsişdiyi E nöqtəsini qeyd edək.

Göründüyü kimi $\triangle ABK \sim \triangle DEK$. Şəkildən yazı bilərik:

$$AK = F_1 + F_2, AB = AC + BC, DE = AC$$

$$\frac{AK}{DK} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{F_1 + F_2}{F_2} = \frac{AC + BC}{AC} \Rightarrow 1 + \frac{F_1}{F_2} = 1 + \frac{BC}{AC}$$

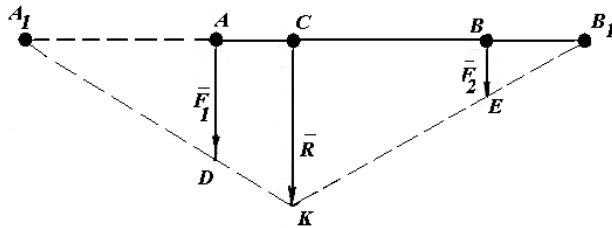
Buradan alırıq:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}$$

Beləliklə (1.1) ifadəsi ödənir.

Teorem 2. A və B nöqtələrində tətbiq olunmuş, eyni tərəfə yönələn F_1 və F_2 qüvvələrinin və C nöqtəsində tətbiq olunmuş onların R əvəzləyicisinin sonlarını birləşdirən xətlərlə, qüvvələrin tətbiq nöqtələrindən keçən AB xəttinin kəsişdiyi A_1 və B_1 nöqtələrinin A və B nöqtələrindən olan məsafələri, toplanan qüvvələrdən əvəzləyici qüvvəyə qədər olan məsafələrə əks bərabərdir, yəni $AA_1 = BC$ və $BB_1 = AC$.

İsbatı. Fərz edək ki, A və B nöqtələrində tətbiq olunmuş, eyni tərəfə yönələn F_1 və F_2 qüvvələrinin R əvəzləyicisi C nöqtəsində tətbiq olunmuşdur (Şəkil 1.24).



Şəkil 1.24

R qüvvəsinin sonunu ilə F_1 və F_2 qüvvələrinin sonunu birləşdirən xətlərlə AB xəttinin kəsişdiyi A_1 və B_1 nöqtələrini şəkildə göstərək. $AA_1 = BC$ və $BB_1 = AC$ olduğunu isbat edək.

Göründüyü kimi $\Delta A_1CK \sim \Delta A_1AD$ və $\Delta B_1CK \sim \Delta B_1BE$. Şəkildən yazı bilərik: $CK = R = F_1 + F_2$ və $CA_1 = AC + AA_1$.

$$\frac{CK}{AD} = \frac{CA_1}{AA_1} \Rightarrow \frac{F_1 + F_2}{F_2} = \frac{AC + AA_1}{AA_1} \Rightarrow 1 + \frac{F_1}{F_2} = 1 + \frac{AC}{AA_1}$$

Buradan alırıq:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{AC}{AA_1}.$$

Bu ifadəni (1.1) ilə müqayisə etsək yaza bilərik:

$AA_1 = BC$. Eyni qayda ilə isbat etmək olar ki, $BB_1 = AC$.

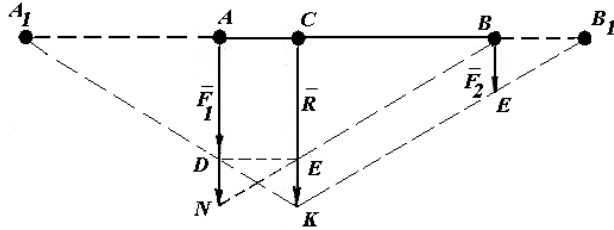
Beləliklə eyni tərəfə yönələn iki parallel F_1 və F_2 qüvvələrini qrafik üsulla aşağıdakı kimi toplamaq olar:

F_1 qüvvəsinin D sonuna F_2 qüvvəsini əlavə edib, onun uc N nöqtəsi ilə F_2 qüvvəsinin əvvəlki B tətbiq nöqtəsini düz xəttlə birləşdiririk. F_1 qüvvəsinin D sonundan qüvvələrin tətbiq nöqtələrini birləşdirən xəttə parallel xətt çəkirik. Bu xəttlərin (DE və NB) kəsişmə nöqtəsini E qeyd edirik. Əvəzləyicinin təsir xətti həmin nöqtədən keçir. Əvəzləyicinin C tətbiq nöqtəsi toplanan qüvvələrin A və B tətbiq nöqtələrindən keçən AB xətti üzərində yerləşir. Sonra toplanan qüvvələrin tətbiq nöqtələrindən keçən xətt üzərində həmin nöqtələrdən xaricdə onların əvəzləyicidən olan əks məsafələri qədər ölçüb qeyd edirik. Yəni F_1 qüvvəsinin R əvəzləyicidən olan AC məsafəsini F_2 qüvvəsinin tətbiq nöqtəsindən kənarda və əksinə F_2 qüvvəsindən R əvəzləyicisinə qədər olan BC məsafəni F_1 qüvvəsindən kənarda qeyd edirik: $AC=BB_1$ və $BC=AA_1$. Həmin qeyd etdiyimiz A_1 və B_1 nöqtələri ilə toplanan qüvvələrin sonunu birləşdirən düz xəttlərin kəsişmə nöqtəsi (K nöqtəsi) əvəzləyici qüvvənin sonunu göstərir.

Qeyd edək ki, toplanan qüvvələrin tətbiq nöqtələrinin horizontal xətt üzərində yerləşməsi vacib deyildir. Toplanan F_1 və F_2 qüvvələri onların tətbiq nöqtələrini

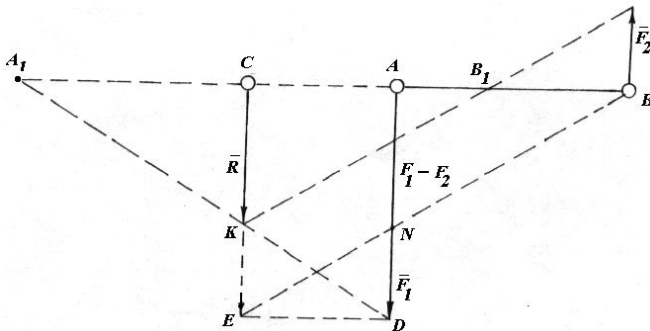
birləşdirən AB xəttinə 0° -dən başqa istənilən bucaq altında yönələ bilərlər.

Göstərdiyimiz qayda ilə A və B nöqtələrində tətbiq olunmuş ($AB=13\text{m}$) $F_1 = 5\text{ kN}$ və $F_2 = 3\text{ kN}$ qüvvələrini toplayaq (Şəkil 1.25).



Şəkil 1.25

Bunun üçün şəkildə qüvvələri və məsafələri müəyyən miqyasla göstərək. Sonra yuxarıda qeyd etdiyimiz ardıcılıqla R əvəzləyicisini tapırıq. Qəbul etdiyimiz miqyasa əsasən $R= 8\text{ kN}$.

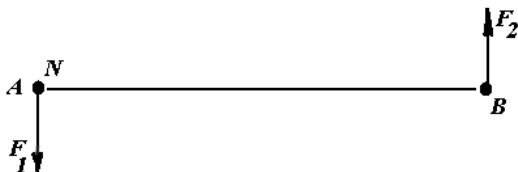


Şəkil 1.26

Şəkil 1.26-da anoloji qayda ilə əks tərəflərə yönəlmiş iki parallel qüvvənin toplanması göstərilmişdir. Əks tərəfə yönələn iki parallel F_1 və F_2 qüvvələrini qrafik üsulla aşağıdakı kimi toplamaq olar (fərz edək ki, $F_1 > F_2$):

F_1 qüvvəsinin D sonuna F_2 qüvvəsini köçürüb ($AN=F_1-F_2$), onun uc N nöqtəsi ilə F_2 qüvvəsinin əvvəlki B tətbiq nöqtəsini düz xəttlə birləşdiririk. F_1 qüvvəsinin D sonundan qüvvələrin tətbiq nöqtələrini birləşdirən xəttə parallel xətt çəkirik. Bu xəttlərin (DE və NB) kəsişdiyi E nöqtəsini qeyd edirik. Əvəzləyicinin təsir xətti həmin nöqtədən keçir. Əvəzləyicinin C tətbiq nöqtəsi toplanan qüvvələrin A və B tətbiq nöqtələrindən keçən xətt üzərində yerləşir. Sonra toplanan qüvvələrin tətbiq nöqtələrindən keçən xətt üzərində həmin nöqtələrdən toplanan qüvvələrin əvəzləyicidən olan əks məsafələri qədər ölçüb qeyd edirik: $AC=BB_1$ və $BC=AA_1$. Yəni F_1 qüvvəsinin R əvəzləyicidən olan AC məsafəsini F_2 qüvvəsinin tətbiq nöqtəsindən sola və əksinə F_2 qüvvəsindən R əvəzləyicisinə qədər olan BC məsafəni F_1 qüvvəsindən sola qeyd edirik. Həmin qeyd etdiyimiz A_1 və B_1 nöqtələri ilə toplanan qüvvələrin sonunu birləşdirən düz xəttlərin kəsişmə nöqtəsi (K nöqtəsi) əvəzləyici qüvvənin sonunu göstərir.

İndi A və B nöqtələrində tətbiq olunmuş əks tərəfə yönələn qiymətcə bərabər olan iki parallel F_1 və F_2 qüvvələrini toplayaq (Şəkil 1.27), yəni $F_1 = F_2$.



Şəkil 1.27

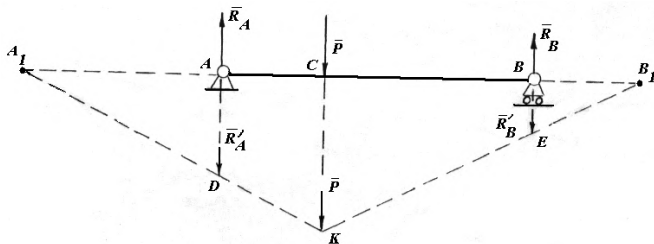
Məlumdur ki, belə qüvvələrə cüt qüvvələr deyilir. F_2 qüvvəsini özünə paralel F_1 -in sonuna köçürək, onda onun sonu (N nöqtəsi) A nöqtəsinə düşəcəkdir çünki $F_1 = F_2$ və $AN = F_1 - F_2 = 0$. Şəkildən görüldüyü kimi N və B nöqtələrini birləşdirən xətt AB xətti olacaqdır. F_1 -in sonundan AB -yə çəkilən paralel xətt NB və ya AB xəttinə paralel olacaqdır və onların C görüşmə nöqtəsi sonsuzluqda yerləşəcəkdir. Deməli əks tərəfə yönələn qiymətcə bərabər olan iki paralel qüvvənin əvəzləyicisi 0-a bərabər olur və bu əvəzləyicinin tətbiq nöqtəsi sonsuzluqda yerləşir.

Qeyd edək ki, bu üsulla qüvvəni özünə paralel olan iki toplanana ayırmaq olar.

İndi iki qüvvənin qrafik üsulla toplanması metodundan istifadə edərək aşağıdakı məsələlərin həllinə baxaq.

Məsələ 1.1

AB tirinin ucu A dayağına oynaqlı bərkidilmişdir. B ucu isə diyircəklər üzərinə qoyulmuşdur. Tirin C nöqtəsində onun oxuna perpendikulyar olan $P = 3\text{kN}$ qüvvəsi təsir edir. $AC = 2\text{m}$, $BC = 4\text{m}$. Tirin ağırlığını nəzərə almadan dayaqların reaksiya qüvvələrini tapmalı (Şəkil 1.28).



Şəkil 1.28

Həlli.

Şəkildə AB tirini verilmiş məsafələrə uyğun olaraq müəyyən miqyasla çəkirik.

P qüvvəsini qrafik üsulla A və B nöqtələrində tətbiq olunmuş iki paralel $\overline{R'_A}$ və $\overline{R'_B}$ toplananlarına ayıraq. Aydındır ki, həmin toplananlar qiymətcə uyğun reaksiya qüvvələrinə bərabər olub, istiqamətcə onların əksinə yönələcəklər, yəni $\overline{R_A} = -\overline{R'_A}$ и $\overline{R_B} = -\overline{R'_B}$.

Əvvəlcə 1-ci teoremə əsasən AB xətti üzərində $AA_1=BC$ və $BB_1=AC$ məsafələrini ölçüb A_1 və B_1 nöqtələrini qeyd edirik. Sonra qüvvələr üçün müəyyən miqyas qəbul edib, şəkildə $CK=P$ məsafəsini ölçüb P qüvvəsinin K uc nöqtəsini göstəririk. Daha sonra A_1 və B_1 nöqtələrini 2-ci teoremə əsasən K nöqtəsi ilə birləşdiririk. A və B nöqtələrindən P qüvvəsinə paralel xətlər çəkib, onların A_1K və B_1K xətləri ilə kəsişdiyi D və E nöqtələrini tapırıq. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, $AD=R'_A$, $BE=R'_B$. Qüvvələr üçün seçdiyimiz miqyasa əsasən şəkildən tapırıq: $R_A = R'_A = 2kH, R_B = R'_B = 1kH$.

Qeyd edək ki, iki paralel qüvvənin qrafik üsulla toplanması üsulundan istifadə edərək çoxlu paralel qüvvələri toplayıb, paralel qüvvələr sisteminin mərkəzini və eyni qayda ilə bircins cisimlərin ağırlıq mərkəzini tapa bilərik.

1.11. Statika məsələlərinin həlli ardıcılığı

Statika məsələlərinin həllində aşağıdakı ardıcılığı gözləmək lazımdır:

1. Əvvəlcə hansı cismin və ya düyünün müvazinətinə baxılması aydınlaşdırılır.
2. Sərbəstləşdirmə prinsipindən istifadə edərək, müvazinətinə baxılan cismə təsir edən verilmiş (aktiv) qüvvələr və rabitələrin reaksiya qüvvələri göstərilir.
3. Bu qüvvələr sistemi üçün məlum müvazinət tənlikləri yazılır. Burada məsələnin xarakterindən asılı olaraq onun həllini asanlaşdırmaq üçün həndəsi (üçbucaq) və ya analitik üsuldən istifadə etmək olar.
4. Həmin tənliklər sisteminin birlikdə həlli nəticəsində onlara daxil olan naməlum reaksiya qüvvələri və digər kəmiyyətlər tapılır.

II Fəsil. Bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sistemi

Statikada cisimlər müxtəlif qüvvələr sisteminin təsiri altında müvazinətdə ola bilər. Bu qüvvələr sisteminə ayrılıqda baxaq.

Verilmiş cismə təsir edən, təsir xətləri bir nöqtədə görüşən qüvvələr yığınının bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sistemi deyilir. Bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün bu qüvvələr üzərində qurulmuş qüvvələr çoxbucaqlısı qapalı olmalıdır. Başqa sözlə, bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün bu qüvvələrin həndəsi cəmi sıfıra bərabər olmalıdır, yəni:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad (2.1)$$

Bu vektorial ifadəni x , y , z dekart koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq, alırıq:

$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_{ix} = 0 \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum F_{iy} = 0 \\ R_z &= F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum F_{iz} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Deməli, bir nöqtədə tətbiq olunan qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün bu qüvvələrin ixtiyari seçilmiş üç koordinat oxlarından hər biri üzərindəki proyeksiyalarının cəbri cəmi ayrılıqda sıfıra bərabər olmalıdır.

Xüsusi halda üç qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün bu qüvvələr üçün qurulmuş qüvvələr

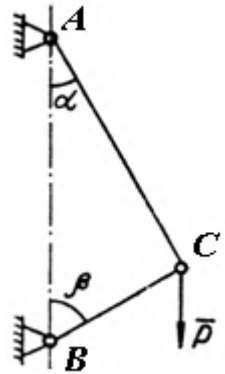
üçbucaqlısı qapalı olmalıdır. Bu halda müvazinətdə olan üç qüvvə haqqındakı teoremdən istifadə etmək lazımdır. Bu teoremə əsasən bərk cisim paralel olmayan üç qüvvə təsiri altında müvazinətdədirsə, bu qüvvələrin təsir xətti bir nöqtədə kəsişməlidir.

2.1. Bir nöqtədə tətbiq olunmuş üç qüvvə sistemi

Əvvəlcə paralel olmayan üç qüvvənin təsiri altında müvazinətdə olan cisimlərə aid aşağıdakı məsələlərin həllinə baxaq.

Məsələ 2.1

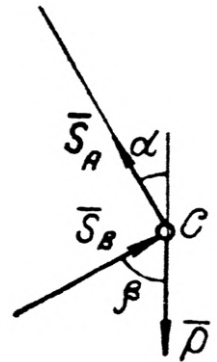
AC və BC çubuqları bir-birilə və şaquli divarla oynaq vasitəsilə birləşdirilmişdir. C oynaq boltuna şaquli istiqamətdə $P = 1000 \text{ N}$ qüvvə təsir edir. Çubuqların divarla əmələ gətirdiyi bucaqlar $\alpha = 30^\circ$ və $\beta = 60^\circ$ olarsa, onların C oynaq boltuna göstərdikləri reaksiyaları tapmalı (Şək. 2.1).



Şəkil 2.1

Həlli.

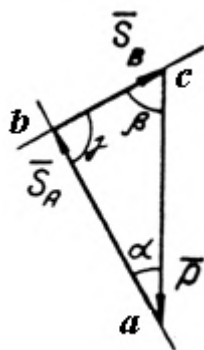
Məsələni həll etmək üçün C oynaq boltunu kəsib ayıraraq, onun müvazinətinə baxırıq. C boltuna verilmiş $\bar{P}$ qüvvəsi və C nöqtəsində birləşən AC və BC çubuqlarının (rabitələrinin) $\bar{S}_A$ və $\bar{S}_B$ reaksiya qüvvələri təsir edəcəkdir. Bu reaksiya qüvvələri AC və BC çubuqları boyunca yönəlir. Şəkildən görürük ki, $\bar{P}$ qüvvəsinin təsiri altında AC çubuğu dartı-



Şəkil 2.2

lir, BC çubuğu isə sıxılır. Odur ki, $\overline{S_A}$ qüvvəsi AC çubuğu boyunca C nöqtəsində A -ya doğru yönəlir (dartılmanın əksinə), $\overline{S_B}$ qüvvəsi isə BC çubuğu boyunca B nöqtəsindən C düyününə doğru (sıxılmanın əksinə) yönəlir (Şək. 2.2).

Sərbəstləşdirmə prinsipinə əsasən C düyününə müvazinətdə olan sərbəst cisim kimi baxmaq üçün ona verilmiş $\overline{P}$ qüvvəsindən başqa AC və BC rabitələrinin $\overline{S_A}$ və $\overline{S_B}$ reaksiya qüvvələrini tətbiq edirik. Bunun nəticəsində həmin düyün bir nöqtədə görüşən üç $\overline{P}$, $\overline{S_A}$ və $\overline{S_B}$ qüvvələrinin təsiri altında müvazinətdə olmalıdır. Bunun üçün, məlum olduğu kimi, həmin qüvvələr üçün qurulmuş qüvvələr üçbucağı qapalı olmalıdır. Bu üçbucağı qurmaq üçün əvvəlcə ixtiyari seçilmiş c nöqtəsindən verilmiş məlum $\overline{P}$ qüvvə vektorunu çəkirik. Sonra bu qüvvənin son a və başlanğıc c nöqtələrindən uyğun olaraq $\overline{S_A}$ və $\overline{S_B}$ qüvvələrinin təsir xətlərinə (AC və BC çubuqlarına) paralel xətlər çəkib, B nöqtəsində kəsişdiririk.



Şəkil 2.3

Onda $\overline{ab}$ və $\overline{bc}$ vektorları uyğun olaraq axtardığımız $\overline{S_A}$ və $\overline{S_B}$ reaksiya qüvvələrini ifadə edəcəkdir (Şək. 2.3).

Qeyd etmək lazımdır ki, $\overline{S_A}$ və $\overline{S_B}$ qüvvələrinin istiqaməti qurduğumuz qüvvələr üçbucağından da asanlıqla tapıla bilər. Şəkildən görünür ki, $\overline{P}$, $\overline{S_A}$, $\overline{S_B}$ qüvvələri qüvvələr üçbucağında ardıcılıqla yerləşir.

Əvvəlcə abc qüvvələr üçbucağının bucaqlarını tapaq. Şəkildən görünür ki, həmin üçbucağın ca və ab tərəfləri arasındakı bucaq şəkl. 2.1-də göstərilmiş α bucağına, bc və ca tərəfləri arasındakı bucaq β bucağına bərabərdir. Onda üçbucağın qalan γ bucağı aşağıdakı kimi olar:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ.$$

Deməli Δabc düzbucaqlı üçbucaqdır. Şəkl.2.3-ə əsasən abc üçbucağından yazırıq:

$$\cos \alpha = \frac{S_A}{P}, \sin \alpha = \frac{S_B}{P}.$$

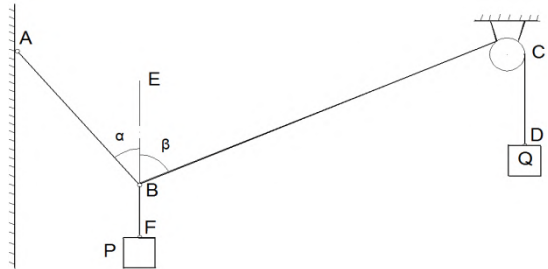
Buradan naməlum S_A və S_B qüvvələrini tapırıq:

$$S_A = P \cos \alpha = 1000 \cos 30^\circ = 866 N,$$

$$S_B = P \sin \alpha = 1000 \sin 30^\circ = 500 N.$$

Məsələ 2.2

Bir ucu A nöqtəsinə bərkidilmiş AB ipinin B nöqtəsinə P yükü və blokdan aşırılmış BCD ipi bağlanmışdır.



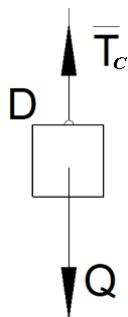
Şəkil 2.4

BCD ipinin D nöqtəsindən isə ağırlığı $Q = 100 N$ olan çəki daşı asılmışdır. Müvazinət vəziyyətində iplərin BE şaquli xətt ilə əmələ gətirdikləri bucaqlar: $\alpha = 45^\circ$,

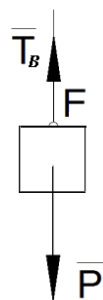
$\beta = 60^\circ$ olarsa, blokdakı sürtünməni nəzərə almadan AB ipinin T_A gərilməsini və P yükünün qiymətini tapmalı (şəkl. 2.4).

Həlli.

Məsələni həll etmək üçün əvvəlcə D yükünün müvazinətinə baxırıq. Bu yükə onun $\overline{Q}$ ağırlıq qüvvəsi və asıldığı DC ipinin (rabitənin) $\overline{T}_C$ reaksiya qüvvəsi təsir edəcəkdir. Bu reaksiya qüvvəsi həmin ip boyunca yuxarıya doğru yönəlir, çünki ip dartılır (Şəkl. 2.5). Onda D yükü bir düz xətt üzrə əks tərəflərə yönəlmiş iki $\overline{Q}$ və $\overline{T}_C$ qüvvələrinin təsiri altında müvazinətdə qalacaqdır.



Şəkil 2.5



Şəkil 2.6

Bu iki qüvvənin müvazinətdə olması üçün onlar qiymətcə bir-birinə bərabər olub, istiqamətcə DC ipi üzrə əks tərəflərə yönəlməlidir. Həmin müvazinət şərtindən DC ipinin T_C reaksiya qüvvəsini tapırıq: $T_C = Q = 100 \text{ N}$.

Eyni qayda ilə P yükünün müvazinətinə baxsaq, həmin yükün asıldığı ipin $\overline{T}_B$ reaksiya qüvvəsi qiymətcə P yükünün ağırlığına bərabər olub, istiqamətcə FB ipi boyunca yuxarıya tərəf yönələcəkdir, yəni $T_B = P$ (Şəkl. 2.6).

Nəhayət, B düyününün müvazinətinə baxaq. Bu düyünə B nöqtəsində birləşmiş AB , BC və BF iplərinin $\overline{T}_A$, $\overline{T}_C$ və $\overline{T}_F$ reaksiya qüvvələri təsir edir. Aydındır ki, C

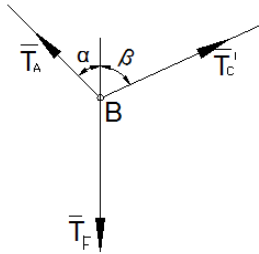
blokunda sürtünmə olmadıęı  $\overline{T}_C'$ qüvvəsi qiymətcə $\overline{T}_C$ qüvvəsinə bərabər olub, istiqlmtc B -dən C -yə doęru yönələcəkdir, yəni

$$T'_C = T_C.$$

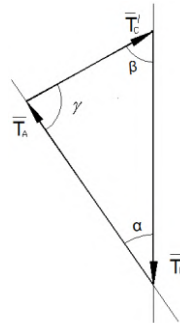
Eyni qayda ilə $\overline{T}_F$ qüvvəsi qiymətcə $\overline{T}_B$ qüvvəsinə bərabər olub, istiqlmtc onun əksinə yönələcəkdir, yəni $T_F = T_B = P$. $\overline{T}_A$ qüvvəsi isə AB ipi boyunca B dynndn A nöqtəsinə doęru yönələcəkdir (ip dartılır).

Beləliklə, B dyn bir nöqtədə ttbiql olunmuş  $\overline{T}_A$, $\overline{T}_C'$ və $\overline{T}_F$ qüvvələrinin təsiri altında müvazinətdə qalır (şək. 2.7). Onda bu qüvvələr üçün qurulmuş qüvvələr bucaęı qapalı olmalıdır. Şək. 2.8-də həmin qüvvələr bucaęı göstərilmişdir. Bu bucaqdakı naməlum γ bucaęını tapaql:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ.$$



Şəkil 2.7



Şəkil 2.8

Sinuslar teoreminə əsasən yazırıq:

$$\frac{T'_C}{\sin \alpha} = \frac{T_A}{\sin \beta} = \frac{T_F}{\sin \gamma}.$$

Buradan naməlum T_A və T_E reaksiya qüvvələrini tapırıq:

$$T_A = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot T'_C = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \cdot 100 = 122 N,$$

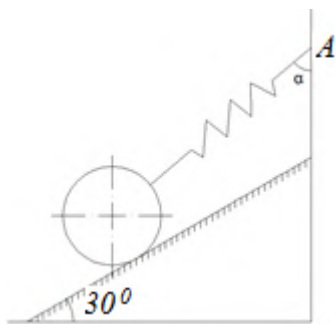
$$T_F = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot T'_C = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} \cdot 100 = 137 N.$$

Onda $P = 137 N = T_E$.

Bu məsələnin həllindən görünür ki, D yükünə təsir edən $\bar{Q}$ ağırlıq qüvvəsini C blokunda sürtünmə olmadıqda DCB ipi boyunca sürüşdürüb B düyününə tətbiq etmək olar.

Məsələ 2.3

Ağırlığı $20 N$ olan bircinsli kürə şaquli divara bərkidilmiş yaylı tərəziyə ip vasitəsilə balğanıb, hamar mail müstəvi üzərində saxlanılır; yaylı tərəzinin göstərişi $10 N$ -dur. Müstəvinin üfüqlə əmələ gətirdiyi bucaq 30° -yə bərabərdir.

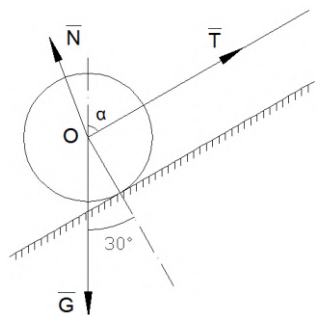


Şəkil 2.9

İpin şaqulla əmələ gətirdiyi α bucağını və kürənin müstəviyə etdiyi Q təzyiqini tapmalı. Tərəzinin ağırlığı nəzərə alınmır (Şək. 2.9).

Həlli.

Burada biz kürənin müvazinətinə baxırıq. Sərbəstləşdirmə prinsipindən istifadə edərək, kürəyə təsir edən $\overline{G}$ ağırlıq qüvvəsindən başqa, ona rabitələrin reaksiya qüvvələrini də tətbiq edirik. Şəkildən görürük ki, kürə üçün rabitə rolunu tərپənməz səth və yay oynayır. Səthin $\overline{N}$ reaksiya qüvvəsi ona perpendikulyar istiqamətdə, yayın $\overline{T}$ reaksiya qüvvəsi isə yay boyunca onun bərkidildiyi A nöqtəsinə doğru yönələcəkdir (Şək.2.10).



Şəkil 2.10

Müvazinətdə olan üç qüvvə haqqındakı teoremə əsasən baxdığımız kürə üç $\overline{G}$, $\overline{N}$ və $\overline{T}$ qüvvələri təsiri altında müvazinətdə olduğu üçün, həmin üç qüvvənin təsir xətləri kürənin O mərkəzində kəsişməlidir. Onda bu qüvvələr üçün qurulmuş qüvvələr üçbucağı qapalı olmalıdır.

Şək. 2.11-də həmin qüvvələr üçbucağı və onun bucaqları göstərilmişdir. Şəkildən yazırıq:

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + 30^\circ) = 150^\circ - \alpha.$$

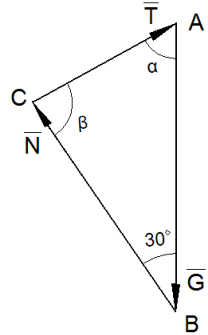
Sinuslar teoreminə əsasən abc qüvvələr üçbucağından yazırıq:

$$\frac{G}{\sin \beta} = \frac{G}{\sin(150^\circ - \alpha)} = \frac{T}{\sin 30^\circ} = \frac{N}{\sin \alpha}.$$

Buradan naməlum α bucağını və N qüvvəsini tapırıq:

$$\sin(150^\circ - \alpha) = \frac{G \sin 30^\circ}{T} = \frac{20 \cdot 0,5}{10} = 1,$$

$$150^\circ - \alpha = 90^\circ, \alpha = 60^\circ,$$



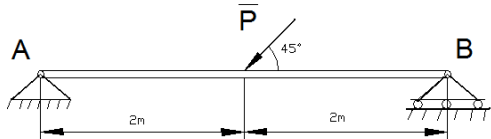
Şəkil 2.11

$$N = \frac{G \sin \alpha}{\sin(150^\circ - \alpha)} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 90^\circ} \cdot 20 = 17,32N.$$

Təsinin əks-təsirə bərabərlik prinsipinə görə kürənin müstəviyə etdiyi Q təzyiqi səthin $\bar{N}$ reaksiya qüvvəsinə qiymətcə bərabər olub, istiqamətcə onun əksinə yönəlir, yəni $Q=N=17,32N$.

Məsələ 2.4

AB tirinin ucu A dayağına oynaqlı bərkidilmişdir. B ucu isə diyircəklər üzərinə qoyulmuşdur. Tirin ortasında onun oxu ilə 45° bucaq təşkil edən $P=2$ kN qüvvəsi təsir edir. Ölçüləri şəkildən götürərək, tirin ağırlığını nəzərə

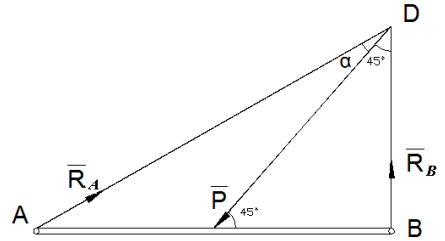


Şəkil 2.12

almayaraq dayaqaların reaksiyasını tapmalı (Şək. 2.12).

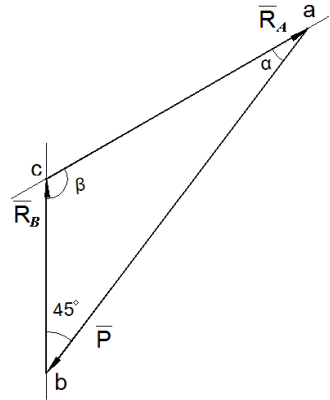
Həlli.

Burada biz AB tirinin müvazinətinə baxırıq. Tirə verilmiş $\overline{P}$ qüvvəsi və A və B rabitələrinin (dayaqlarının) $\overline{R}_A$ və $\overline{R}_B$ reaksiya qüvvələri təsir edəcəkdir. B dayağı birinci növ rabitə olduğu üçün onun reaksiya qüvvəsi üfüqi dayaq səthinə normal istiqamətdə yönəlir. A dayağı isə ikinci növ rabitə olduğu üçün onun reaksiya qüvvəsinin istiqaməti əvvəlcədən bizə məlum deyildir.



Şəkil 2.13

Tir üç $\overline{P}$, $\overline{R}_B$ və $\overline{R}_A$ qüvvələrinin təsiri altında müvazinətdə olduğu üçün, bu qüvvələrin təsir xətləri $\overline{P}$ və $\overline{R}_B$ qüvvələrinin təsir xətlərinin kəsişdiyi D nöqtəsində görüşməlidir (Şək. 2.13). Odur ki, $\overline{R}_A$ qüvvəsi AD xətti boyunca yönəlir. Beləliklə, AB tiri bir nöqtədə tətbiq olunmuş üç $\overline{P}$, $\overline{R}_A$ və $\overline{R}_B$ qüvvələrinin təsiri altında müvazinətdə olduğu üçün bu qüvvələr üçün qurulmuş qüvvələr üçbucağı qapalı olmalıdır.



Şəkil 2.14

Qüvvələr üçbucağını qurmaq üçün verilmiş məlum $\overline{P}$ qüvvəsinin a başlanğıc və b sonundan AD və BD xətlərinə paralel xətlər çəkib c nöqtəsində kəsişdiririk (Şək. 2.14). Onda abc qüvvələr üçbucağının $\overline{ca}$ və $\overline{BC}$ tərəfləri uyğun olaraq $\overline{R_A}$ və $\overline{R_B}$ qüvvələrini ifadə edəcəkdir.

Əvvəlcə bu üçbucağın şəkildə göstərilmiş naməlum α və β bucaqlarını tapaq. ABD üçbucağından yazırıq:

$$\operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) = \frac{AB}{BD} = \frac{4}{2} = 2, \alpha = \operatorname{arctg} 2 - 45^\circ = 19^\circ,$$

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + 45^\circ) = 116^\circ.$$

Sinuslar teoreminə əsasən abc qüvvələr üçbucağından yazırıq:

$$\frac{P}{\sin \beta} = \frac{R_A}{\sin 45^\circ} = \frac{R_B}{\sin \alpha}.$$

Buradan naməlum R_A və R_B reaksiya qüvvələrini tapırıq:

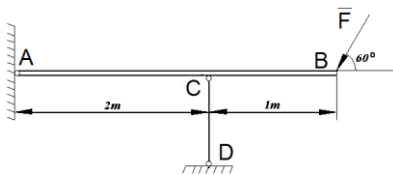
$$R_A = \frac{\sin 45^\circ}{\sin \beta} \cdot P = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 116^\circ} \cdot 2 = 1,58 \text{ kN},$$

$$R_B = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot P = \frac{\sin 19^\circ}{\sin 116^\circ} \cdot 2 = 0,71 \text{ kN}.$$

Məsələ 2.5

Şəkildə şaquli CD çubuğu vasitəsilə üfüqi vəziyyətdə saxlanan AB tiri göstərilmişdir. Tirin ucuna üfüqlə 60° bucaq təşkil edən $F = 30 \text{ kN}$ qüvvəsi təsir edir. A , C və D

birleşmələrinin oynaqlı olduğunu nəzərdə tutaraq, CD çubuğundakı S_D qüvvəsini və tirin divara göstərdiyi Q təzyiqini tapmalı. Tir və çubuğun ağırlıqlarını nəzərə almamalı, ölçüləri şəkildən götürməli (Şək.2.15).



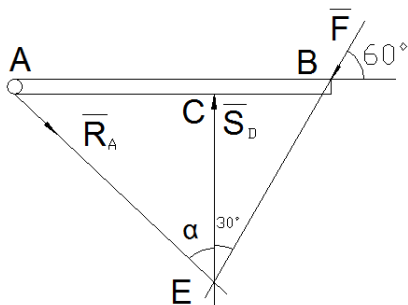
Şəkil 2.15

Həlli.

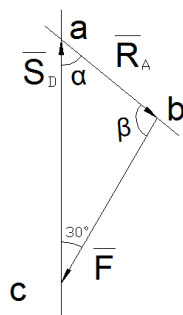
AB tirinin müvazinətinə baxarkən əvvəlcə onun rabitələrini aydınlaşdırmaq lazımdır. Bu rabitələrdən biri CD çubuğudur ki, onun $\overline{S_D}$ reaksiya qüvvəsi çubuq istiqamətində yönəlir. Digər rabitə isə A oynaqıdır. Bu rabitənin $\overline{R_A}$ reaksiya qüvvəsini tapmaq üçün müvazinətdə olan (paralel olmayan) üç qüvvə haqqındakı teoremdən istifadə edək. AB tiri üç - verilmiş $\overline{F}$ qüvvəsi və rabitələrin $\overline{S_D}$ və $\overline{R_A}$ reaksiya qüvvələrinin təsiri altında müvazinətdə olduğu üçün bu qüvvələrin təsir xətti bir nöqtədə (E nöqtəsində) kəsişməlidir (Şək. 2.16).

Şək. 2.17-də müvazinətdə olan üç $\overline{F}$, $\overline{S_D}$ və $\overline{R_A}$ qüvvələri üçün qapalı abc qüvvələr üçbucağı qurulmuşdur. Bu üçbucağın naməlum α və β bucaqlarını tapmaq üçün şək. 1.16-dan əvvəlcə CE düz xətt parçasını tapırıq:

$$CE = \frac{BC}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}.$$



Şəkil 2.16



Şəkil 2.17

Sonra $\operatorname{tg} \alpha$ -nı tapırıq:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{CE} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154.$$

Buradan $\alpha = 49^\circ$, onda $\beta = 180^\circ - (30^\circ + \alpha) = 101^\circ$.

Sinuslar teoreminə əsasən abc qüvvələr üçbucağından yazırıq:

$$\frac{F}{\sin \alpha} = \frac{S_D}{\sin \beta} = \frac{R_A}{\sin 30^\circ}.$$

Bu ifadədən naməlum $\overline{S_D}$ və $\overline{R_A}$ qüvvələrinin qiymətlərini tapırıq:

$$S_D = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot F = \frac{\sin 101^\circ}{\sin 49^\circ} \cdot 30 = 39 \text{ kN},$$

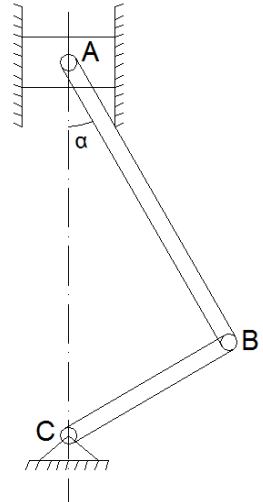
$$R_A = \frac{\sin 30^\circ}{\sin \alpha} \cdot F = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 49^\circ} \cdot 30 = 19 \text{ kN},$$

AB çubuğunun divara etdiyi $\overline{Q}$ təzyiq qüvvəsi təsirini əks

təsirə bərabərlik prinsipinə görə qiymətcə $\overline{R}_A$ reaksiya qüvvəsinə bərabər olub, istiqamətcə onun düz əksinə yönəlir. Bunan əsasən $Q = R_A = 19 \text{ kN}$.

Məsələ 2.6

Daxili yanma mühərriyində pistonun sahəsi $S = 0,02 \text{ m}^2$, sürgü-qolunun uzunluğu $AB = 30 \text{ sm}$, çarxqolunun uzunluğu $BC = 6 \text{ sm}$. Verilmiş zaman anında pistonun üzərindəki qazın təzyiqi $P_1 = 1000 \text{ kPa}$, pistonun altındakı təzyiq $P_2 = 200 \text{ kPa}$, $\angle ABC = 90^\circ$ olarsa, təzyiqlər fərqindən yaranan AB sürgüqolu tərəfindən çarxqoluna edilən T təsir qüvvəsini tapmalı. Pistonla silindr arasındakı sürtünmə qüvvəsini nəzərə almamalı (Şək. 2.18).



Şəkil 2.18

Həlli.

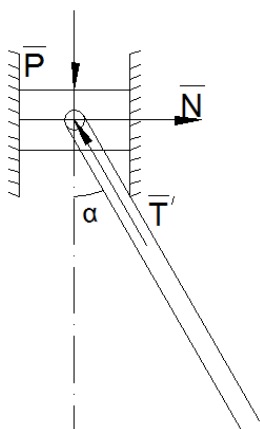
Məsələni həll etmək üçün əvvəlcə mühərrikin pistonunun müvazinətinə baxaq. Pistona onun yuxarı və aşağı səth-lərinə qazın etdiyi $\bar{p}$ təzyiq qüvvələri fərqi, AB sürgüqolu-nun $\overline{T'}$ reaksiya qüvvəsi və silindrin divarının $\overline{N}$ reaksiya qüvvəsi təsir edir (Şək. 2.19). $\bar{p}$ qüvvəsi belə tapılır:

$$p = p_1 - p_2 = P_1 S - P_2 S = (P_1 - P_2) S = (1000 - 200) 0,02 = 16 \text{ kN}.$$

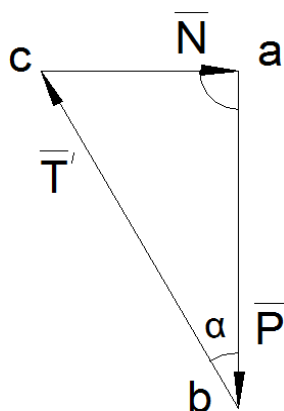
Şək. 2.20-də müvazinətdə olan üç $\bar{p}$, $\bar{T}'$ və $\bar{N}$ qüvvələri üçün qapalı abc qüvvələr üçbucağı göstərilmişdir. Həmin üçbucağın naməlum α bucağını şək. 2.18-dən tapırıq:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{30} = 0,2.$$

Buradan $\alpha = 11^{\circ}20'$.



Şəkil 2.19



Şəkil 2.20

Sonra qüvvələr üçbucağından naməlum $\bar{T}'$ qüvvəsinin qiymətini tapırıq:

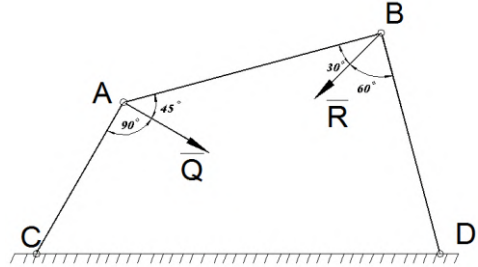
$$T' = \frac{p}{\cos \alpha} = \frac{16}{\cos 11^{\circ}20'} = 16 \text{ kN}.$$

AB sürgüqolunun CB çarxqoluna etdiyi $\bar{T}$ təsir qüvvəsi, təsirin əks təsirə bərabərlik prinsipinə görə, qiymətcə $\bar{T}'$ qüvvəsinə bərabər olub, istiqamətcə onun düz əksinə yönəlir, yəni

$$T = T' = 16 \text{ kN}.$$

Məsələ 2.7

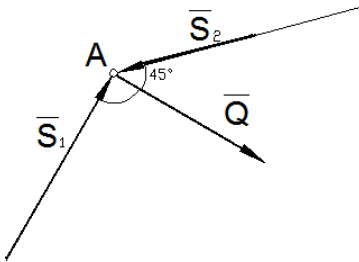
Oynaqlı $ABDC$ çubuq dördbucaqlısının CD tərəfi bərkidilmişdir. A oynağına $\angle BAQ=45^\circ$ bucaq altında $Q=100\text{ N}$ qüvvə tətbiq edilmişdir. $\angle CAQ=90^\circ$, $\angle DBR=60^\circ$ olduğu halda $ABDC$ dördbucaqlısının müvazinətdə olması üçün B oynağına $\angle ABR=30^\circ$ bucaq altında hansı $\bar{R}$ qüvvəsi tətbiq edilməlidir? (Şək. 2.21)



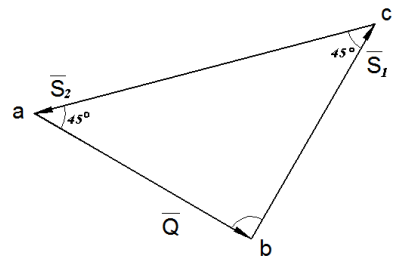
Şəkil 2.21

Həlli.

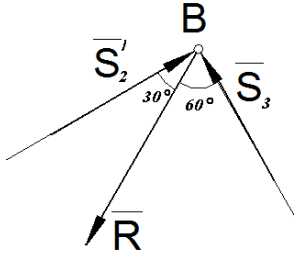
Məsələni həll etmək üçün əvvəlcə A düyününün müvazinətinə baxırıq. Bu düyünə verilmiş $\bar{Q}$ qüvvəsi və A nöqtəsində oynaqla birləşdirilmiş AC və AB çubuqlarının (rabitələrinin) $\bar{S}_1$ və $\bar{S}_2$ reaksiya qüvvələri təsir edir (Şək. 1.22). Şək. 1.23-də bu müvazinətdə olan qüvvələr üçün qapalı abc qüvvələr üçbucağı göstərilmişdir.



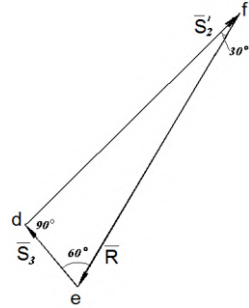
Şəkil 2.22



Şəkil 2.23



Şəkil 2.24



Şəkil 2.25

Eyni qayda ilə B düyününün müvazinətinə baxırıq. Bu düyünə naməlum $\bar{R}$ qüvvəsi və həmin düyündə birləşən BA və BD çubuqlarının $\bar{S}'_2$ və $\bar{S}_3$ reaksiya qüvvələri təsir edir (Şək. 2.24). Şək. 2.25-də bu müvazinətdə olan qüvvələr üçün qapalı def qüvvələr üçbucağı göstərilmişdir.

AB çubuğunun müvazinətdə olması üçün ona təsir edən (AB çubuğu istiqamətində əks tərəflərə yönəlmiş) $\bar{S}_2$ və $\bar{S}'_2$ qüvvələri qiymətcə bir-birinə bərabər olmalıdır.

Buna əsasən hər iki abc və def qüvvələr üçbucağından naməlum $\bar{S}_2$ və $\bar{S}'_2$ qüvvələrinin qiymətini tapıb bərabərləşdiririk:

$$S_2 = \frac{Q}{\cos 45^\circ}, S'_2 = R \cos 30^\circ$$

$$\text{Odur ki, } S_2 = S'_2 \text{ və ya } \frac{Q}{\cos 45^\circ} = R \cos 30^\circ.$$

Buradan naməlum R qüvvəsini tapırıq:

$$R = \frac{Q}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ} = \frac{100}{0,707 \cdot 0,866} = 163N.$$

2.2. Bir nöqtədə tətbiq olunmuş fəza qüvvələr sistemi

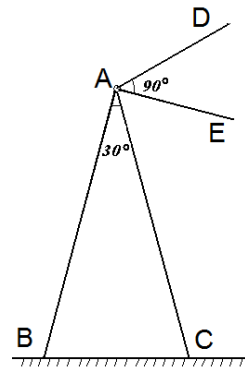
İndi biz bir nöqtədə tətbiq olunmuş çoxlu fəza qüvvələr sistemi təsiri altında olan cismin və ya düyünün müvazinətinə baxaq.

Qeyd etmək lazımdır ki, bir nöqtədə tətbiq olunmuş üç qüvvənin müvazinətinə baxdıqda adətən həndəsi üsuldən (qapalı üçbucaq üsulu) istifadə etmək əlverişli olur. Müvazinətdə olan qüvvələrin sayı üçdən artıq olduqda (2.1) vektorial ifadəsindən deyil, (2.2) analitik üsuldən istifadə etmək daha məqsədəuyğundur.

Aşağıdakı məsələlərin həllinə baxaq:

Məsələ 2.8

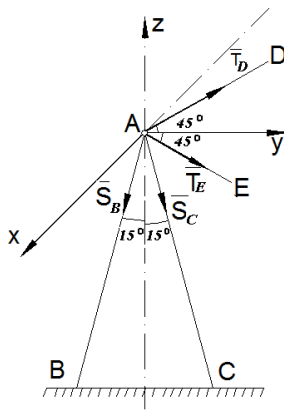
Bucaqlı sütun, təpələrində oynaqla bərkidilməklə maillikləri eyni olan iki AB və AC dirəyindən ibarətdir. $\angle BAC = 30^\circ$. Sütun bir-birilə düzbucaq əmələ gətirən iki üfüqi AD və AE məftilini saxlayır. Məftilin hər birinin gərilməsi 1 kN -a bərabərdir. Brusların ağırlığını nəzərə almadan və BAC müstəvisinin DAE bucağını yarı böldüyünü qəbul edərək, AB və AC dirəklərindəki qüvvələri təyin etməli (Şəkil.2.26).



Şəkil 2.26

Həlli.

Məsələnı həll etmək üçün A düyününün müvazinətinə baxaq. Bu düyünə AD və AE məftillərinin bir-birinə bərabər $\overline{T_D}$ və $\overline{T_E}$ gərilmə qüvvələri və AB və AC dirəklərinin istiqamətində yönəlmiş $\overline{S_B}$ və $\overline{S_C}$ reaksiya qüvvələri təsir edir. Məlum olduğu kimi, bu qüvvələrin müvazinətdə olması üçün onların ixtiyari seçilmiş üç koordinat oxlarından hər biri üzərindəki proyeksiyalarının cəbri cəmi ayrılıqda sıfıra bərabər olmalıdır.



Şəkil 2.27

Məsələnı asanlaşdırmaq üçün koordinat sisteminin başlanğıcını A nöqtəsində götürək, z oxunu şaquli istiqamətdə yuxarı, y oxunu isə DA müstəvisi üzərində yerləşməklə elə yönəldək ki, DAE bucağını yarıya bölsün (Şək. 2.27).

Şəkildən görürük ki, A düyünü $\overline{T_D}$ və $\overline{T_E}$ qüvvələri təsiri altında olarkən AB və AC dirəkləri gərilir. Burada AB dirəyinin $\overline{S_B}$ reaksiya qüvvəsini A oynaqından B nöqtəsinə doğru, AC dirəyinin $\overline{S_C}$ reaksiya qüvvəsini isə A oynaqından C nöqtəsinə doğru yönəldirik.

(2.2) müvazinət tənliklərinə əsasən A nöqtəsində tətbiq olunmuş müvazinətdə olan $\overline{T_D}$, $\overline{T_E}$, $\overline{S_C}$ və $\overline{S_B}$ qüvvələrini x , y , z koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq, alırıq:

$$\sum F_{ix} = -T_D \cos 45^\circ + T_E \cos 45^\circ = 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} = T_D \cos 45^\circ + T_E \cos 45^\circ - S_B \cos 75^\circ + \\ + S_C \cos 75^\circ = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

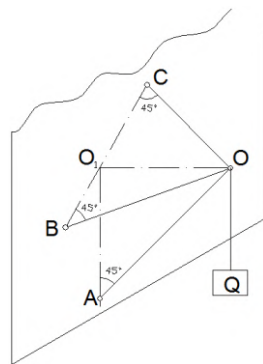
$$\sum F_{iz} = -S_B \cos 15^\circ - S_C \cos 15^\circ = 0 \quad (2.5)$$

(2.3) tənliyindən görünür ki, BAC müstəvisinin DAE bucağını yarıya bölməsi üçün doğrudan da AD və AE məfəllərinin gərilmələri bir-birinə bərabər olmalıdır, yəni $T_D = T_E$. (2.4) və (2.5) tənliklərindən naməlum S_B və S_C qüvvələrini tapırıq: $S_B = 2,73 \text{ kN}$, $S_C = -2,73 \text{ kN}$.

Cavabdakı «+» və «-» işarələri göstərir ki, AB dirəyi dartılır, AC dirəyi isə sıxılır.

Məsələ 2.9

100 N ağırlığında Q yükü, üfqlə 45° bucaq təşkil edən AO tiri (bu tir A nöqtəsində oynaq ilə birləşmişdir) və eyni uzunluqda iki üfqi BO və CO zənciri ilə saxlanılır. Tirdəki S qüvvəsini və zəncirlərin T gərilməsini tapmalı (Şək. 2.28).

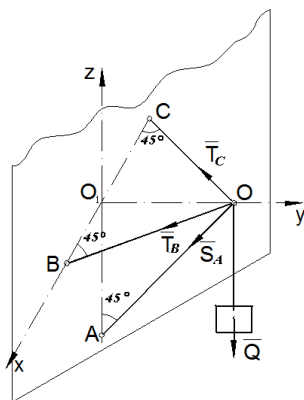


Şəkil 2.28

Həlli.

Burada biz O düyününün müvazinətinə baxırıq. Bu düyünə Q yükünün $\bar{Q}$ ağırlıq qüvvəsi, AO çubuğunun $\bar{S}_A$ reaksiya qüvvəsi və BO və CO zəncirlərinin $\bar{T}_B$ və

$\overline{T}_C$ gərilmə qüvvələri təsir edir. Şəkildə AO çubuğunun $\overline{S}_A$ reaksiya qüvvəsini çubuq istiqamətində O düyünündən A nöqtəsinə doğru, BO və CO zəncirlərinin $\overline{T}_B$ və $\overline{T}_C$ reaksiya qüvvələrini isə zəncirlər istiqamətində uyğun olaraq B və C nöqtələrinə doğru yönəldirik.



Şəkil 2.29

Məsələni həll etmək üçün O_1 nöqtəsini O_1xyz koordinat sisteminin başlanğıcı qəbul edirik. Bu sistemin x oxunu CB xətti istiqamətində, y oxunu isə O_1O xətti boyunca yönəldirik (Şək. 2.29).

Müvazinətdə olan $\overline{Q}$, $\overline{S}_A$, $\overline{T}_B$, $\overline{T}_C$ qüvvələrinin seçilmiş x , y , z koordinat oxlarının üzərinə proyeksiyalasaq, (2.2) müvazinət şərtlərinə əsasən alırıq:

$$\sum F_{ix} = T_B \cos 45^\circ - T_C \cos 45^\circ = 0 \quad (2.6)$$

$$\sum F_{iy} = -T_B \cos 45^\circ - T_C \cos 45^\circ - S_A \cos 45^\circ = 0 \quad (2.7)$$

$$\sum F_{iz} = -S_A \cos 45^\circ - Q = 0 \quad (2.8)$$

Əvvəlcə (1.8) ifadəsindən naməlum S_A qüvvəsini tapırıq: $S_A = -Q / \cos 45^\circ = -100 / 0,707 = -141N$. Cavabdakı «-» işarəsi göstərir ki, AO tiri sıxılır.

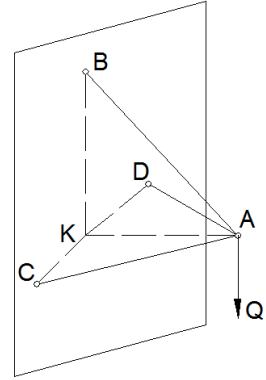
Sonra (2.6) tənliyindən $T_B = T_C$ olduğunu alırıq. (2.7) tənliyindən naməlum T_B və T_C qüvvəsini tapırıq:

$$2T_B + S_A = 0, \text{buradan } T_B = T_C = -\frac{S_A}{2} = \frac{141}{2} = 70,5N.$$

Cavab göstərir ki, BO və CO zəncirləri dartılır.

Məsələ 2.10

$AB=170$ sm; $AC=AD=100$ sm;
 $CD=120$ sm; $CK=KD$ və CDA
 üçbucağının müstəvisi üfüdür. A ,
 C və D nöqtələrindəki birləşmələr
 oynaqlıdır. Ağırlığı 180 N olan Q
 yükünü saxlayan AB trosundakı,
 eləcə də AC və AD çubuqlarındakı
 qüvvələri tapmalı (Şək. 2.30).



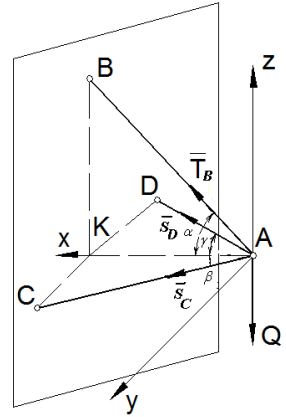
Şəkil 2.30

Həlli.

Məsələni həll etmək üçün A düyününün müvazinətinə baxaq. Bu düyünə verilmiş $\overline{Q}$ qüvvəsi, AC və AD çubuqlarının $\overline{S_C}$ və $\overline{S_D}$ reaksiya qüvvələri, eləcə də AB trosunun $\overline{T_B}$ reaksiya qüvvəsi təsir edir. Şəkildən göründüyü kimi, $\overline{Q}$ qüvvəsinin təsiri altında AB trosu dartılır, AC və AD çubuqları isə sıxılır. Odur ki, AB trosunun $\overline{T_B}$ reaksiya qüvvəsi trosun istiqamətində B nöqtəsinə doğru, AC və AD çubuqlarının $\overline{S_C}$ və $\overline{S_D}$ reaksiya qüvvələri isə bu çubuqlar istiqamətində uyğun olaraq C və D nöqtələrindən A nöqtəsinə doğru yönələcəkdir.

Məsələni həll etmək üçün başlanğıcı A nöqtəsində yerləşən $Oxyz$ koordinat sistemi qəbul edək. Bu sistemin x oxunu AK xətti boyunca, y oxunu isə DC xəttinə paralel istiqamətdə yönəldirik (Şək. 2.31).

Müvazinətdə olan $\bar{Q}$, $\bar{T}_A$, $\bar{S}_C$ və $\bar{S}_D$ qüvvələrinin seçilmiş x, y, z koordinat oxlarının üzərinə proyeksiyalasaq, (2.2) müvazinət şərtlərinə əsasən alırıq:



Şəkil 2.31

$$\sum F_{ix} = T_B \cos \alpha + S_C \cos \beta + S_D \cos \gamma = 0 \quad (2.9)$$

$$\sum F_{iy} = S_C \cos(90^\circ - \beta) - S_D \cos(90^\circ - \gamma) = 0 \quad (2.10)$$

$$\sum F_{iz} = -Q + T_B \cos(90^\circ - \alpha) = 0 \quad (2.11)$$

Bu ifadələrə daxil olan α , β və γ bucaqlarının sinus və kosinuslarını şəkildən tapırıq:

$$\cos \alpha = AK/AB = \sqrt{AC^2 - CK^2}/AB = \sqrt{100^2 - 60^2}/170 = 8/17;$$

$$\cos \beta = \cos \gamma = AK/AC = 80/100 = 0,8;$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = BK/AB = \sqrt{AB^2 - AK^2}/AB = \sqrt{170^2 - 80^2}/170 = 15/17;$$

$$\cos(90^\circ - \beta) = \cos(90^\circ - \gamma) = \sin \beta = CK/AC = 60/100 = 0,6.$$

Əvvəlcə (2.11) tənliyindən bilavasitə naməlum T_B qüvvəsini tapaq:

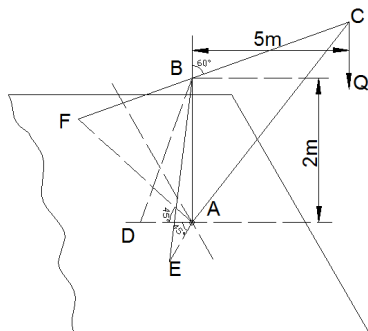
$$T_B = \frac{Q}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{180 \cdot 17}{15} = 204 N.$$

Sonra (2.10) tənliyindən $S_C = S_D$ olduğunu alırıq. Onda (2.9) tənliyindən S_C və S_D naməlum qüvvələrini tapa bilərik:

$$S_C = S_D = \frac{T_D \cos \alpha}{2 \cos \beta} = \frac{204 \cdot 8}{2 \cdot 0,8 \cdot 17} = 60 N.$$

Məsələ 2.11

Ağırlığı 20 kN olan Q yükünü qaldıran gəzdirmə kranı şəkildə göstərildiyi kimi qurulmuşdur. $AB=AE=AF=2 \text{ m}$; $\angle EAF=90^\circ$, kranın ABC müstəvisi $EABF$ ikiüzlü düzbucaqlını yarıya bölür. Kranın hissələrinin ağırlığını nəzərə almamaqla şaquli AB dayağını sıxan P_1 qüvvəsini, habelə BC məftilini, eləcə də BE və BF troslarını dartan P_2 , P_3 və P_4 qüvvələrini tapmalı (Şək. 2.32).

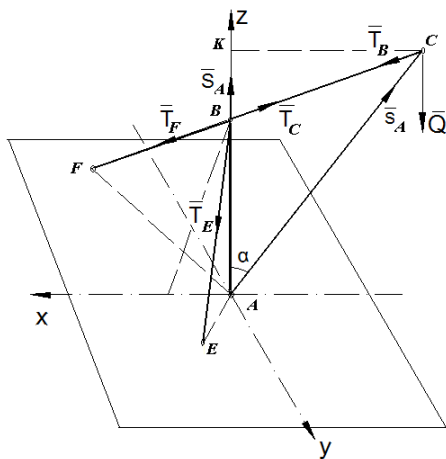


Şəkil 2.32

Həlli.

Məsələni həll etmək üçün əvvəlcə C düyününün

müvazinətinə baxırıq. Bu düyünə verilmiş $\bar{Q}$ qüvvəsi AC dayaqının $\bar{S}_A$ reaksiya qüvvəsi və BC məftilinin $\bar{T}_B$ reaksiya qüvvəsi təsir edir. Şəkildən görürük ki, $\bar{Q}$ qüvvəsinin təsiri altında AC dayaqı sıxıldığı üçün onun $\bar{S}_A$ reaksiya qüvvəsi bu dayaq istiqamətində A nöqtəsindən C nöqtəsinə doğru yönəlir. BC məftili isə dartıldığı üçün onun $\bar{T}_B$ reaksiya qüvvəsi C -dən B -yə doğru yönəlir (Şək. 2.33).



Şəkil 2.33

Göstərilən üç $\bar{Q}$, $\bar{S}_A$ və $\bar{T}_B$ qüvvələri müvazinətdə olduğu üçün bu qüvvələr üçün qurulmuş abc qüvvələr üçbucağı qapalı olmalıdır (Şək. 2.34). Əvvəlcə bu üçbucağın naməlum α buxağını Şək. 2.33-dən tapırıq:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KC}{AK} = \frac{KC}{AB + BK} = \frac{5}{2 + 5 \operatorname{ctg} 60^\circ} = 1,023.$$

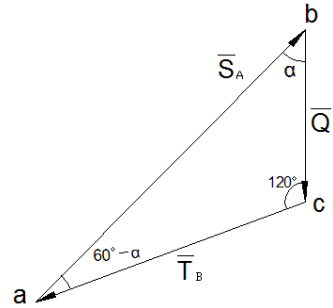
Buradan $\alpha = 45^\circ 40'$. Sonra abc qüvvələr üçbucağından sinuslar teoreminə əsasən yazırıq:

$$\frac{T_B}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin(60^\circ - \alpha)}.$$

Buradan naməlum T_B qüvvəsini tapırıq:

$$T_B = \frac{Q \sin \alpha}{\sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{20 \sin 45^\circ 40'}{\sin 14^\circ 20'} = 58 \text{ kN}.$$

İndi B düyününün müvazinətinə baxaq. Bu düyünə yuxarıda tapdığımız $\overline{T}_B$ qüvvəsinə qiymətcə bərabər, istiqamətcə düz əks olan $\overline{T}_C$ qüvvəsi (BC məftilinin B düyününə nəzərən reaksiya qüvvəsi), AB dayağının $\overline{S}_A$ reaksiya qüvvəsi və BE və BF troslarının $\overline{T}_E$ və $\overline{T}_F$ reaksiya qüvvələri təsir edir (şək. 2.33).



Şəkil 2.34

Şəkildən görürük ki, bu qüvvələrin təsiri altında AB dayaqı sıxılır, BE və BF trosları isə dartılır, odur ki, $\overline{S}_A$ reaksiya qüvvəsi AB dayaqı boyunca yuxarıya doğru yönəlir, $\overline{T}_E$ və $\overline{T}_F$ reaksiya qüvvələri isə uyğun olaraq BE və BF trosları istiqamətdə E və F nöqtələrinə doğru yönələcəkdir. Bu qüvvələr müvazinətdə olduğu üçün onların ixtiyari seçilmiş üç x, y, z koordinat oxlarının hər biri üzərindəki proyeksiyalarının cəmi ayrılıqda sıfıra bərabər olmalıdır. Məsələn həll etmək üçün başlanğıcı A nöqtəsində yerləşən $Axyz$ koordinat sistemi götürək. Bu sistemin z oxunu AB dayaqı istiqamətdə, x oxunu EAF bucağını tən yarıya bölən AD xətti boyunca yönəldək.

Burada göstərilən qüvvələrin x, y, z koordinat oxları üzərindəki proyeksiyalarını tapmaq üçün ikiqat

proyeksiyalama üsulundan istifadə etmək əlverişli olur. Məsələn, $\overline{T_E}$ qüvvəsinin x oxu üzərində proyeksiyasını tapmaq üçün onun xAy müstəvisi üzərindəki $T_A \cos 45^\circ$ -yə bərabər olan proyeksiyasını alırıq, sonra isə bu proyeksiyanın x oxu üzərindəki $T_A \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$ bərabər proyeksiyasını tapırıq. Eyni qayda ilə $\overline{T_F}$ qüvvəsinin x oxu üzərindəki $T_F \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$ olan proyeksiyasını tapırıq.

Müvazinətdə olan $\overline{T_C}$, $\overline{S_A}$, $\overline{T_E}$, $\overline{T_F}$ qüvvələrini seçilmiş x , y , z koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq, (2.2) müvazinət şərtlərinə əsasən, alırıq:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = -T_C \cos 30^\circ + T_E \cos 45^\circ \cos 45^\circ + \\ + T_F \cos 45^\circ \cos 45^\circ = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\sum F_{iy} = T_E \cos 45^\circ \cos 45^\circ - T_F \cos 45^\circ \cos 45^\circ = 0 \quad (2.13)$$

$$\sum F_{iz} = T_C \cos 60^\circ + S_A - T_E \cos 45^\circ - T_F \cos 45^\circ = 0 \quad (2.14)$$

Əvvəlcə (2.13) tənliyindən alırıq: $T_E = T_F$.

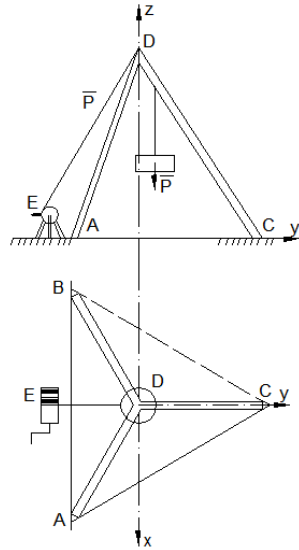
Bu bərabərliyi (2.12) tənliyində nəzərə alıb, $T_C = T_B = 58 \text{ kN}$ olduğunu bilərək, naməlum T_E və T_F qüvvələrini tapırıq:

$$T_E = T_F = 50 \text{ kN}.$$

Bu qiymətləri (2.14) tənliyində yerinə yazıb, naməlum S_A qüvvəsini də tapırıq: $S_A = 42 \text{ kN}$.

Məsələ 2.12

30 kN ağırlığında P yükünü şax-tadan qaldırmaq üçün $ABCD$ üçayaq-lısı və E bucurqadı qurulmuşdur. ABC üçbucağının bərabərtərəfli, ayaqların və DE trosunun üfüqi müstə-visi ilə əmələ gətirdiyi bucaqlar 60° olduqda üçayaqlının ayaqlarındakı qüvvələri tapmalı. Bucurqadın üçayaqlıya nəzərən tutduğu vəziyyət şəkildə göstərilmişdir (Şək. 2.35).



Şəkil 2.35

Həlli.

Məsələni həll etmək üçün D düyününün müvazinətinə baxırıq. Bu düyünə D blokundan aşırılmış trosdan asılmış P yükünün $\bar{P}$ ağırlıq qüvvəsi, ED trosunun $\bar{T}_E$ reaksiya qüvvəsi və AD , BD , CD ayaqlarının $\bar{S}_A$, $\bar{S}_B$ və $\bar{S}_C$ reaksiya qüvvələri təsir edir (Şək. 2.36). Şəkildən aydındır ki, bu ayaqlar sıxılır, ED trosu isə dartılır, odur ki, $\bar{S}_A$, $\bar{S}_B$ və $\bar{S}_C$ qüvvələri uyğun olaraq AD , BD və CD ayaqları boyunca yuxarıya doğru, ED trosunun $\bar{T}_E$ reaksiya qüvvəsi isə bu tros boyunca E nöqtə-sinə doğru yönələcəkdir. Aydındır ki, D blokundakı sürtünməni nəzərə almasaq, həmin blokdan aşırılmış trosun bütün nöqtələrindəki gərilmə qüvvələri bir-birinə bərabər

olacaqdır. Odur ki, $T_E = P$ olacaqdır.

Başlanğıcı üfüqi müstəvi üzərində yerləşən $Oxyz$ koordinat sistemi qəbul edirik. Bu sistemin koordinat oxları şəkildə göstərilmişdir (Şək. 1.36).

Müvazinətdə olan $\bar{P}$, $\bar{S}_A$, $\bar{S}_B$, $\bar{S}_C$ və $\bar{T}_E$ qüvvələrinin seçilmiş x, y, z koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq, (2.2) tənliklərinə əsasən alırıq:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= S_A \cos 60^\circ \cos 30^\circ - \\ S_B \cos 60^\circ \cos 30^\circ &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

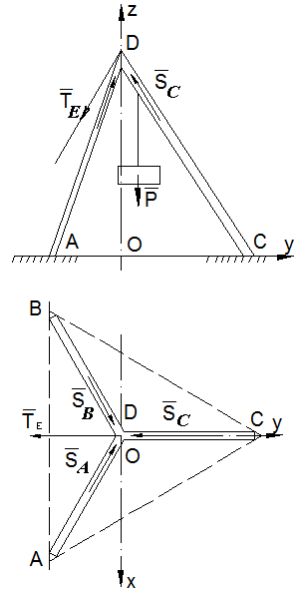
$$\sum F_{iy} = S_A \cos 60^\circ \cos 60^\circ +$$

$$S_B \cos 60^\circ \cos 60^\circ - S_C \cos 60^\circ - T_E \cos 60^\circ = 0 \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \sum F_{iz} &= -P - S_A \cos 30^\circ - S_B \cos 30^\circ - S_C \cos 30^\circ - \\ T_E \cos 30^\circ &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Bu tənlikləri birlikdə həll edək. (2.15) tənliyindən $S_A = S_B$ olduğunu tapırıq. Bu bərabərliyi (2.16) və (2.17) tənliklərində yerinə yazıb və $T_E = P$ olduğunu nəzərə alsaq, naməlum S_A , S_B və S_C qüvvələrini tapırıq:

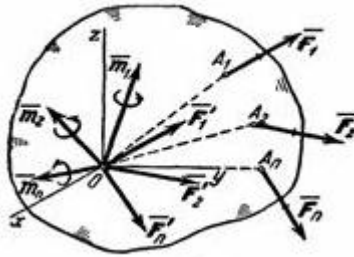
$$S_A = S_B = 31,5 \text{ kN}; S_C = 1,55 \text{ kN}.$$



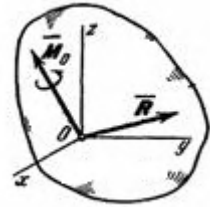
Şəkil 2.36

III Fəsil. İxtiyari qüvvələr sistemi

Fəzada hər hansı surətdə yerləşən qüvvələr sisteminə ixtiyari qüvvələr sistemi deyilir. Məlum olduğu kimi, ixtiyari qüvvələr sistemini verilmiş O nöqtəsinə gətirdikdə bu nöqtədə tətbiq olunmuş və qüvvələrin həndəsi cəminə bərabər olan bir qüvvə (baş vektor) və momenti qüvvələrin gətirilmə nöqtəsinə nəzərən momentlərinin həndəsi cəminə bərabər olan bir cüt (baş moment) alınır (Şəkil 3.1 və 3.2).



Şəkil 3.1



Şəkil 3.2

Odur ki, ixtiyari qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün həmin baş vektor və baş moment sıfıra bərabər olmalıdır:

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}_i = 0; \vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(F_i) = 0 \quad (3.1)$$

Praktikada bu vektorial ifadələrdən istifadə etmək çətinlik törədir. Odur ki, (3.1) ifadələrini ixtiyari seçilmiş üç x, y, z koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq və qüvvənin verilmiş nöqtəyə nəzərən momenti ilə həmin nöqtədən keçən oxa nəzərən momenti arasındakı asılılıq teoremindən istifadə etsək, alarıq:

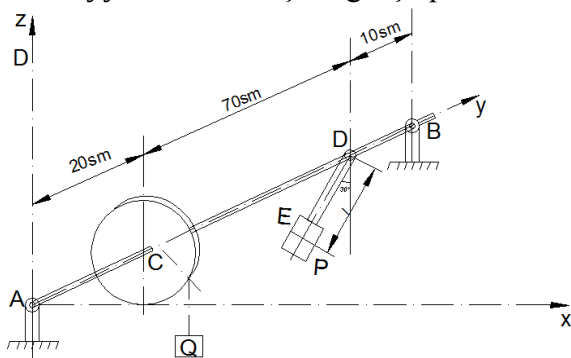
$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0; \sum F_{iy} = 0; \sum F_{iz} = 0; \\ \sum m_x(\bar{F}_i) &= 0; \sum m_y(\bar{F}_i) = 0; \sum m_z(\bar{F}_i) = 0.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Deməli, ixtiyari qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün bu qüvvələrin ixtiyari seçilmiş üç koordinat oxları üzərindəki proyeksiyalarının və həmin oxlardan hər birinə nəzərən momentlərinin cəbri cəmi sıfıra bərabər olmalıdır.

Bu mövzuya aid aşağıdakı məsələlərin həllinə baxaq.

Məsələ 3.1

A və B yastıqları üzərində oturan üfüqi vala, bir tərəfdən 20 sm radiuslu C qasnağından ip vasitəsilə asılmış $Q = 250\text{ N}$ yük, digər tərəfdən ona düz bucaq altında tərپənməz birləşdirilmiş DE çubuğuna geydirilən $P = 1\text{ kN}$ yük təsir edir. $AC = 20\text{ sm}$, $CD = 70\text{ sm}$, $BD = 10\text{ sm}$ -dir. Müvazinət vəziyyə-tində DE çubuğu şaquli xətlə 30° bucaq əmələ gətirir. P yükünün AB valının oxundan olan ℓ məsafəsini, A və B yastıqlarının reaksiyalarını tapmalı (Şək. 3.3).



Şəkil 3.3

Həlli.

Şəkildən görünür ki, müvazinətdə olan üfüqi vala şaquli istiqamətdə aşağı yönəlmiş aktiv $\bar{P}$ və $\bar{Q}$ qüvvələri və A və B yastıqlarının (rabitələrinin) $\bar{R}_A$ və $\bar{R}_B$ reaksiya qüvvələri təsir edir (şək. 3.4). Bu dayaqqlar ikinci növ silindrik oynaq rabitə olduğu üçün onların reaksiya qüvvələri AB valına perpendikulyar olmalıdır, odur ki, həmin qüvvələrin y oxu istiqamətindəki toplananları

sıfıra bərabər olacaqdır. Bu

reaksiya

qüvvələrini

şəkildə

göstərilmiş x

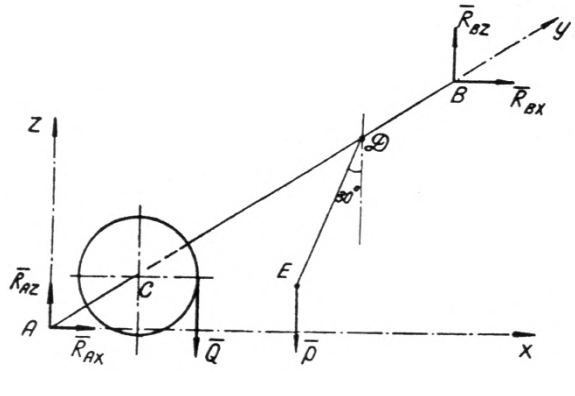
və z oxu

istiqamətində

$\bar{R}_{AX}$, $\bar{R}_{AZ}$ və

$\bar{R}_{BX}$, $\bar{R}_{BZ}$

toplananlarına ayırıraq.



Şəkil 3.4

Müvazinətdə olan $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}_{AX}$, $\bar{R}_{AZ}$, $\bar{R}_{BX}$ və $\bar{R}_{BZ}$ qüvvələrinin koordinat oxları üzərinə proyeksiyalarını və həmin oxlara nəzərən momentlərini tapıb (2.2) müvazinət şərtlərinə əsasən alırıq (qeyd edək ki, burada qüvvələr y oxuna perpendikulyar olduqları üçün həmin ox üzərindəki proyeksiya tənliyi öz əhəmiyyətini itirir və eyniliyə çevrilir):

$$\sum F_{ix} = R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \quad (3.3)$$

$$\sum F_{iz} = -P - Q + R_{Az} + R_{Bz} = 0 \quad (3.4)$$

$$\sum m_x(F_i) = -Q \cdot AC - P \cdot AD + R_{Bz} \cdot AB = 0 \quad (3.5)$$

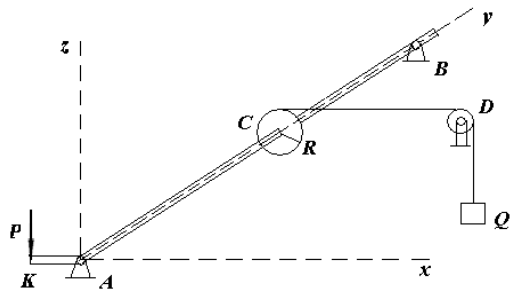
$$\sum m_y(F_i) = Q \cdot r_C - Pl \sin 30^\circ = 0 \quad (3.6)$$

$$\sum m_z(F_i) = R_{Ax} \cdot AB = 0 \quad (3.7)$$

Əvvəlcə (3.7) ifadəsində $R_{Bx} = 0$ olduğunu alırıq. Onda (3.3) ifadəsindən $R_{Ax} = 0$ olur. Daha sonra (3.5) və (3.6) tənliklərindən naməlum R_{Bz} qüvvəsini və ℓ kəmiyyətini tapırıq: $R_{Bz} = 950 \text{ N}$, $\ell = 10 \text{ sm}$. Nəhayət, (3.4) tənliyindən $R_{Az} = 300 \text{ N}$ olduğunu tapırıq.

Məsələ 3.2

İşçi, şəkildə sxematik çəkilmiş dolamaçarx vasitəsilə $Q = 800 \text{ N}$ yükü müntəzəm qaldırır. Barabanın radiusu $R = 5 \text{ sm}$; dəstəyin uzunluğu $AK = 40 \text{ sm}$, $AC = CB = 50 \text{ sm}$. AK dəstəyinin üfüqi vəziyyətində ona düşən P qüvvəsini və dolamaçarx oxunun A və B dayaqlarına etdiyi qüvvələri tapmalı. P qüvvəsi şaqulidir (Şək. 3.5).



Şəkil 3.5

Həlli.

Burada biz dolamaçarxın müvazinətinə baxırıq. Dolama-çarxa AK dəstəyinə tətbiq olunmuş $\bar{P}$ qüvvəsi, C barabanı-na sarınmış ipi

üfüqi

istiqamətdə

sağa dartan $\bar{Q}$

yükünün ağırlıq

qüvvəsi və A və

B dayaqlarının

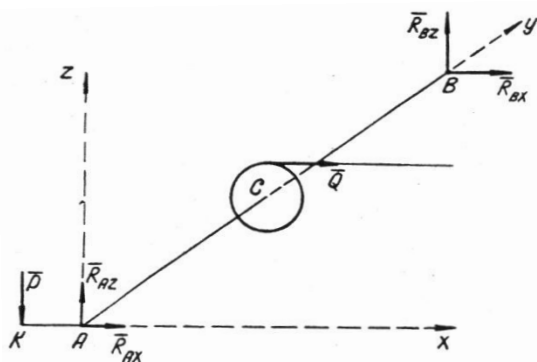
$\bar{R}_A$ və $\bar{R}_B$

reaksiya

qüvvələri təsir

edəcəkdir (Şək.

3.6).



Şəkil 3.6

Yuxarıdakı məsələdə olduğu kimi $\bar{R}_A$ və $\bar{R}_B$ qüvvələri (şəkildə göstərilməmiş-dir) AB oxuna perpendikulyar olacaqdır. Odur ki, bu qüvvə-ləri şəkildə göstərilmiş x və z oxları boyunca $\bar{R}_{Ax}$, $\bar{R}_{Az}$ və $\bar{R}_{Bx}$, $\bar{R}_{Bz}$ toplananlarına ayırırıq.

Dolamaçarx bu qüvvələrin təsiri altında müvazinətdə olduğu üçün həmin qüvvələrin x , y , z oxları üzərində proyeksiyalarının cəbri cəmi və bu oxlara nəzərən momentlərinin cəbri cəmi ayrılıqda sıfıra bərabər olmalıdır. Qeyd edək ki, burada bütün qüvvələrin y oxu üzərindəki proyeksiyaları sıfıra bərabər olduqları üçün həmin ox üzərindəki proyeksiya tənliyi öz əhəmiyyətini itirir və eyniliyə çevrilir . Buna əsasən yazırıq:

$$\sum F_{ix} = Q + R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \quad (3.8)$$

$$\sum F_{iz} = -P + R_{Az} + R_{Bz} = 0 \quad (3.9)$$

$$\sum m_x(F_i) = R_{Bz} \cdot AB = 0 \quad (3.10)$$

$$\sum m_y(F_i) = -P \cdot AK + Q \cdot r = 0 \quad (3.11)$$

$$\sum m_z(F_i) = -Q \cdot AC - R_{Bx} \cdot AB = 0 \quad (3.12)$$

Buradan (3.10), (3.11), (3.12) tənliklərdən ardıcılıqla tapırıq:

$$R_{Bz} = 0, P = \frac{Q \cdot R}{AK} = \frac{800 \cdot 5}{40} = 100N,$$

$$R_{Bx} = -\frac{Q \cdot AC}{AB} = -\frac{800 \cdot 50}{100} = -400N.$$

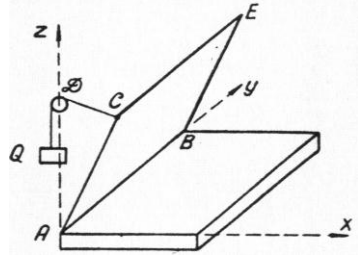
Sonra (3.8) və (3.9) tənliklərindən qalan naməlum R_{Ax} və R_{Az} qüvvələrini tapırıq:

$$R_{Ax} = -400N, R_{Az} = 100N.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, $\overline{R_{Ax}}$ və $\overline{R_{Bx}}$ qüvvələrinin qiymətləri məsələnin həllində mənfi işarə ilə alınır. Bu onu göstərir ki, həmin qüvvələr bizim əvvəlcə bilmədən qəbul etdiyimiz x oxu istiqamətində deyil, bu oxun əksinə yönəliirlər.

Məsələ 3.3

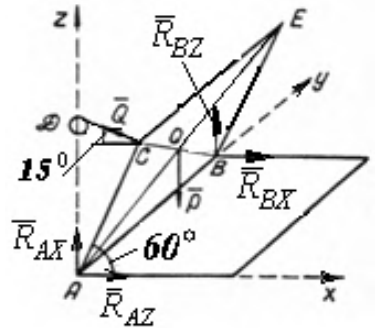
Ağırlığı $P = 400 \text{ N}$ olan bircinsli düzbucaqlı qapaq, üfqlə 60° bucaq əmələ gətirən yarımçıq vəziyyətdə Q əksyükü ilə saxlanılır. D bloku A nöqtəsi ilə eyni şaqul üzərində bərkidildi və $AD=AC$ olduğu halda, blokdakı sürtünməni nəzərə almadan, K yükünün ağırlığını, habelə A və B oynaqlarının reaksiyalarını tapmalı (Şək. 3.7).



Şəkil 3.7

Həlli.

Burada biz $ABEC$ qapağının müvazinətinə baxırıq. Bu qapağa onun O mərkəzində tətbiq olunmuş $\overline{P}$ ağırlıq qüvvəsi, CD ipinin istiqamətində yönəlmiş Q yükünün ağırlığına bərabər dartıcı $\overline{Q}$ qüvvəsi və A və B silindrik oynaqlarının $\overline{R}_A$ və $\overline{R}_B$ reaksiya qüvvələri təsir edəcəkdir (Şək. 3.8).



Şəkil 3.8

Bu reaksiya qüvvələrini şəkildə göstərilmiş x və z oxları boyunca $\overline{R}_{Ax}$, $\overline{R}_{Az}$ və $\overline{R}_{Bx}$, $\overline{R}_{Bz}$ toplananlarına ayıraq.

Qapaq $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}_{Ax}$, $\overline{R}_{Az}$, $\overline{R}_{Bx}$ və $\overline{R}_{Bz}$ ixtiyari qüv-

vələr sisteminin təsiri altında müvazinətdə olduğu üçün bu qüvvələr üçün məlum olan (3.2) müvazinət tənliklərindən istifadə edərək, yazırıq:

$$\sum F_{ix} = -Q \cos 15^\circ + R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \quad (3.13)$$

$$\sum F_{iz} = -P + Q \cos 75^\circ + R_{Az} + R_{Bz} = 0 \quad (3.14)$$

$$\sum m_x(F_i) = -P \frac{AB}{2} + R_{Bz} \cdot AB = 0 \quad (3.15)$$

$$\sum m_y(F_i) = -P \cdot \frac{AC}{2} \cos 60^\circ - Q \cdot AC \sin 75^\circ = 0 \quad (3.16)$$

$$\sum m_z(F_i) = -R_{Bx} \cdot AB = 0 \quad (3.17)$$

Əvvəlcə (2.15), (2.16), (2.17) tənliklərindən naməlum R_{Bz} , Q və R_{Bx} qüvvələrini tapırıq:

$$R_{Bz} = \frac{P}{2} = 200N, Q = \frac{P \cos 60^\circ}{2 \sin 75^\circ} = 104N, R_{Bx} = 0.$$

Sonra (3.13) və (3.14) tənliklərindən qalan naməlum qüvvələri tapırıq:

$$R_{Ax} = 100N, R_{Az} = 173N.$$

IV Fəsil. Paralel qüvvələr sistemi

Fəzada yerləşən və bir-birinə paralel olan qüvvələr sisteminə fəza paralel qüvvələr sistemi deyilir. Həmin paralel qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün onların paralel olduğu z oxu üzərindəki proyeksiyalarının və bu qüvvələrin perpendikulyar olduğu iki x və y koordinat oxlarından hər birinə nəzərən momentlərinin cəbri cəmi sıfıra bərabər olmalıdır, yəni:

$$\sum F_{iz} = 0; \sum m_x(\bar{F}_i) = 0; \sum m_y(\bar{F}_i) = 0; \quad (4.1)$$

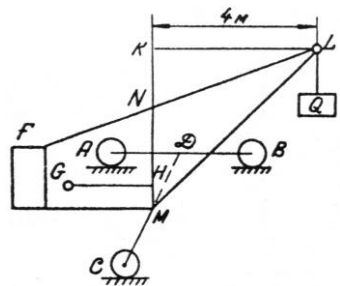
Xüsusi halda paralel qüvvələr sistemi eyni müstəvi üzərində yerləşərsə, bu cür qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün bu qüvvələrin cəbri cəmi sıfıra bərabər olmalı və həmin qüvvələrin təsir müstəvisi üzərində yerləşən ixtiyari seçilmiş bir nöqtəyə nəzərən momentlərinin cəbri cəmi sıfıra bərabər olmalıdır, yəni:

$$\sum F_i = 0, \sum m_O(\bar{F}_i) = 0. \quad (4.2)$$

Əvvəlcə fəza paralel qüvvələr sisteminə aid aşağıdakı məsələlərin həllinə baxaq.

Məsələ 4.1

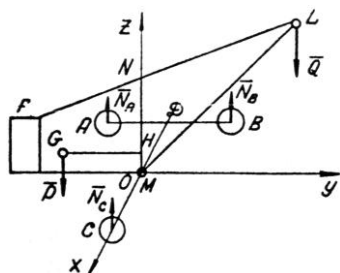
Qaldırıcı kran üççarxlı ABC arabacığı üstündə qurulmuşdur. $AD=DB=1\text{ m}$, $CD=1,5\text{ m}$, $CM=1\text{ m}$, $KL=4\text{ m}$. Kran F əksyüku ilə müvazinətləşdirilir. Kranın əksyüklə birlikdə ağırlığı $P=100\text{ kN}$ -dur və kranın MN oxundan $GH=0,5\text{ m}$ məsafəsində $LMNF$



Şəkil 4.1

müstəvisi üzərində yerləşən G nöqtəsində tətbiq olunmuşdur, qaldırılan Q yükünün ağırlığı 30 kN -dur. Kranın LMN müstəvisinin AB düz xəttinə paralel olan vəziyyətində çarx-ların relsə etdiyi təzyiqləri tapmalı (Şək. 4.1).

Həlli.



Şəkil 4.2

Şəkildən aydındır ki, kranə verilmiş $\bar{P}$ və $\bar{Q}$ qüvvələrindən başqa relslərin A, B və C çarxlarına göstərdiyi $\bar{N}_A$, $\bar{N}_B$ və $\bar{N}_C$ reaksiya qüvvələri təsir edir. Relslər birinci növ dayaq olduğu üçün onların reaksiya qüvvələri dayaq müstəvilərinə perpendikulyar istiqamətdə

yuxarıya doğru yönəliirlər (Şək. 4.2).

Beləliklə, kran bir-birinə paralel olan və fəzada yerləşən $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{N}_A$, $\bar{N}_B$ və $\bar{N}_C$ qüvvələrinin təsiri altında müvazi-nətdə qalır. Odur ki, (4.1) müvazinət tənliklərinə əsasən şəkildə göstərilmiş $Oxyz$ sisteminə nəzərən yazırıq:

$$\sum F_{iz} = -P - Q + N_A + N_B + N_C = 0,$$

$$\sum m_x(\bar{F}_i) = P \cdot GH - Q \cdot KL - N_A \cdot AD + N_B \cdot DB = 0,$$

$$\sum m_y(\bar{F}_i) = N_A \cdot MD + N_B \cdot MD - N_C \cdot MC = 0.$$

Birinci tənlikdən tapırıq:

$$N_A + N_B = P + Q - N_C.$$

Bu ifadəni üçüncü tənlikdə yerinə yazsaq, alarıq:

$$MD(P + Q - N_C) - N_C \cdot MC = 0.$$

Buradan naməlum N_C reaksiya qüvvəsinə tapırıq:

$$N_C = \frac{(P + Q) \cdot MD}{MD + MC} = \frac{(100 + 30) \cdot 0,5}{0,5 + 1} = 43,33kN.$$

Sonra birinci tənlikdən N_A reaksiya qüvvəsini tapıb, ikinci tənlikdən yerinə yazırıq:

$$N_A = P + Q - N_C - N_B = 100 + 30 - 43,33 - N_B = 86,67 - N_B, \\ 100 \cdot 0,5 - 30 \cdot 4 - (86,67 - N_B) \cdot 1 + N_B \cdot 1 = 0.$$

Buradan naməlum N_B reaksiya qüvvəsini tapırıq:

$$N_B = 78,33kN.$$

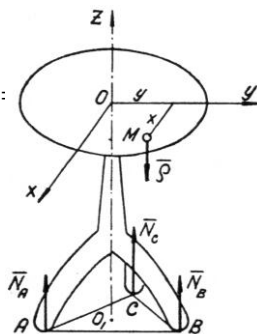
Nəhayət, birinci tənlikdən N_A reaksiya qüvvəsini tapırıq:

$$N_A = P + Q - N_B - N_C = 100 + 30 - 78,33 - 43,33 = 8,33kN.$$

Kranın A , B və C çarxlarının relslərə etdiyi $\overline{Q_A}$, $\overline{Q_B}$ və $\overline{Q_C}$ təzyiq qüvvələri qiymətcə uyğun olaraq $\overline{N_A}$, $\overline{N_B}$ və $\overline{N_C}$ reaksiya qüvvələrinə bərabər olub, istiqamətcə onların əksinə yönəlirlər, yəni:

$$\bar{Q}_A = -\bar{N}_A, \bar{Q}_B = -\bar{N}_B, \bar{Q}_C = \bar{N}_C,$$

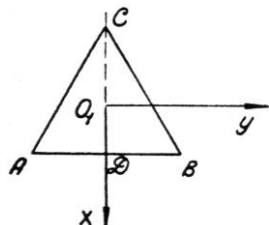
$$Q_A = N_A = 8,33kN; Q_B = N_B = 78,33kN; Q_C :$$



Şəkil 4.3

Məsələ 4.2

Mizin üç ayağı vardır. Bu ayaqların A , B və C ucları hər tərəfi a olan bərabərtərəfli



Şəkil 4.4

üçbucaq əmələ gətirir. Mizin ağırlığı ABC üçbucağının O_1

mərkəzindən keçən ZOO_1 şaquli oxu üzrə yönəlmişdir. Mizin üzərinə koordinatları x və y olan M nöqtəsində P yükü qoyulmuşdur.

Oy oxu AB xəttinə paraleldir. Hər bir ayağın döşəməyə etdiyi təzyiqi tapmalı (Şək. 4.3).

Həlli.

Mizə verilmiş $\bar{G}$ və $\bar{P}$ qüvvələrindən başqa döşəmənin (rabitənin) A , B və C dayaqlarına göstərdiyi $\bar{N}_A$, $\bar{N}_B$ və $\bar{N}_C$ reaksiya qüvvələri təsir edir. Bu reaksiya qüvvələri döşəməyə perpendikulyar istiqamətdə yuxarıya doğru yönəlir (Şək. 4.4). Beləliklə, miz fəzada yerləşən və bir-birinə paralel olan $\bar{G}$, $\bar{P}$, $\bar{N}_A$, $\bar{N}_B$ və $\bar{N}_C$ qüvvələr sistemi təsiri altında müvazinətdə qalır. Odur ki, şəkildə göstərilmiş x , y , z koordinat oxlarına nəzərən (4.1) müvazinət tənliklərinə əsasən yazırıq:

$$\sum F_{iz} = -G - P + N_A + N_B + N_C = 0,$$

$$\sum m_x(\bar{F}_i) = -P \cdot y - N_A \cdot \frac{AB}{2} + N_B \cdot \frac{AB}{2} = 0,$$

$$\sum m_y(\bar{F}_i) = P \cdot x - N_A \cdot O_1D - N_B \cdot O_1D + N_C \cdot O_1C = 0.$$

Şəkindən əvvəlcə ABC üçbucağının CD hündürlüyünü tapırıq:

$$CD = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Onda } O_1D = \frac{1}{3}CD = \frac{a\sqrt{3}}{6}, O_1C = \frac{2}{3}CD = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Sonra birinci tənlikdən tapırıq:

$$N_A + N_B = G + P - N_C.$$

Bu ifadəni üçüncü tənlikdə yerinə yazsaq, alırıq:

$$Px - O_1D(G + P - N_C) + N_C \cdot O_1C = 0$$

Buradan naməlum N_C reaksiya qüvvəsini tapırıq:

$$N_C = \frac{-Px + O_1D(G + P)}{O_1D + O_1C} = \frac{G + P}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{a} \cdot P.$$

Daha sonra birinci tənlikdən N_A qüvvəsini tapıb, ikincidə yerinə yazaraq, oradan N_B reaksiya qüvvəsini tapırıq:

$$N_B = \frac{G + P}{3} + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{3}x\right) \frac{G}{a}.$$

Nəhayət, birinci tənlikdən naməlum N_A reaksiya qüvvəsini tapırıq:

$$N_A = \frac{G+P}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - y\right) \frac{G}{a}.$$

Mizin A , B və C ayaqlarının döşəməyə etdiyi təzyiq qüvvələri uyğun olaraq yuxarıda tapdığımız $\overline{N_A}$, $\overline{N_B}$ və $\overline{N_C}$ reaksiya qüvvələrinə qiymətcə bərabər olub, istiqamətcə əks tərəfə yönəlirlər, yəni

$$Q_A = N_A, Q_B = N_B, Q_C = N_C.$$

İndi isə müstəvi paralel qüvvələr sisteminin müvazinətinə aid məsələlərin həllinə baxaq.

Məsələ 4.3

Üzərində bucurqad bərkidilmiş C arabacığının vəziyyə-tindən asılı olaraq, AB körpü kranının relslərə göstərdiyi təzyiqləri tapmaq lazımdır. Arabacığın vəziyyətini, onun ortasının sol relsdən olan məsafəsinin körpünün ümumi uzunluğuna olan nisbəti ilə ifadə etməli. Körpünün ağırlığı $P = 60 \text{ kN}$, arabacığın qaldırılan yüklə birlikdə ağırlığı $P_1 = 40 \text{ kN}$ -dur (Şək. 4.5).

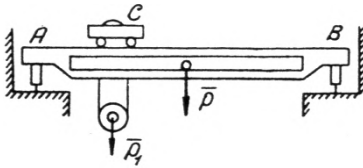
Həlli.

Körpü kranına verilmiş $\overline{P_1}$, $\overline{P}$, həmçinin A və B dayaqlarının (relslərinin) $\overline{N_A}$ və $\overline{N_B}$ reaksiya qüvvələri təsir edir (Şək. 4.6). Bu qüvvələr bir müstəvi üzərində

yerləşən paralel qüvvələr sistemidir. Odur ki, (4.2) müvazinət şərtlərinə əsasən şəkildən aşağıdakı müvazinət tənliklərini yazırıq:

$$\sum F_i = P + P_1 - N_A - N_B = 0,$$

$$\sum m_A(\bar{F}_i) = -P \cdot \frac{AB}{2} - P_1 \cdot AC + N_B \cdot AB = 0.$$



Şəkil 4.5



Şəkil 4.6

Əvvəlcə ikinci müvazinət tənliyindən naməlum N_B qüvvəsini tapırıq:

$$N_B = \frac{1}{AB} \left(P \cdot \frac{AB}{2} + P_1 \cdot AC \right) = \frac{P}{2} + P_1 \cdot \frac{AC}{AB}.$$

Burada $P = 60 \text{ kN}$, $P_1 = 40 \text{ kN}$ qiymətlərini yazıb və $n = \frac{AC}{AB}$ qəbul edərək alırıq:

$$N_B = \frac{60}{2} + 40n = 10(3 + 4n) \text{ kN}.$$

Bu qiyməti birinci tənlikdə yerinə yazıb, digər naməlum reaksiya qüvvəsini tapırıq:

$N_A = P + P_1 - N_B = 60 + 40 - 10(3 + 4n) = 10(7 - 4n)kN$.
 Körpü kranının A və B relslərinə göstərdiyi təzyiq qüvvələri uyğun olaraq yuxarıda tapdığımız $\overline{N_A}$ və $\overline{N_B}$ reaksiya qüvvələrinə qiymətcə bərabər olub, istiqamətcə əks tərəflərə yönəliirlər, yəni

$$Q_A = N_A = 10(7 - 4n)kN, Q_B = N_B = 10(3 + 4n)kN.$$

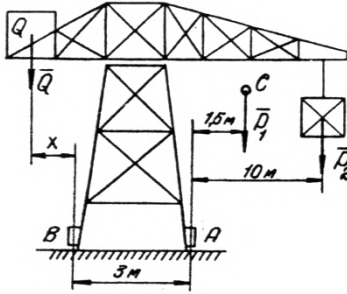
Məsələ 4.4

Rels kranının ağırlığı əks yüksüz $P_1 = 500$ kN-a bərabərdir. Onun ağırlıq mərkəzi sağ relsdən keçən şaquli müstəvidən $1,5$ m məsafədə olan C nöqtəsində yerləşir. Kran arabacığının qaldırıcı qüvvəsi $P_2 = 250$ kN-dur, kranın çıxışı 10 m-dir.

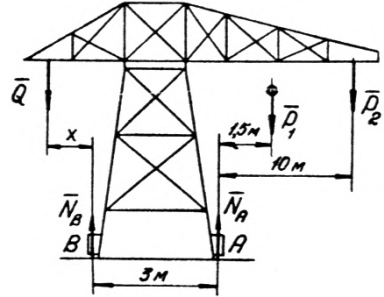
Kranın həm yüklənmiş, həm də yüklənməmiş bütün vəziyyətlərində aşmaması üçün ən kiçik Q əksyükünü və əksyükün ağırlıq mərkəzinin sol relsdən keçən şaquli müstəvidən olan ən böyük x məsafəsini tapmalı. Arabacığın öz ağırlığını nəzərə almamalı (Şək. 4.7).

Həlli.

Rels kranına onun iş vaxtında verilmiş $\overline{P_2}$ qüvvəsi, kranın $\overline{P_1}$ ağırlıq qüvvəsi, $\overline{Q}$ əksyükün ağırlıq qüvvəsi və A və B relslərinin $\overline{N_A}$ və $\overline{N_B}$ reaksiya qüvvələri təsir edir (Şək. 4.8). Bu qüvvələr eyni müstəvi üzərinə yerləşən paralel qüvvələr sistemi olduğu üçün yenə də (4.2) müvazinət şərtlərindən istifadə edirik. Əvvəlcə kranın yüklənmiş halına baxaq.



Şəkil 4.7



Şəkil 4.8

Bu halda kran A nöqtəsi ətrafında aşağı bilər. Bu aşma anında B relsinin $\overline{N}_B$ reaksiya qüvvəsi sıfıra bərabər olacaq, yəni $N_B = 0$. Odur ki, krana təsir edən qalan $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{Q}$ və $\overline{N}_A$ qüvvələrinin A nöqtəsinə nəzərən momentlərinin cəbri cəmi sıfıra bərabər olmalıdır. Bundan başqa (4.2) müvazinət şərtlərinə əsasən həmin qüvvələrin cəbri cəmi də sıfıra bərabər olmalıdır. Buna əsasən aşağıdakı müvazinət tənliklərini yazırıq:

$$\sum F_i = P_1 + P_2 + Q - N_A = 0,$$

$$\sum m_A(\overline{F}_i) = -P_1 \cdot 1,5 - P_2 \cdot 10 + Q(3 + x) = 0.$$

Kran yüklənməmiş vəziyyətdə B nöqtəsi ətrafında aşağı bilər. Bu aşma anında onun A relsinin $\overline{N}_A$ reaksiya qüvvəsi sıfıra bərabər olur, yəni $N_A = 0$. Odur ki, bu halda krana təsir edən qalan $\overline{P}_1$, $\overline{Q}$ və $\overline{N}_B$ qüvvələrinin B nöqtəsinə nəzərən momentlərinin cəbri cəmi sıfıra bərabər olmalıdır. Bundan başqa, həmin qüvvələrin cəbri cəmi də sıfıra bərabər olmalıdır. Buna əsasən aşağıdakı müvazinət tənliklərini yazırıq:

$$\sum F_i = P_1 + Q - N_B = 0,$$

$$\sum m_A(\bar{F}_i) = -P_1 \cdot 4,5 + Qx = 0.$$

Bu tənliklərə daxil olan dörd naməlum N_A , N_B , Q və x kəmiyyətlərini tapmaq üçün əvvəlcə axırıncı tənlikdən tapırıq:

$$Qx = 4,5P_1 = 4,5 \cdot 500 = 2250 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Bu qiyməti ikinci tənlikdə yerinə yazıb, oradan naməlum Q qüvvəsini tapırıq:

$$Q = \frac{1}{3}(1,5P_1 + 10P_2 - Qx) + \frac{1}{3}(1,5 \cdot 500 + 10 \cdot 250 - 2250) = 333,3 \text{ kN}$$

Sonra naməlum x məsafəni tapırıq:

$$x = \frac{2250}{Q} = \frac{2250}{333,3} = 6,75 \text{ m}.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, birinci və üçüncü tənliklərdən naməlum N_A və N_B reaksiya qüvvələrini tapmaq olar.

V Fəsil. Müstəvi qüvvələr sistemi

Eyni müstəvi üzərində ixtiyari surətdə yerləşən qüvvələr sisteminə ixtiyari müstəvi qüvvələr sistemi deyilir. Müstəvi qüvvələr sisteminə ixtiyari qüvvələr sisteminin xüsusi halı kimi baxaraq, həmin sistemin bizə məlum olan (fəsil 2, (2.2) ifadəsi) müvazinət şərtlərindən istifadə edərək, aşağıdakı üç müvazinət şərtlərini alırıq:

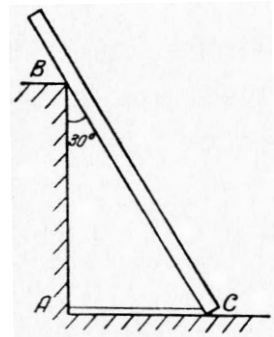
$$\sum F_{ix} = 0, \sum F_{iy} = 0, \sum m_O(\bar{F}_i) = 0 \quad (5.1)$$

Deməli, müstəvi qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün bu qüvvələrin təsir müstəvisi üzərində ixtiyari seçilmiş Oxy koordinat sisteminin x və y oxlarından hər biri üzərindəki proyeksiyalarının cəbri cəmi və bu müstəvi üzərində yerləşən hər hansı bir nöqtəyə nəzərən momentlərinin cəbri cəmi sıfıra bərabər olmalıdır.

İndi (5.1) müvazinət şərtlərindən istifadə edərək aşağıdakı məsələlərin həllinə baxaq.

Məsələ 5.1

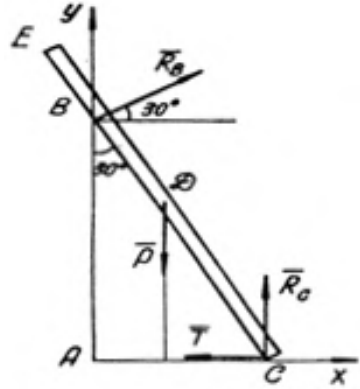
Ağırlığı 600 N və uzunluğu 4 m olan bircinsli tirin bir ucu hamar döşəmə üzərində olmaqla aradakı B nöqtəsi 3 m hündürlüyündə olan sütuna söykənir. Tir şaqulla 30° bucaq təşkil edir. Tir bu vəziyyətdə döşəməyə paralel olan AC ipi vasitəsilə saxlanılır. Sürtünməni nəzərə almadan ipin $\bar{T}$ gərilməsini, sütunun $\bar{R}_B$ və döşəmənin $\bar{R}_C$ reaksiyalarını tapmalı (Şək. 5.1).



Şəkil 5.1

Həlli.

Burada biz CE tirinin müvazinətinə baxırıq. Tirə onun D mərkəzində tətbiq olunmuş $\bar{P}$ ağırlıq qüvvəsi və ipin $\bar{T}$ gərilmə qüvvəsi təsir edir. Sütun və döşəmə birinci növ rabitə olduqlarından onların reaksiya qüvvələri uyğun olaraq B nöqtəsində tirə və C nöqtəsində döşəməyə perpendikulyar istiqamətdə yuxarıya doğru yönəlir. AC ipinin $\bar{T}$ gərilmə qüvvəsi ip dartıldığı üçün onun C nöqtəsindən A -ya doğru yönəlir. Bu qüvvələrin yerləşdiyi müstəvi üzərində Axy koordinat sistemini seçək (Şək. 5.2).



Şəkil 5.2

Şəkində göstərilmiş tirə təsir edən $\bar{P}$, $\bar{R}_B$, $\bar{R}_C$ və $\bar{T}$ qüvvələrinin seçilmiş x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını və həmin qüvvələrin C nöqtəsinə nəzərən momentlərini tapıb, (4.1) müvazinət şərtlərinə əsasən alırıq:

$$\sum F_{ix} = R_B \cos 30^\circ - T = 0, \quad (5.2)$$

$$\sum F_{iy} = -P + R_B \cos 60^\circ + R_C = 0 \quad (5.3)$$

$$\sum m_C(F_i) = P \cdot CD \cos 60^\circ - R_B \cdot BC = 0. \quad (5.4)$$

$$\text{Burada } BC = \frac{AB}{\cos 30^0} = \frac{3}{0,86} = 3,49m, CD = \frac{CE}{2} 2m.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, moment tənliyini adətən elə nöqtəyə nəzərən yazırlar ki, həmin nöqtədə daha çox sayda naməlum qüvvələrin təsir xətləri kəsişsin. Onda həmin na-məlum qüvvələr moment tənliyində iştirak etməz və tənlik sadələşər. Odur ki, belə nöqtə olaraq C nöqtəsini qəbul edirik.

İndi isə yuxarıdakı tənlikləri həll edək. Əvvəlcə (5.4) tənliyindən R_B qüvvəsini tapırıq:

$$R_B = \frac{P \cdot CD \cos 60^0}{BC} = \frac{600 \cdot 2 \cdot 0,5}{3,49} = 173N.$$

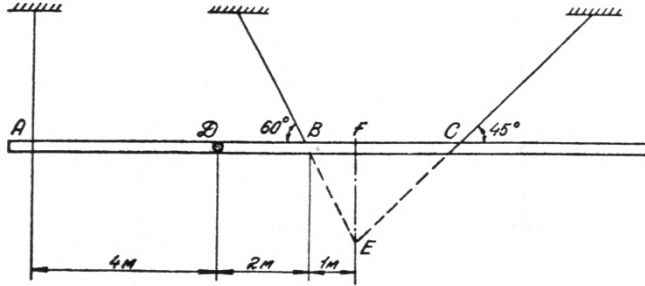
Sonra (5.2) tənliyindən T qüvvəsini və (5.3)-dən R_C qüvvəsini tapırıq:

$$T = R_B \cos 30^0 = 173 \cdot 0,86 = 150N,$$

$$R_C = P - R_B \cos 60^0 = 600 - 173 \cdot 0,5 = 513N.$$

Məsələ 5.2

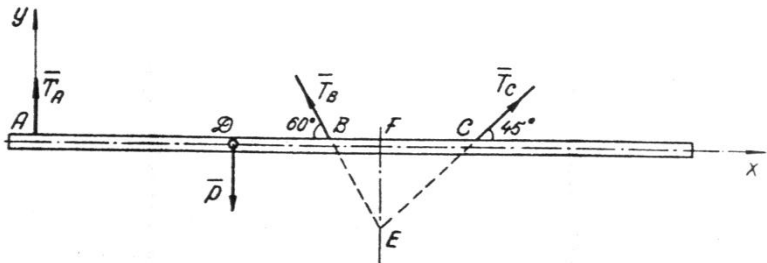
Körpünü quraşdıran vaxt körpü fermasının ABC hissəsini, şəkildə göstərilən kimi yerləşmiş üç kanat vasitəsilə qaldırmaq lazım gəlir. Fermanın bu hissəsinin ağırlığı 42 kN -dur, ağırlıq mərkəzi isə D nöqtəsindədir. $AD=4 \text{ m}$, $DB=2 \text{ m}$, $BF=1 \text{ m}$, AC xətti üfüqi vəziyyətdədir, kanatların gərilməsini tapmalı (Şək. 5.3).



Şəkil 5.3

Həlli.

Məsələni həll etmək üçün ABC fermasına təsir edən qüvvələri göstərək: Fermaya onun $\bar{P}$ ağırlıq qüvvəsi, kanat-ların $\bar{T}_A$, $\bar{T}_B$ və $\bar{T}_C$ gərilmə qüvvələri (reaksiya qüvvələri) təsir edir (şək. 4.4). Şəkildən göründüyü kimi, kanatlar tirin ağırlığı altında dartılır. Odur ki, $\bar{T}_A$, $\bar{T}_B$ və $\bar{T}_C$ qüvvələri A , B və C nöqtələrində tətbiq olunmaqla kanatlar boyunca yuxarıya doğru yönəliirlər. Başlanğıcı A nöqtəsində yerləşən Axy koordinat sistemini elə seçək ki, x oxu fermanın AC hissəsi istiqamətində yönəlsin.



Şəkil 5.4

Müvazinətdə olan $\overline{P}$, $\overline{T}_A$, $\overline{T}_B$ və $\overline{T}_C$ qüvvələrinin x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını və şəkildə göstərilmiş E nöqtəsinə nəzərən momentləri tapıb, (5.1) müvazinət şərtlərinə əsasən alırıq:

$$\sum F_{ix} = -T_B \cos 60^\circ + T_C \cos 45^\circ = 0, \quad (5.5)$$

$$\sum F_{iy} = -P + T_A + T_B \cos 30^\circ + T_C \cos 45^\circ = 0, \quad (5.6)$$

$$\sum m_E(\overline{F}_i) = P \cdot 3 - T_A \cdot 7 = 0. \quad (5.7)$$

Bu tənliklər sistemini həll edək. Əvvəlcə (5.7) tənliyindən T_A qüvvəsini tapaq:

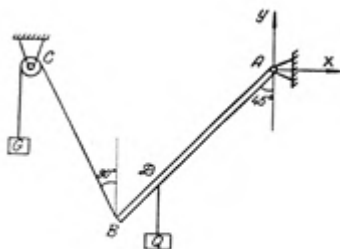
$$T_A = \frac{P \cdot 3}{7} = \frac{42 \cdot 3}{7} = 18 \text{ kN}.$$

Daha sonra (5.5) və (5.6) tənliklərindən naməlum T_B və T_C qüvvələrini tapırıq:

$$T_B = 17,57 \text{ kN}, T_C = 12,43 \text{ kN}.$$

Məsələ 5.3

Ağırlığı $P=100 \text{ N}$ olan bir-cinsli AB tiri A oynaq vasitəsilə divara bağlanaraq, C blokundan aşırılmış tros vasitəsilə şaqulla 45° bucaq təşkil edən vəziyyətdə saxlanılır. Bu blok G yükünü saxlayır. Trosun BC hissəsi şaqulla 30° bucaq təşkil edir.



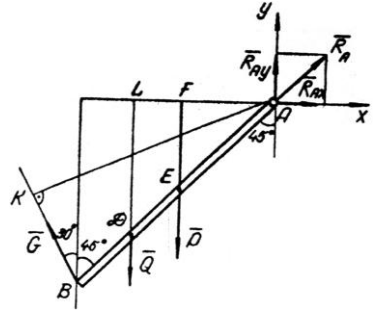
Şəkil 5.5

Tirin D nöqtəsindən $Q=200\text{ N}$ yük asılmışdır.

Blokda sürtünməni nəzərə almadan G yükünün ağırlığını və A oynaqının reaksiyasını tapmalı $BD = \frac{1}{4} AB$ (Şək. 5.5).

Həlli.

Məsələni həll etmək üçün AB tirinin müvazinətinə baxaq. Tirə onun E ağırlıq mərkəzində tətbiq olunmuş $\bar{P}$ ağırlıq qüvvəsi, C blokundan aşırılmış BC ipi istiqamətində B nöqtəsindən C -yə doğru yönələn $\bar{G}$ qüvvəsi, D nöqtəsindən asılmış Q yükünün $\bar{Q}$ ağırlıq qüvvəsi və ikinci növ A oynaq rabitəsinin şəkildə göstərilməmiş $\bar{R}_A$ reaksiya qüvvəsi təsir edir. $\bar{R}_A$ qüvvəsini şəkildə göstərilmiş x və y oxları istiqamətində $\bar{R}_{Ax}$ və $\bar{R}_{Ay}$ toplananlarına ayırırıq (Şək. 5.6).



Şəkil 5.6

Şəkildən görürük ki, bu qüvvələr eyni müstəvi üzərində yerləşir, yəni müstəvi qüvvələr sistemi təşkil edir. Həmin qüvvələrin x və y oxları üzərinə proyeksiyalarını və onların A nöqtəsinə nəzərən momentlərini tapıb (5.1) müvazinət tənliklərinə əsasən alırıq:

$$\sum F_{ix} = R_{Ax} - G \cos 60^\circ = 0, \quad (5.8)$$

$$\sum F_{iy} = -P - Q + R_{Ay} + G \cos 30^0 = 0, \quad (5.9)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_i) = P \cdot AF + Q \cdot AL - G \cdot AK = 0, \quad (5.10)$$

Şəkildən AK , AL və AF məsafələrini AB məsafəsindən asılı tapırıq:

$$AK = AB \sin 75^0 = 0,97 AB,$$

$$AL = AD \sin 45^0 = \frac{3}{4} AB \sin 45^0 = 0,53 AB,$$

$$AF = 0,5 AB \sin 45^0 = 0,3535 AB.$$

Əvvəlcə (5.10) tənliyindən G qüvvəsini tapaq:

$$G = \frac{P \cdot AF + Q \cdot AL}{AK} = \frac{200 \cdot 0,35 \cdot AB + 200 \cdot 0,53 \cdot AB}{0,97 \cdot AB} = 146 N.$$

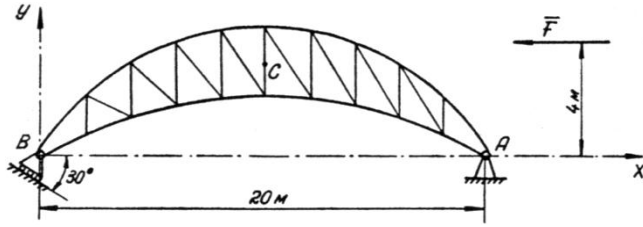
Sonra (5.8) və (5.9)-cu tənliklərdən naməlum R_{Ax} və R_{Ay} qüvvələrinin qiymətlərini tapırıq:

$$R_{Ax} = G \cos 60^0 = 73 N, R_{Ay} = P + Q - G \cos 30^0 = 173 N.$$

Məsələ 5.4

Tağ fermanın A nöqtəsindən tərپənмəz dayaq oynaqı, B nöqtəsində isə müstəvisi üfüq ilə 30° bucaq əmələ gətirən hamar tərپənən dayaqı vardır. AB aşırımı $20 m$ -dir. Fermanın qar ilə birlikdə ağırlığı $100 kN$ -dur. Fermanın ağırlıq mərkəzi AB aşırımının ortasının yuxarı C nöqtəsində yerləşir. Külək qüvvələri təzyiqinin $\bar{F}$ əvəzləyicisi $20 kN$ -a bərabər olub, AB -yə paralel üfüqi istiqamətdə və ondan $4 m$ məsafədə təsir edir.

Dayaq reaksiyalarını tapmalı (Şək. 5.7).



Şəkil 5.7

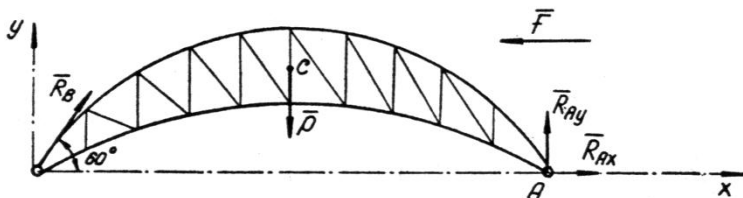
Həlli.

Məsələni həll etmək üçün tağ fermasının müvazinətinə baxaq. Fermaya C nöqtəsində tətbiq olunmuş onun $\bar{P}$ ağırlıq qüvvəsi, küləyin $\bar{F}$ təzyiq qüvvəsi, sürüşən B dayağının $\bar{R}_B$ və A oynaq dayağının $\bar{R}_A$ reaksiya qüvvəsi təsir edir (Şək. 5.8). $\bar{R}_B$ qüvvəsi B sürüşən dayaq müstəvisinə perpendikulyar istiqamətdə yönəlir (B dayağı birinci növ rabitədir). A oynaq dayağı ikinci növ rabitə olduğu üçün onun $\bar{R}_A$ reaksiya qüvvəsinin istiqaməti məlum deyildir. Odur ki, bu qüvvəni şəkildə göstərilmiş x və y oxları boyunca yönəlmiş $\bar{R}_{Ax}$ və $\bar{R}_{Ay}$ toplananlarına ayırırıq. Beləliklə, $\bar{P}$, $\bar{F}$, $\bar{R}_{Ax}$, $\bar{R}_{Ay}$ və $\bar{R}_B$ müstəvi qüvvələr sistemi alınır. Bu qüvvələrin x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını və onların A nöqtəsinə nəzərən momentlərini tapıb (5.1) müvazinət şərtlərinə əsasən aşağıdakı tənlikləri alırıq:

$$\sum F_{ix} = -F + R_{Ax} + R_B \cos 60^\circ = 0, \quad (5.11)$$

$$\sum F_{iy} = -P + R_{Ay} + R_B \cos 30^\circ = 0, \quad (5.12)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_i) = P \cdot 10 + F \cdot 4 - R_B \cos 30^\circ \cdot 20 = 0 \quad (5.13)$$



Şəkil 5.8

Əvvəlcə (4.13) tənliyindən R_B qüvvəsini tapırıq:

$$R_B = \frac{P \cdot 10 + F \cdot 4}{20 \cos 30^\circ} = \frac{100 \cdot 10 + 20 \cdot 4}{20 \cdot 0,86} = 62,4 \text{ kN}$$

Sonra (5.11) və (5.12) tənliklərindən bilavasitə $\bar{R}_{Ax}$ və $\bar{R}_{Ay}$ qüvvələrinin qiymətlərini tapırıq:

$$R_{Ax} = F - R_B \cos 60^\circ = 20 - 62,4 \cdot 0,5 = -11,2 \text{ kN},$$

$$R_{Ay} = P - R_B \cos 30^\circ = 100 - 62,4 \cdot 0,86 = 46 \text{ kN}.$$

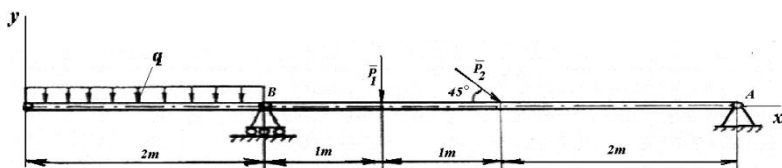
Qeyd etmək lazımdır ki, burada $\bar{R}_{Ax}$ qüvvəsinin qiyməti mənfi işarə ilə alınır. Bu o deməkdir ki, $\bar{R}_{Ax}$ toplanan reaksiya qüvvəsi əvvəlcədən şəkildə göstərilmiş istiqamətin əksinə yönəlmişdir.

Məsələ 5.5

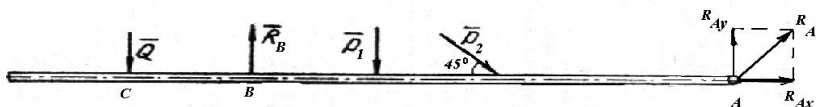
İki topa qüvvə və müntəzəm paylanmış yük təsiri altında olan tirin A və B dayaqlarının reaksiyalarını təyin etməli (Şəkil 5.9). Verilir: $P_1=8\text{kN}$, $P_2=6\text{kN}$, $q=3\text{kN/m}$.

Həlli.

Burada biz AB tirinin müvazinətinə baxırıq: Tirə $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ topa qüvvələri, müntəzəm paylanmış yükün C mərkəzində tətbiq olunmuş $\overline{Q}$ əvəzləyicisi ($Q = q \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ kN}$) və tirin A və B dayaqlarının $\overline{R}_A$ və $\overline{R}_B$ reaksiya qüvvələri təsir edir (şək. 5.10). Şəkildən göründüyü kimi, B dayağı birinci növ rabitədir. Bu rabitənin reaksiya qüvvəsi sürüşən dayaq müstəvisinə perpendikulyar istiqamətdə yuxarıya doğru yönələcəkdir. A dayağı isə ikinci növ rabitə olduğu üçün onun $\overline{R}_A$ reaksiya qüvvəsinin istiqaməti əvvəlcədən məlum deyildir. Ona görə də bu reaksiya qüvvəsini şəkildə göstərilmiş x və y oxları istiqamətində yönəlmiş $\overline{R}_{Ax}$ və $\overline{R}_{Ay}$ toplananlarına ayırırıq.



Şəkil 5.9



Şəkil 5.10

(5.1) müvazinət şərtlərinə əsasən, AB tirinə təsir edən $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{Q}$, $\overline{R}_{Ax}$, $\overline{R}_{Ay}$ və $\overline{R}_B$ qüvvələrinin x və y oxları

üzərindəki proyeksiyalarının cəbri cəmi və A nöqtəsinə nəzərən momentlərinin cəbri cəmi ayrılıqda sıfıra bərabər olmalıdır. Buna əsasən yazırıq:

$$\sum F_{ix} = P_2 \cos 45^\circ + R_{Ax} = 0, \quad (5.14)$$

$$\sum F_{iy} = -Q + R_B - P_1 - P_2 \cos 45^\circ + R_{Ay} = 0, \quad (5.15)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_i) = P_1 \cdot 3 + P_2 \cos 45^\circ \cdot 2 + Q \cdot 5 - R_B \cdot 4 = 0, \quad (5.16)$$

Əvvəlcə (5.16) tənliyindən R_B qüvvəsini tapırıq:

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{1}{4}(P_1 \cdot 3 + P_2 \cos 45^\circ \cdot 2 + Q \cdot 5) = \\ &= \frac{1}{4}(8 \cdot 3 + 6 \cdot 0,707 \cdot 2 + 6 \cdot 5) = 15,6 \text{ kN}. \end{aligned}$$

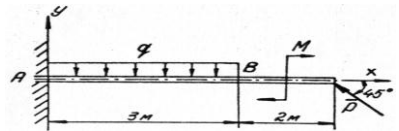
Sonra (5.14) tənliyindən R_{Ax} və (5.15) tənliyindən R_{Ay} qüvvələrini tapırıq:

$$R_{Ax} = -P_2 \cos 45^\circ = -6 \cdot 0,707 = 4,24 \text{ kN}$$

$$R_{Ay} = Q - R_B + P_1 + P_2 \cos 45^\circ = 6 - 15,6 + 8 + 6 \cdot 0,707 = 2,6 \text{ kN}$$

Məsələ 5.6

Müntəzəm paylanmış yük, topa qüvvə və cüt qüvvələr təsiri altında olan şəkildə təsvir edilmiş konsol tirin divara bərkidilmiş hissəsinin reaksiyalarını təyin etməli. $q = 1,5 \text{ kN/m}$, $M = 2 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $P = 4 \text{ kN}$ (Şək. 5.11).

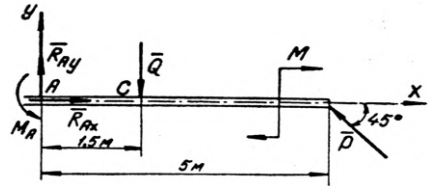


Şəkil 5.11

Həlli.

Şək. 5.12-də göstərilən tirə onun AB hissəsi üzrə müntəzəm paylanmış yükün C mərkəzində tətbiq olunmuş $\bar{Q}$ əvəzləyici ($Q = q \cdot 3 = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ kN}$), cüt qüvvələrin M momenti, $\bar{P}$ topa qüvvəsi və A dayağının $\bar{R}_A$ reaksiya qüvvəsi təsir edir.

Tirin A nöqtəsində sərt bərkidildiyi divar üçüncü növ rabitədir. Bu rabitənin $\bar{R}_A$ reaksiya qüvvəsinin heç bir elementi məlum deyildir. Ona görə də bu qüvvəni A nöqtəsində tətbiq olunmuş və x , y oxları boyunca yönəlmiş $\bar{R}_{Ax}$ və $\bar{R}_{Ay}$ naməlum toplanan qüvvələr və momenti M_A olan cüt qüvvə ilə əvəz edirik.



Şəkil 5.12

Şəkildə göstərilən bu müstəvi qüvvələr sisteminin müvazinət tənliklərini yazaq. Həmin qüvvələrin (5.1) müvazinət şərtlərinə əsasən x və y oxları üzərindəki proyeksiyaların və A nöqtəsinə nəzərən momentlərinin cəbri cəmi ayrılıqda sıfıra bərabər olmalıdır:

$$\sum F_{ix} = -P \cos 45^\circ + R_{Ax} = 0, \quad (5.17)$$

$$\sum F_{iy} = P \cos 45^\circ - Q + R_{Ay} = 0, \quad (5.18)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_i) = P \cos 45^\circ \cdot 5 - Q \cdot 1,5 - M - M_A = 0, \quad (5.19)$$

Əvvəlcə (5.17) tənliyindən R_{Ax} qüvvəsini tapırıq:

$$R_{Ax} = P \cos 45^\circ = 4 \cdot 0,707 = 2,8 \text{ kN}.$$

Sonra (5.18) tənliyindən R_{Ay} qüvvəsini tapırıq:

$$R_{Ay} = -P \cos 45^\circ + Q = -4 \cdot 0,707 + 4,5 = 1,7 \text{ kN}.$$

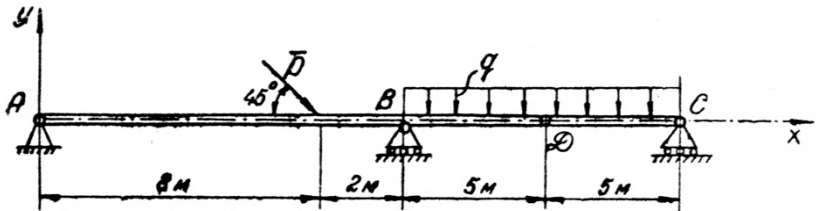
Daha sonra (5.19) tənliyindən

$$M_A = -P \cos 45^\circ \cdot 5 + Q \cdot 1,5 + M = -4 \cdot 0,707 \cdot 5 + 4,5 \cdot 1,5 + 2 = -5,35 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

tapırıq. M_A momentinin işarəsi mənfi olduğu üçün bu moment şəkildə göstərilən istiqamətin əksinə yönəlir.

Məsələ 5.7

Şəkildə yüklə birlikdə təsvir edilmiş iki hissədən ibarət olan tirin A , B , C dayaqlarının və D oynaqının reaksiyalarını təyin etməli. $P = 4 \text{ kN}$, $q = 2 \text{ kN/m}$ (Şək. 5.13).

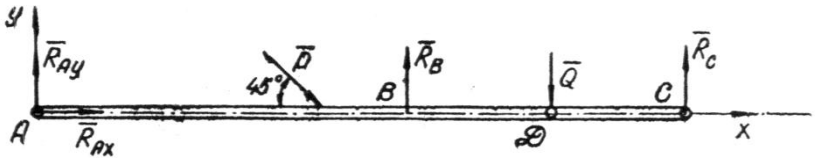


Şəkil 5.13

Həlli.

İki hissədən ibarət olan AC tirinin müvazinətinə baxaq. Tirə topa $\bar{P}$ qüvvəsi, müntəzəm paylanmış yükün D nöqtəsindən keçən şaquli xətt üzərində yerləşən ağırlıq

mərkəzində tətbiq olunmuş $\bar{Q}$ əvəzləyicisi ($Q = q \cdot 10 = 2 \cdot 10 = 20 \text{ kN}$), sürüşən B və C dayaqlarının müstəvilərinə perpendikulyar olan $\bar{R}_B$ və $\bar{R}_C$ reaksiya qüvvələri və həmçinin ikinci növ rabitə olan A dayaqının $\bar{R}_A$ reaksiya qüvvəsi təsir edir (Şək. 5.14). $\bar{R}_A$ qüvvəsinin istiqaməti məlum olmadığı üçün onu şəkildə göstərilmiş x və y oxları boyunca yönəlmiş $\bar{R}_{Ax}$ və $\bar{R}_{Ay}$, $\bar{R}_B$ və $\bar{R}_C$ qüvvələri vardır. Məlum olduğu kimi, bu qüvvələr sistemi üçün üç müvazinət tənliyi yazmaq olar. Odur ki, həmin tənliklərdən dörd naməlum qüvvəni tapmaq mümkün deyildir. Ona görə də bu məsələni həll etmək üçün AC tirini D oynaqının ayırdığı AD və DC hissələrindən birinin də ayrılıqda müvazinətinə baxırıq.



Şəkil 5.14

Əvvəlcə bütöv AC tirinin müvazinətinə baxaq. Bu tirə təsir edən yuxarıda qeyd etdiyimiz qüvvələrin şəkildə göstərilmiş x və y oxları üzərinə proyeksiyalarını və həmin qüvvələrin A nöqtəsinə nəzərən momentlərini taparaq (5.1) müvazinət şərtlərinə əsasən aşağıdakı tənlikləri yazırıq:

$$\sum F_{ix} = P \cos 45^\circ + R_{Ax} = 0, \quad (5.20)$$

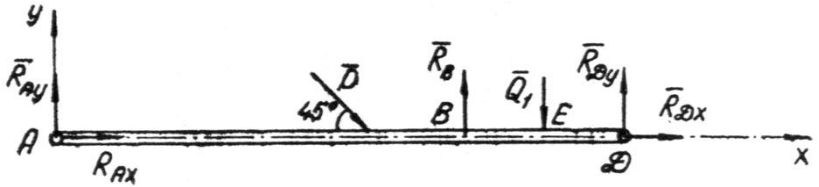
$$\sum F_{iy} = -P \cos 45^\circ - Q + R_{Ay} + R_B + R_C = 0, \quad (5.21)$$

$$\sum m_A(F_i) = -P \cos 45^\circ \cdot 8 - Q \cdot 15 + R_B \cdot 10 +$$

$$+ R_C \cdot 20 = 0. \quad (5.22)$$

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, bu üç tənliyə dörd naməlum R_{AX} , R_{AY} , R_B və R_C qüvvələri daxildir.

Bu qüvvələri tapmaq üçün indi tirin AD hissəsinin müvazinətinə baxaq (Şək. 5.15). Bu hissəyə verilmiş $\bar{P}$ qüvvəsi, tirin BD hissəsi üzərində müntəzəm paylanmış yükün E ortasında tətbiq olunmuş $\bar{Q}_1$ əvəzləyicisi ($Q_1 = q \cdot BD = 2 \cdot 5 = 10 \text{ kN}$), A və B dayaqlarının $\bar{R}_{AX}$, $\bar{R}_{AY}$ və $\bar{R}_B$ reaksiya qüvvələri və nəhayət, tirin DC hissəsinin AD hissəsinə etdiyi $\bar{R}_D$ reaksiya qüvvəsi təsir edəcəkdir. $\bar{R}_D$ qüvvəsinin istiqaməti məlum olmadığı üçün (D oynağı ikinci növ rabitədir) onu da x və y oxları boyunca yönəlmiş



Şəkil 5.15

$\bar{R}_{DX}$ və $\bar{R}_{DY}$ toplananlarına ayırırıq. Bu müvazinətdə olan qüvvələr sistemi üçün (tirin AD hissəsi üçün) (5.1) şərtlərinə əsasən aşağıdakı müvazinət tənliklərini yazırıq:

$$\sum F_{ix} = P \cos 45^\circ + R_{Ax} + R_{Dx} = 0, \quad (5.23)$$

$$\sum F_{iy} = -P \cos 45^\circ - Q_1 + R_{Ay} + R_B = 0, \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \sum m_A(F_i) = & -P \cos 45^\circ \cdot 8 - Q_1 \cdot 12,5 + \\ & + R_B \cdot 10 + R_{Dy} \cdot 15 = 0, \end{aligned} \quad (5.25)$$

Göründüyü kimi, (5.20)÷(5.25) altı sistem tənliklərinə altı naməlum R_{AX} , R_{AY} , R_B , R_C , R_{DX} və R_{DY} qüvvələri daxildir. Odur ki, bu naməlum qüvvələri həmin tənliklərdən tapa bilərik.

Əvvəlcə (5.20) tənliyindən R_{AX} qüvvəsini tapaq:

$$R_{Ax} = -P \cos 45^\circ = -4 \cdot 0,707 = -2,828 \text{ kN}.$$

Sonra (5.23) tənliyindən R_{DX} qüvvəsini tapırıq:

$$R_{Dx} = -P \cos 45^\circ - R_{Ax} = -4 \cdot 0,707 + 2,828 = 0$$

Nəhayət, (5.21), (5.22), (5.24) və (5.25) tənliklərini birlikdə həll edərək, qalan naməlum qüvvələri tapırıq:

$$R_{Ay} = -4,4 \text{ kN}; R_B = 22,2 \text{ kN}; R_C = 5 \text{ kN}; R_{Dy} = 5 \text{ kN}.$$

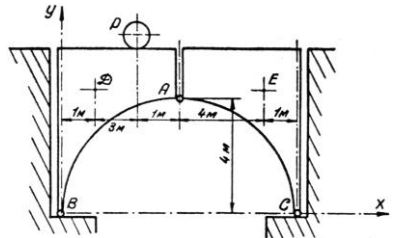
Qeyd etmək lazımdır ki, bütöv AC tirinin (5.20), (5.21) və (5.22) müvazinət tənliklərinin əvəzində tirin DC hissəsinin müvazinətinə baxaraq, həmin hissə üçün yazılmış müvazinət tənliklərindən də istifadə etmək olar. Onda tirin DC hissəsinə onun üzərində müntəzəm yükün ortasında tətbiq olunmuş $\overline{Q_2}$ əvəzləyicisi ($Q_2 = q \cdot DC = 2 \cdot 5 = 10 \text{ kN}$), C dayağının $\overline{R_C}$ reaksiya qüvvəsi və tirin atılmış AD hissəsinin $\overline{R'_D}$ reaksiya qüvvəsi təsir edəcəkdir. $\overline{R'_D}$ qüvvəsi təsirin əks təsirə bərabərlik prinsipinə əsasən qiymətcə $\overline{R_D}$ qüvvəsinə bərabər olub, istiqamətcə onun düz əksinə yönələəcəkdir. Odur ki, bu qüvvənin x və y oxları boyunca toplananları uyğun olaraq qiymətcə R_{DX} və R_{DY} qüvvələrinə bərabər olub, istiqamətcə onların əksinə yönələəcəkdir. Buna əsasən yazı bilərik:

$$R'_{Dx} = R_{Dx}, R'_{Dy} = R_{Dy}.$$

Aydındır ki, bütöv tirin AD və DC hissələri üçün yazılmış uyğun müvazinət tənliklərini toplasaq, həmin tənliklərə daxil olan R_{Dx} , R_{Dy} , R'_{Dx} və R'_{Dy} qüvvələri islah olunar. Nəticədə bütöv AC tiri üçün yazılmış (5.20), (5.21) və (5.22) müvazinət tənlikləri alınar.

Məsələ 5.8

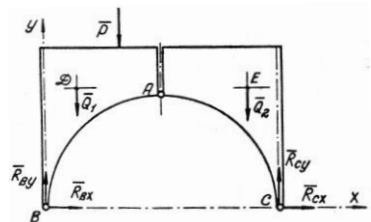
Körpü iki hissədən ibarətdir. Bu hissələr bir-birinə A oynaqı vasitəsilə bağlanmış, sahil dayaqlarına isə B və C oynaqları vasitəsilə bərkidilmişdir. Körpünün hər bir hissəsinin ağırlığı 40 kN -dur, ağırlıq mərkəzləri isə D və E nöqtələrindədir. Körpünün üzərinə $P=20 \text{ kN}$ yük qoyulmuşdur. Ölçüləri şəkildə göstərilmişdir. A oynaqındakı təzyiqi, eləcə də B və C nöqtələrində reaksiyaları tapmalı (Şək. 5.16).



Şəkil 5.16

Həlli.

Yuxarıdakı məsələdə olduğu kimi bu məsələni həll etmək üçün yenə də bütöv körpünün və onun A oynaqının ayırdığı AB və AC hissələrindən birinin müvazinətinə baxırıq. Əvvəlcə bütöv körpünün müvazinətinə baxaq.



Şəkil 5.17

Bütöv körpüyə onun göstərilən hissələrinin D və E nöqtələrində tətbiq olunmuş $\overline{Q_1}$ və $\overline{Q_2}$ ağırlıq qüvvələri, körpünün AB hissəsi üzərində yerləşən yükün $\overline{P}$ ağırlıq qüvvəsi, B və C dayaqlarının $\overline{R_B}$ və $\overline{R_C}$ reaksiya qüvvələri təsir edir (Şək. 5.17). Bu reaksiya qüvvələrini şəkildə göstərilmiş x və y oxları boyunca yönəlmiş R_{BX} , R_{BY} və R_{CX} , R_{CY} toplananlarına ayırırıq.

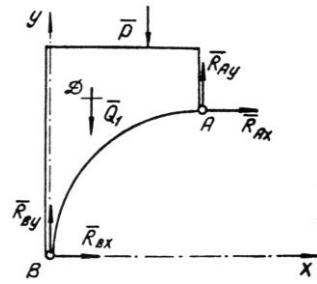
Bütöv körpüyə təsir edən bu müvazinətdə olan qüvvələrin şəkildə göstərilmiş x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını və B nöqtəsinə nəzərən momentlərini tapıb (5.1) şərtlərinə əsasən aşağıdakı müvazinət tənliklərini yazırıq:

$$\sum F_{ix} = R_{Bx} + R_{Cx} = 0, \quad (5.26)$$

$$\sum F_{iy} = -Q_1 - Q_2 - P + R_{By} + R_{Cy} = 0, \quad (5.27)$$

$$\sum m_A(\overline{F_i}) = -Q_1 \cdot 1 - P \cdot 4 - Q_2 \cdot 9 + R_{Cy} \cdot 10 = 0, \quad (5.28)$$

Bu üç tənliklər sisteminə naməlum dörd R_{Bx} , R_{By} , R_{Cx} və R_{Cy} qüvvələri daxildir. Onları tapmaq üçün körpünün AB hissəsinin də müvazinətinə baxaq. Bu hissəyə D nöqtəsində tətbiq olunmuş onun $\overline{Q_1}$ ağırlıq qüvvəsi, yükün $\overline{P}$ ağırlıq qüvvəsi, B dayaqının $\overline{R_{Bx}}$ və $\overline{R_{By}}$ reaksiya qüvvələri və nəhayət, AC hissəsinin A



Şəkil 5.18

nöqtəsində tətbiq olunmuş $\overline{R}_A$ reaksiya qüvvəsi (AC hissəsinin AB hissəsinə etdiyi təsir qüvvəsi) təsir edir (Şək. 5.18). Həmin reaksiya qüvvəsini şəkildə göstərilmiş x və y oxları boyunca $\overline{R}_{Ax}$ və $\overline{R}_{Ay}$ toplananlarına ayıraq. Körpünün baxdığımız AB hissəsinə təsir edən bu müvazinətdə olan qüvvələrin x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını və yenə də B nöqtəsinə nəzərən momentlərini tapıb (5.1) şərtlərinə əsasən aşağıdakı üç müvazinət tənliklərini yazırıq:

$$\sum F_{ix} = R_{Ax} + R_{Bx} = 0, \quad (5.29)$$

$$\sum F_{iy} = -Q_1 - P + R_{Ay} + R_{By} = 0, \quad (5.30)$$

$$\sum m_A(\overline{F}_i) = -Q_1 \cdot 1 - P \cdot 4 - R_{Ax} \cdot 4 + R_{Ay} \cdot 5 = 0, \quad (5.31)$$

Əvvəlcə (5.28) tənliyindən bilavasitə naməlum R_{Cy} qüvvəsini tapaq:

$$R_{Cy} = \frac{1}{10} (Q_1 + P \cdot 4 + Q_2 \cdot 9) = \frac{1}{10} (40 + 20 \cdot 4 + 40 \cdot 9) = 48 \text{ kN}.$$

Sonra (5.27) tənliyindən

$$R_{By} = Q_1 + Q_2 + P - R_{Cy} = 40 + 40 + 20 - 48 = 52 \text{ kN}.$$

Daha sonra (5.30) tənliyindən naməlum R_{Ay} qüvvəsini tapırıq:

$$R_{Ay} = Q_1 + P - R_{By} = 40 + 20 - 52 = 8 \text{ kN}.$$

Nəhayət, (5.31), (5.29) və (5.26) tənliklərindən ardıcıl olaraq qalan naməlum R_{Ax} , R_{Bx} və R_{Cx} qüvvələrini tapırıq:

$$R_{Ax} = \frac{1}{4} (-Q_1 - P \cdot 4 + R_{Ay} \cdot 5) = \frac{1}{4} (-40 - 20 \cdot 4 + 8 \cdot 5) = -20 \text{ kN},$$

$$R_{Bx} = -R_{Ax} = 20 \text{ kN}, R_{Cx} = -R_{Bx} = -20 \text{ kN}.$$

VI Fəsil. Sürtünmə qüvvəli müstəvi qüvvələr sistemi

Bu növ məsələləri həll edərkən müvazinətdə olan cismə təsir edən qüvvələr arasında sürtünmə qüvvələri də olur. Bu qüvvələr, məlum olduğu kimi, əsasən, iki növə ayrılır:

1. Sürüşmə sürtünmə qüvvəsi
2. Diyirlənmə sürtünmə qüvvəsi.

Sürüşmə sürtünmə qüvvəsi Amonton-Kulon qanununa əsasən qiymətcə cismin sürüşən dayaq müstəvisinin $\overline{N}$ normal reaksiya qüvvəsi ilə f sürüşmə sürtünmə əmsalının vurma hasilinə bərabərdir, istiqamətcə sürtünmə səthi üzrə cismin sürüşmə hərəkətinin əksinə yönəlir, yəni

$$F_s = fN . \quad (6.1)$$

Verilmiş qüvvələrin təsiri altında müəyyən səth üzrə diyirlənən yuvarlaq cismə onun fırlanma hərəkətinin əksinə yönəlmiş və diyirlənməyə müqavimət göstərən sürtünmə momenti təsir edir. Bu moment qiymətcə belə tapılır:

$$M_s = \delta N , \quad (6.2)$$

burada δ – diyirlənmə sürtünmə əmsalıdır və uzunluq vahidi ilə ölçülür.

Aşağıdakı məsələlərin həllinə baxaq.

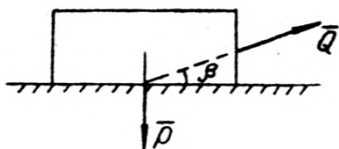
Məsələ 6.1

Ağırlığı P olan qutu, sürtünmə əmsalı f olan kələ-

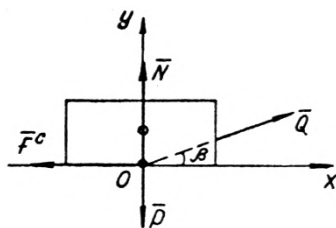
kötür üfüqi müstəvi üzərində yerləşir. Qutuya hansı β bucağı altında Q qüvvəsi təsir etməli və bu qüvvə nə qiymətdə olmalıdır ki, qutu Q -nün ən kiçik qiymətində hərəkətə gəlsin (Şək. 6.1)?

Həlli.

Qutu hərəkətə gələn anda ona müvazinətdə olan verilmiş $\bar{P}$ ağırlıq qüvvəsi, $\bar{Q}$ qüvvəsi, qutu ilə üfüqi sürüşmə müstəvisi arasında yaranan $\bar{F}_s$ sürtünmə qüvvəsi və bu müstəvinin normal $\bar{N}$ reaksiya qüvvəsi təsir edir (Şək. 6.2).



Şəkil 6.1



Şəkil 6.2

Bu qüvvələr O nöqtəsində tətbiq olunmuş müstəvi qüvvələr sistemidir. Məlum olduğu kimi, belə qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün onların şəkildə göstərilmiş iki x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarının cəbri cəmi sıfıra bərabər olmalıdır:

$$\sum F_{ix} = Q \cos \beta - F_s = 0, \quad (6.3)$$

$$\sum F_{iy} = Q \sin \beta - P + N = 0. \quad (6.4)$$

(5.4) tənliyindən naməlum N qüvvəsini tapırıq:

$$N = P - Q \sin \beta.$$

Onda (6.1) asılılığına əsasən $\overline{F_s}$ sürtünmə qüvvəsi belə ifadə olunar:

$$F_s = fN = f(P - Q \sin \beta).$$

Bu ifadəni (6.3) tənliyində yerinə yazıb, Q qüvvəsini β bucağından asılı olaraq tapırıq:

$$Q = \frac{fP}{\cos \beta + f \sin \beta}. \quad (6.5)$$

Şərtə görə Q qüvvəsinin minimum qiymətini tapmaq üçün bu qüvvənin dəyişən β bucağına görə törəməsini alıb, sıfıra bərabər edirik:

$$\frac{dQ}{d\beta} = \frac{(-\sin \beta + f \cos \beta) fP}{(\cos \beta + f \sin \beta)^2} = 0$$

Bu kəsrin sıfıra bərabər olması üçün onun surəti sıfıra bərabər olmalıdır. Odur ki, $(-\sin \beta + f \cos \beta) fP = 0$, buradan $\operatorname{tg} \beta = f$ tapırıq. Onda $\beta = \operatorname{arctg} f$.

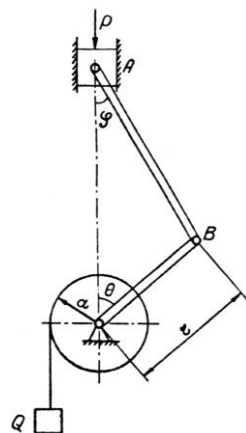
β bucağının bu qiymətini Q qüvvəsinin (6.5) ifadəsində yerinə yazıb, onun minimal qiymətini tapırıq:

$$Q = \frac{fP}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

Məsələ 6.2

Çarxqolu-sürüngəc mexanizminin şəkildə göstərilən

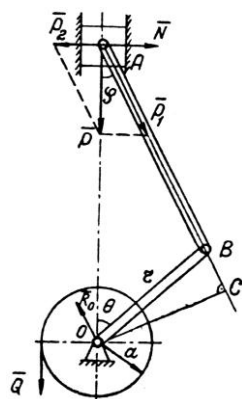
vəziyyətdə Q yükünü saxlayan P qüvvəsinin nə qədər olmasını təyin etməli. A sürüngəci ilə mexanizmin yönəldiciləri arasındakı sürtünməni və həmçinin onun bütün oynaqlarında və yastıqlarındakı sürtünmə qüvvələrini nəzərə almamalı. Əgər A sürüngəci ilə yönəldici arasındakı sürtünmə əmsalı f -ə bərabərdirsə, Q yükünün tərpənməz qalmasını təmin edən P qüvvəsinin minimal və maksimal qiyməti neçə olar (Şək. 6.3)?



Şəkil 6.3

Həlli.

Əvvəlcə məsələnin sürtünmə qüvvəsi olmayan haldakı birinci hissəsinin həllinə baxaq. Bunun üçün sürüngəcə təsir edən P qüvvəsinin AB sürgüqolu və istiqamətləndiriciyə perpendikulyar istiqamətdə iki $\overline{P_1}$ və $\overline{P_2}$ toplananlarına ayıraq (Şək. 6.4). Aydınır ki, $\overline{P_2}$ qüvvəsi sürüngəci istiqamətləndiricinin divarına sıxır, bunun nəticəsində divarın normal $\overline{N}$ reaksiya qüvvəsi əmələ gəlir. Təsirin əks təsirə bərabərlik prinsipinə görə bu qüvvələr qiymətcə bir-birinə bərabər olub, istiqamətcə bir düz xətt üzrə əks tərəflərə yönəliirlər. Odur ki, $\overline{P_2}$ və $\overline{N}$ qüvvələri bir-birini müvazinətləşdirir. Nəticədə AB sürgüqolu istiqamətində yönəlmiş bir $\overline{P_1}$ qüvvəsi qalır. Beləliklə,



Şəkil 6.4

baxdığımız mexanizmə aktiv $\overline{P}_1$ və $\overline{Q}$ qüvvələri və O dayacağının $\overline{R}_0$ reaksiya qüvvəsi təsir edir. Bu mexanizmin müvazinətdə olması üçün göstərilən qüvvələrin O nöqtəsinə nəzərən momentlərinin cəmi sifra bərabər olmalıdır, yəni

$$\sum m_O(\overline{F}_i) = -P_1 \cdot OC + Q \cdot a = 0. \quad (6.6)$$

Şəkildən tapırıq:

$$P_1 = \frac{P}{\cos \varphi}, OC = OB \sin(\varphi + \theta) = r \sin(\varphi + \theta).$$

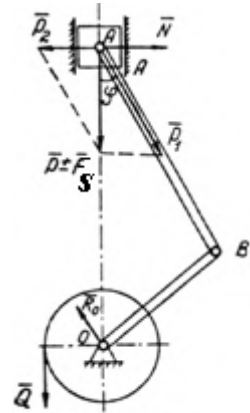
Bu qiymətləri (5.6) ifadəsində yerinə yazsaq, alırıq:

$$\frac{-Pr \sin(\varphi + \theta)}{\cos \varphi} + Qa = 0.$$

Buradan axtardığımız P qüvvəsini tapırıq:

$$P = \frac{Qa \cos \varphi}{r \sin(\varphi + \theta)}.$$

İndi məsələnin sürtünmə qüvvəsi olan ikinci hissəsinin həllinə baxaq. Aydındır ki, bu halda sürüngəcə verilmiş $\overline{P}$ qüvvəsi və $\overline{N}$ reaksiya qüvvəsindən başqa sürüngəclə istiqamətləndirici ara-sında əmələ gələn $\overline{F}_s$ sürtünmə qüvvəsi də təsir edir (şək. 6.5). Odur ki, məsələnin bu haldakı həlli yuxarıda baxdığımız həlli kimi olacaqdır, bu şərtlə ki,



Şəkil 6.5

burada $\overline{P}$ qüvvəsinin əvəzində $(P \pm F_s)$ qüvvəsi yazılsın.
 $\overline{F_s}$ qüvvəsi Anonton-Kulon qanunua əsasən belə tapılır:

$$F_s = fN = fP_2.$$

Burada $\overline{F_s}$ sürtünmə qüvvəsinin qarşısındakı müsbət (+) və mənfi (–) işarələri uyğun olaraq A sürüngəci mexanizmin müvazinət vəziyyətində yuxarıya və aşağıya doğru yerdəyişməyə cəhd etdiyi hallarda yazılmalıdır. Bu hallarda $\overline{P}$ qüvvəsi uyğun olaraq maksimum və minimum qiymətlər alır.

Onda bu hal üçün qurulmuş uyğun qüvvələr paraleloqramından tapırıq (Şək. 6.5).

$$P_2 = P_1 \sin \varphi, \quad P_1 = \frac{P \pm fP_2}{\cos \varphi} = \frac{P \pm fP_1 \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Buradan P_1 qüvvəsini tapaq:

$$P_1 = \frac{P}{\cos \varphi \pm f \sin \varphi}. \quad (6.7)$$

Məsələnin sonrakı həlli tamamilə onun birinci hissəsinin həlli kimi olur:

$$P_1 r \sin(\varphi + \theta) = Qa.$$

Burada (6.7) ifadəsini nəzərə alıb P qüvvəsini tapırıq:

$$P = \frac{Qa(\cos \varphi \pm f \sin \varphi)}{\sin(\varphi + \theta)}.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, bu məsələnin ikinci hissəsinin həllini aşağıdakı kimi də vermək olar.

Bunun üçün verilmiş çarxqolu-sürüngəc mexanizminin (bütöv sistemin) müvazinətinə baxaq. Bu mexanizmə aktiv $\bar{P}$ və $\bar{Q}$ qüvvələrindən başqa sürüngəclə istiqamətləndirici arasındakı sürtünmə qüvvəsi $\bar{F}_s$ və istiqamətləndiricinin normal $\bar{N}$ reaksiya qüvvəsi və O dayağının $\bar{R}_0$ reaksiya qüvvəsi təsir edir (Şək. 6.5).

Baxdığımız sistemin müvazinətdə olması üçün bu qüvvələrin O nöqtəsinə nəzərən momentlərinin cəbri cəmi sıfıra bərabər olmalıdır, yəni

$$\sum m_O(\bar{F}_i) = Q \cdot a - N \cdot OA = 0. \quad (6.8)$$

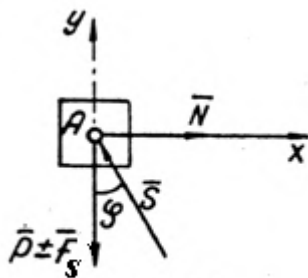
OA məsafəsini tapmaq üçün OAB üçbucağından sinuslar teoreminə əsasən yazırıq:

$$\frac{r}{\sin \varphi} = \frac{OA}{\sin(180^\circ - \varphi - \theta)} = \frac{OA}{\sin(\varphi + \theta)},$$

Buradan tapırıq:

$$OA = \frac{r \sin(\varphi + \theta)}{\sin \varphi}.$$

İndi reaksiya qüvvəsini tapaq. Bunun üçün sürüngəcin müvazinətinə baxaq. Bu sürüngəcə yuxarıda qeyd etdiyimiz $\bar{P}$, $\bar{N}$ və $\bar{F}_s$ qüvvələrindən başqa AB sürgüqolunun $\bar{S}$ reaksiya qüvvəsi



Şəkil 6.6

də təsir edir (Şək. 6.6). Bu qüvvələrin müvazinətdə olması üçün onların şəkildə göstərilən x və y oxları üzərində proyeksiyalarının cəbri cəmi sıfıra bərabər olmalıdır, yəni:

$$\sum F_{ix} = N - S \sin \varphi = 0, \quad \sum F_{iy} = -P + S \cos \varphi \pm fN = 0.$$

Bu ifadələrdən N qüvvəsini tapırıq:
$$N = \frac{P \operatorname{tg} \varphi}{1 \pm f \operatorname{tg} \varphi}.$$

OA məsafəsinin və N qüvvəsinin yuxarıda tapdığımız ifadələrini (6.8) tənliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$Qa - \frac{P \operatorname{tg} \varphi \sin(\varphi + \theta) r}{(1 \pm f \operatorname{tg} \varphi) \sin \varphi} = 0.$$

Buradan axtardığımız P qüvvəsini tapırıq:

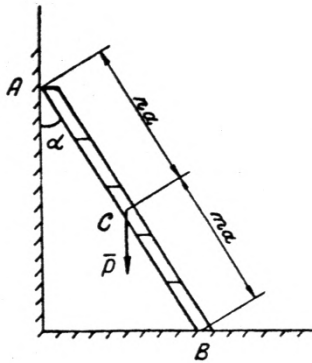
$$P = \frac{Qa}{r} \cdot \frac{\cos \varphi \pm f \operatorname{tg} \varphi}{\sin(\varphi + \theta)}.$$

Məsələ 6.3

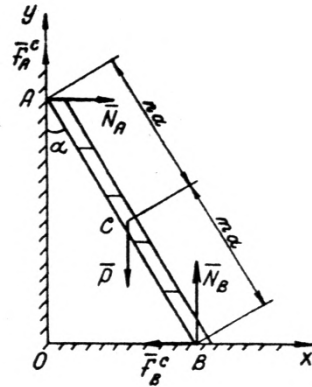
Aşağı ucu ilə döşəməyə dayanan AB nərdivanı yuxarı ucu ilə şaquli divara söykənmişdir. Nərdivanın divara sürtünmə əmsalı f_1 , döşəməyə isə f_2 -dir. Nərdivanın, onun üzərində duran adamla birlikdə ağırlığı P -dir və nərdi-vanın uzunluğunu $m \neq n$ nisbətində bölən C nöqtəsində tət-biq olunmuşdur. Nərdivanın müvazinət vəziyyətində divarla əmələ gətirdiyi ən böyük α bucağını, habelə bu bucağın qiyməti üçün divarın və döşəmənin reaksiyalarının N_A və N_B normal toplananlarını tapmalı (Şək. 6.7).

Həlli.

Nərdivana müvazinət vəziyyətində $\bar{P}$ ağırlıq qüvvəsi, divarın və döşəmənin $\bar{N}_A$ və $\bar{N}_B$ normal reaksiya qüvvələri və həmçinin $\bar{F}_A^s$ və $\bar{F}_B^s$ sürünmə qüvvələri təsir edəcəkdir (Şək. 6.8).



Şəkil 6.7



Şəkil 6.8

Nərdivan aşağıya doğru sürüşməyə cəhd etdiyi üçün bu qüvvələr şəkildə göstərilədiyi kimi uyğun olaraq nərdivanın A və B uclarının sürüşmə istiqamətinin əksinə yönələcəkdir. Nərdivana təsir edən $\bar{P}$, $\bar{N}_A$, $\bar{N}_B$, $\bar{F}_A^s$ və $\bar{F}_B^s$ qüvvələri müstəvi qüvvələr sistemi olduğu üçün həmin qüvvələrin müvazinət şərtlərinə əsasən şəkildə göstərilən x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarının və B nöqtəsinə nəzərən momentlərinin cəbri cəmi ayrılıqda sıfıra bərabər olmalıdır, yəni

$$\sum F_{ix} = N_A - F_B^s = 0, \quad \sum F_{iy} = -P + F_A^s + N_B = 0,$$

$$\sum m_B(F_i) = Pm \sin \alpha - N_A(na + ma) \cos \alpha - \\ - F_A^S(na + ma) \sin \alpha = 0.$$

(6.1) ifadəsinə əsasən $\bar{F}_A^S$ və $\bar{F}_B^S$ sürtünmə qüvvələrini tapırıq:

$$F_A^S = f_1 N_A, F_B^S = f_2 N_B.$$

Bu qiymətləri yuxarıdakı tənliklərdə yerinə yazsaq, alırıq:

$$\begin{aligned} N_A - f_2 N_B &= 0, \\ -P + f_1 N_A + N_B &= 0, \\ Pm \sin \alpha - N_A(n + m) \cos \alpha - f_1 N_A(n + m) \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Birinci iki tənlikdən naməlum N_A və N_B reaksiya qüvvələrini tapırıq:

$$N_A = \frac{f_2 P}{1 + f_1 f_2}, N_B = \frac{P}{1 + f_1 f_2}.$$

Bu qiymətləri (6.9)-da axıncı tənlikdə yerinə yazıb, α bucağını tapırıq: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{(m + n) f_2}{m - n f_1 f_2}.$

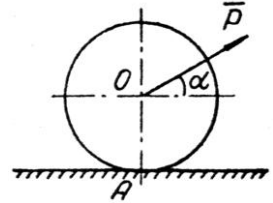
Məsələ 6.4

Diametri 60 sm və ağırlığı 300 N olan silindrik diyircəyin üfüqi müstəvi üzərində bərabər sürətlə diyirlənməsi üçün nə kimi P qüvvəsinin lazım olacağını tapmalı. Diyirlənmə sürtünmə əmsalı $\delta = 0,5$ sm, P

qüvvəsinin üfüqi müstəvi ilə əmələ gətirdiyi bucaq $\alpha = 30^\circ$ -yə bərabərdir (Şək. 6.9).

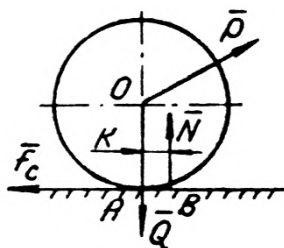
Həlli.

Diyircək üfüqi müstəvi üzərində bərabər sürətlə diyirləndikdə (onun O mərkəzi müntəzəm hərəkət etdikdə) ona O mərkəzində tətbiq olunmuş $\overline{Q}$ ağırlıq qüvvəsi, verilmiş $\overline{P}$ qüvvəsi və diyircəyin müstəvi ilə görüşdüyü A nöqtəsindən δ məsafəsində yerləşən B nöqtəsində tətbiq olunmuş müstəvinin normal $\overline{N}$ reaksiya qüvvəsi və $\overline{F}_s$ sürtünmə qüvvəsi təsir edəcəkdir (Şək. 6.10).

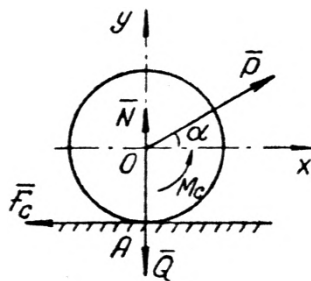


Şəkil 6.9

A nöqtəsində qiymətcə $\overline{N}$ qüvvəsinə bərabər, istiqamətcə ona paralel müvazinətdə olan iki $\overline{N}$ və $-\overline{N}$ qüvvələri tətbiq etsək, bunun nəticəsində A nöqtəsində tətbiq olunmuş $\overline{N}$ qüvvəsi və (6.2) ifadəsinə əsasən $M_s = \delta N$ sürtünmə momenti alınar (Şək. 6.11). Bu qüvvələr müvazinətdə olan müstəvi qüvvələr sistemi təşkil edir. Odur ki, həmin qüvvələrin şəkildə göstərilən x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını və A nöqtəsinə nəzərən momentlərini tapıb, aşağıdakı müvazinət tənliklərini yazırıq:



Şəkil 6.10



Şəkil 6.11

$$\sum F_{ix} = P \cos \alpha - F_s = 0,$$

$$\sum F_{iy} = P \sin \alpha - Q + N = 0,$$

$$\sum m_A(\bar{F}_i) = -P \cos \alpha \cdot R + M_s = 0.$$

Burada $R = 30 \text{ sm}$ – diyircəyin radiusudur.

Əvvəlcə ikinci tənlikdən N reaksiya qüvvəsini tapırıq:

$$N = Q - P \sin \alpha.$$

Bu ifadəni üçüncü tənlikdə yerinə yazıb naməlum P qüvvəsini tapırıq:

$$P = \frac{\delta Q}{R \cos \alpha + \delta \sin \alpha} = \frac{0,5 \cdot 300}{30 \cos 30^\circ + 0,5 \sin 30^\circ} = 5,72 N.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, birinci tənlikdən istifadə edərək $\bar{F}_s$ sürüşmə sürtünmə qüvvəsini tapa bilərik.

VII Fəsil. Bərk cismin ağırlıq mərkəzi

Bərk cismin ağırlıq qüvvəsinin tətbiq olunduğu nöqtəyə onun ağırlıq mərkəzi deyilir.

Mürəkkəb formalı bircins cismilərin ağırlıq mərkəzini tapmaq üçün onları ağırlıq mərkəzləri məlum olan sadə hissələrə ayırırıq. Onda mürəkkəb formalı cismin C ağırlıq mərkəzinin koordinatları aşağıdakı ifadələrdən tapıla bilər:

$$x_C = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i}; y_C = \frac{\sum V_i y_i}{\sum V_i}; z_C = \frac{\sum V_i z_i}{\sum V_i}. \quad (7.1)$$

burada V_i – mürəkkəb formalı cismi ayırdığımız sadə hissələrin həcmələri; x_i , y_i , z_i – həmin hissələrin ağırlıq mərkəzlərinin koordinatlarıdır.

Xüsusi halda verilmiş cisim, bir ölçüsü çox kiçik olan mürəkkəb formalı səthdən ibarətdirsə, (6.1) ifadələrindəki V_i həcmələri əvəzinə mürəkkəb formalı maddi səthin ayırdığımız sadə hissələrinin S_i sahələrini yazmaq lazımdır. Onda (6.1) ifadələri mürəkkəb formalı səth üçün aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$x_C = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i}; y_C = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i}; z_C = \frac{\sum S_i z_i}{\sum S_i}. \quad (7.2)$$

Xüsusi halda mürəkkəb formalı səth eyni müstəvi üzərində yerləşirsə, x və y oxlarını həmin müstəvi üzərində götürsək, (7.2) ifadələrindən birinci ikisi qalır.

Əgər verilmiş mürəkkəb formalı cismin iki ölçüsü

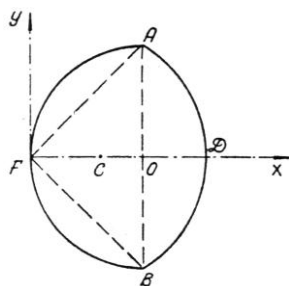
nəzərə alınmaz dərəcədə kiçiksə, yəni cisim maddi əyri şəklində isə, onda (7.1) düsturlarındakı V_i həcmələri əvəzinə mürəkkəb formalı maddi əyrini ayırdığımız sadə hissələrin ℓ_i uzunluqlarını yazmaq lazımdır. Onda həmin formullar belə şəkil alar:

$$x_C = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i}; y_C = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i}; z_C = \frac{\sum l_i z_i}{\sum l_i}. \quad (7.3)$$

Qeyd etmək lazımdır ki, bəzən mürəkkəb formalı cisim, səth və əyri bir neçə hissənin cəm və fərqiindən ibarət olur. Onda belə mürəkkəb formalı cisim, səth və əyrinin ağırlıq mərkəzi (7.1), (7.2) və (7.3) formullarından tapıla bilər, bu şərtlə ki, həmin cisimlərin çıxılan hissələrinin həcmələri, sahələri və ya uzunluqları göstərilən formullarda mənfi işarə ilə yazılsın.

Məsələ 7.1

Radiusu $FD=R$ olan çəvrənin ADB dördüdə bir qövsündən və AB vətəri üzərində qurulmuş AFB yarımçevrəsindən ibarət olan $AFBD$ çubuq konturun C ağırlıq mərkəzini tapmalı. Çubuqların xətti sıxlıqları eynidir (Şək. 7.1).



Şəkil 7.1

Həlli.

Bu məsələ mürəkkəb formalı maddi yastı əyrinin ağırlıq mərkəzinin tapılmasına aiddir. Həmin əyri, ADB qövsü və AFB yarımçevrəsindən ibarətdir.

Məsələnı həll etmək üçün AB və FD xətlərinin kəsişdiyi O nöqtəsini (AFB yarımçevrəsinin mərkəzinı) qeyd edirik. Sonra başlanğıcı F nöqtəsində olan və konturun müstəvisi üzərində yerləşən Fxy koordinat sistemini seçirik, bu şərtlə ki, x oxu konturun simmetriya oxu üzərinə düşsün (Şək. 7.1). Onda $AFBD$ konturunun ağırlıq mərkəzi x oxu üzərində yerləşən C nöqtəsi üzərinə düşər və bu nöqtənin ordinatı sıfıra bərabər olar, yəni $y_C = 0$. Həmin C nöqtəsinin absisini tapaq. Bunun üçün (7.3) düsturlarının birincisindən istifadə edib yazırıq:

$$x_C = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2}{l_1 + l_2}.$$

Burada ℓ_1 və ℓ_2 – uyğun olaraq $AFBD$ konturunu təşkil edən ADB çevrə qövsü və AFB yarımçevrəsinin uzunluqları, x_1 və x_2 isə onların ağırlıq mərkəzlərinin absisləridir.

Şəkildən tapırıq:

$$l_1 = \frac{1}{4} 2\pi R = \frac{\pi R}{2}, l_2 = \frac{1}{2} 2\pi \cdot OF = \frac{1}{2} 2\pi R \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}\pi R}{2},$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{R \sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}, x_2 = OF - \frac{OF \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \\ &= R \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{R \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} R \left(1 - \frac{2}{\pi}\right). \end{aligned}$$

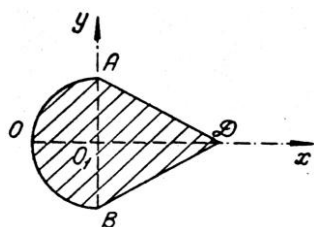
Bu qiymətləri yuxarıdakı düsturda yerinə yazıb C nöqtəsinin absisini tapırıq:

$$x_C = FC = R(\sqrt{2} - 1) + \frac{2R}{\pi}(3 - 2\sqrt{2}) = 0,524R.$$

Məsələ 7.2

R radiuslu AOB yarımçevrəsi və bərabər uzunluqda iki AD və DB düz xətti ilə hüdudlanmış sahənin C ağırlıq mərkəzini tapmalı. $OD=3R$ (Şək. 7.2).

Həlli.



Şəkil 7.2

Bu məsələ mürəkkəb formalı maddi yastı fiqura (sahəyə) aiddir. Həmin fiqur ADB bərabəryanlı üçbucaq sahəsi və AOB yarımdairədən ibarətdir. Məsələni həll etmək üçün başlanğıcı AB və OD xətlərinin kəsişdiyi O_1 nöqtəsində olan və fiqurun müstəvisi üzərində yerləşən O_1xy koordinat sistemi

götürək, bu şərtlə ki, x oxu fiqurun simmetriya oxu üzərinə düşsün (Şək. 7.2).

Onda baxdığımız $ADBO$ fiqurunun C ağırlıq mərkəzi x oxu üzərində yerləşər və onun ordinatı sıfıra bərabər olar, yəni $y_C = 0$. C nöqtəsinin absisini tapmaq üçün (7.2) düsturlarının birincisindən istifadə edək:

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2}.$$

Burada S_1 və S_2 – uyğun olaraq ADB üçbucağının və

AOB yarım dairəsinin sahələridir, x_1 və x_2 isə həmin sahələrin ağırlıq mərkəzlərinin absisləridir.

Şəkildən tapırıq:

$$S_1 = \frac{AB \cdot O_1D}{2} = \frac{2R \cdot 2R}{2} = 2R^2, \quad S_2 = \frac{1}{2}\pi R^2,$$

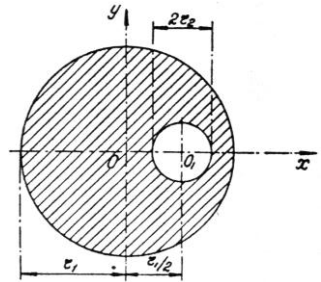
$$x_1 = \frac{2}{3}R, \quad x_2 = -\frac{4R}{3\pi}.$$

Bu qiymətləri yuxarıdakı ifadədə yerinə yazıb alırıq:

$$x_C = \frac{2R^2 \frac{2}{3}R - \frac{1}{2}\pi R^2 \frac{4R}{3\pi}}{2R^2 + \frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{4R}{12 + 3\pi}.$$

Məsələ 7.3

Dairəvi deşiyi olan bircinsli diskin ağırlıq mərkəzini tapmalı. Diskin radiusu r_1 , dairəvi deşiyin radiusu isə r_2 -yə bərabər olub, mərkəzi diskin mərkəzindən $\frac{r_1}{2}$ məsafəsində yerləşir (Şək. 7.3).



Şəkil 7.3

Həlli.

Şəkildən görürük ki, verilmiş dairəvi deşiyi olan bircinsli diskin sahəsinə r_1 radiuslu dairənin sahəsi ilə radiusu r_2 -yə bərabər olan deşiyin sahəsinin fərqi kimi

baxmaq olar. Bu diskin ağırlıq mərkəzi onun x simmetriya oxu üzərində yerləşir. Odur ki, həmin ağırlıq mərkəzinin y_C ordinatı sıfıra bərabərdir, yəni $y_C = 0$.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz mülahizəyə əsasən (7.2) düsturlarının birincisindən istifadə edərək, dəşik diskin C ağırlıq mərkəzinin O koordinat mərkəzindən olan x_C məsafəni tapırıq:

$$x_C = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2}.$$

Burada S_1 – dairəvi diskin sahəsidir, S_2 – bu diskdən kəsilmiş dairəvi dəşiyin sahəsidir və mənfi hesab olunur, x_1 və x_2 isə həmin sahələrin ağırlıq mərkəzlərinin absisləridir.

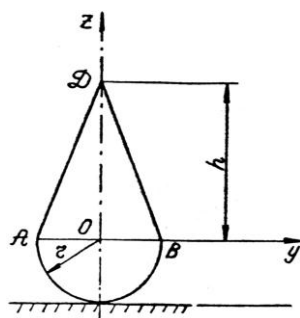
$$\text{Şəkildən tapırıq: } S_1 = \pi r_1^2, S_2 = \pi r_2^2, x_1 = 0, x_2 = \frac{r_1}{2}.$$

Bu qiymətləri yuxarıdakı ifadədə yerinə yazıb alırıq:

$$x_C = \frac{\pi r_1^2 \cdot 0 - \pi r_2^2 \cdot \frac{r_1}{2}}{\pi r_1^2 - \pi r_2^2} = -\frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}.$$

Məsələ 7.4

Sıxlıqları və r radiusları eyni olan konus və yarımkürədən əmələ gəlmiş bir cisim verilmişdir. Cismin yarımkürə səthi ilə hamar



Şəkil 7.4

üfüqi müstəviyə söykənərək müvazinətinin dayanıqsız olması üçün silindrin h hündürlüyünün sərhəd qiyməti nəyə bərabər olmalıdır? Bütün cismin ağırlıq mərkəzi, yarımkürənin mərkəzi üzərinə düşməlidir. Bircinsli yarımkürənin ağırlıq mərkəzi onun oturacağından $\frac{3}{8}r$ məsafədədir (Şək. 7.4).

Həlli.

Şəkildən görürük ki, verilmiş cisim mürəkkəb formalı olub, r radiuslu yarımkürədən və h hündürlüklü konusdan ibarətdir. Bu cismin C ağırlıq mərkəzi onun CD simmetriya oxu boyunca yönəlmiş z oxu üzərində yerləşir, yəni $x_C = 0$, $y_C = 0$. Bu mərkəzin O koordinat başlanğıcından olan məsafəsini (7.1) düsturlarının üçüncüsünə əsasən tapırıq:

$$z_C = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2}.$$

Burada V_1 və V_2 – uyğun olaraq yarımkürənin və konusun həcmələri; z_1 və z_2 isə həmin həcmələrin ağırlıq mərkəzlərinin aplikatlarıdır:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3, V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h, z_1 = -\frac{2}{3}r, z_2 = \frac{1}{4}h.$$

Bu qiymətləri yuxarıdakı ifadədə yazıb alırıq:

$$z_C = \frac{-\frac{4}{6}\pi^3 \cdot \frac{3}{8}r + \frac{1}{3}\pi^2 h \cdot \frac{1}{4}h}{\frac{4}{6}\pi^3 + \frac{1}{3}\pi^2 h} = \frac{-3r^2 + h^2}{2r + 4h}. \quad (7.4)$$

Şərtə görə baxdığımız cisim öz yarımkürə səthi ilə hamar üfqi müstəviyə söykənərək dayanıqsız müvazinət vəziyyətində olmalıdır. Onda cismin ağırlıq mərkəzi yarımkürənin O mərkəzində yerləşir, yəni $z_C = 0$ olur.

Bu şərtin ödənilməsi üçün aldığımız (7.4) kəsrinin surəti sıfıra bərabər olmalıdır, yəni

$$-3r^2 + h^2 = 0.$$

Buradan tapırıq: $h = r\sqrt{3}$.

VIII Fəsil. Fermaların hesablanması metodları

Ferma, ucları oynaqlarla birləşdirilmiş düzxətli çubuqlardan ibarət sərt konstruksiyaya deyilir. Praktikada, xüsusilə inşaatda fermalardan geniş istifadə edilir. Onlar körpülərdə, evin çardaqlarında, xüsusi konstruksiyalı binalarda və s. geniş istifadə edilir. Fermanın klassik nümunəsi kimi Eyfel Qülləsinin konstruksiyasını göstərmək olar.

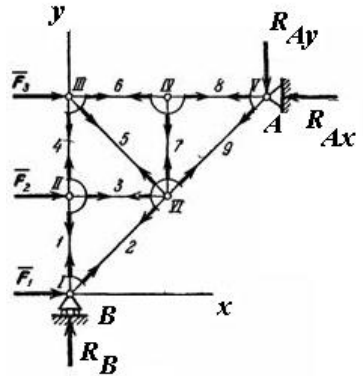
Bütün çubuqları bir müstəvi üzərində yerləşən fermaya müstəvi ferma deyilir. Çubuqların birləşmə nöqtəsinə düyün deyilir. Fermaya təsir edən xarici qüvvələr yalnız düyünlərdə tətbiq olunur. Fermaların hesablanması zamanı düyünlərdəki sürtünmə və çubuqların ağırlıq qüvvələri nəzərə alınmır. Hər bir düyündə tətbiq olunmuş qüvvələri bir qüvvə ilə əvəz etmək olar. Odur ki, fermanın hər bir çubuğuna onun uclarında tətbiq olmuş iki qüvvə təsir edir. Bu halda bütün çubuqlar yalnız dartılma və ya sıxılmaya işləyirlər. Fermanın çubuqlarının k sayı aşağıdakı ifadədən tapılır:

$$k=2n-3, \quad (8.1)$$

Burada n -düyünlərin sayıdır.

Şəkil 8.1-də göstərilən fermanın düyünlərinin sayı $n=6$ olduğu üçün onun çubuqlarının sayını (8.1) ifadəsinə əsasən tapırıq:

$$k=2 \cdot 6 - 3 = 9.$$



Şəkil 8.1

Qeyd edək ki, fermanın çubuqlarının sayı k -dan az olduqda o sərt olmayacaqdır, çubuqların sayı k -dan çox olduqda isə ferma statik həll olunmayan olacaqdır.

Fermanın analitik hesablanması onun dayaq reaksiya qüvvələrinin və çubuqlardakı qüvvələrin tapılması deməkdir. Əvvəlcə fermaya sərt konstruksiya kimi baxılaraq onun dayaq reaksiya qüvvələri statikanın müvazinət tənliklərinin köməyi ilə təyin edilir. Çubuqlardakı qüvvələr isə əsasən iki metodla tapırlar.

Düyünlərin ayrılması metodu. Bu metodun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, ardıcılıqla hər bir düyünün müvazinətinə baxılır və çubuqlardakı qüvvələr düyündən əks tərəfə istiqamətləndirilir. Yəni hesab edilir ki, verilmiş düyündə birləşən çubuqlar dartılmaya məruz qalırlar. Bu zaman düyünə təsir edən qüvvələrə bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sistemi kimi baxılır və naməlum qüvvələr tapılır. Əgər tapılan qüvvələrdən hər hansı biri mənfi olarsa, deməli həmin çubuq sıxılmaya məruz qalır. Fermanın bütün çubuqlarındakı qüvvələrin tapılması tələb olduqda bu metoddan istifadə olunması əlverişlidir.

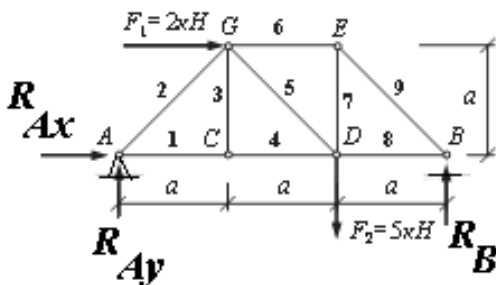
Kəsmə metodu (Ritter metodu). Bu metodun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, axtarılan qüvvənin daxil olduğu üç çubuğundan keçməklə kəsik verilir və ferma iki hissəyə bölünür. Həmin həssənin birinin müvazinətinə baxılır və kəsilən çubuqların dartılmaya məruz qaldığı nəzərdə tutularaq oradakı qüvvələr düyündən əks tərəfə istiqamətləndirilir. Sonra elə bir müvazinət tənliyi (moment və ya proyeksiya tənliyi) tərtib olunur ki, oraya yalnız bir məchul qüvvə daxil olsun. Çubuqdakı qüvvə

mənfi olarsa həmin çubuq sıxılmaya məruz qalar. Fermanın ayrılıqda götürülmüş hər hansı çubuqlarındakı qüvvələrin tapılması tələb olduqda Ritter metodundan istifadə olunması əlverişlidir.

Aşağıdakı məsələnin həllinə baxaq.

Məsələ 8.1

Məsələni Ritter metodu ilə həll edək. Şəkil 8.2-də göstərilən fermanın 6-cı çubuğunda yaranan S_6 qüvvəsini tapmalı.



Verilir: $F_1=2\text{kN}$,
 $F_2=5\text{kN}$.

Şəkil 8.2

Həlli.

Əvvəlcə (8.1) ifadəsinə əsasən çubuqların sayını tapaq. Şəkildən görüldüyü kimi düyünlərin sayı $n=6$. Odur ki, çubuqların k sayını tapırıq: $k=2n-3=2\cdot 6-3=9$.

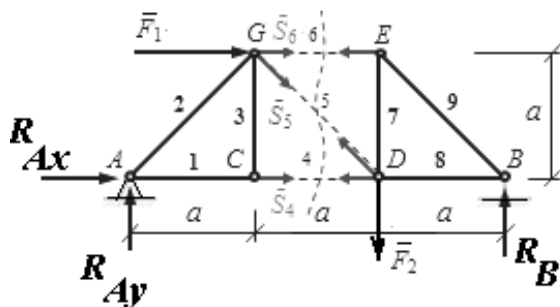
İndi A və B dayaqlarındakı R_{Ax} , R_{Ay} və R_B reaksiya qüvvələrini tapaq. Bunun üçün aşağıdakı məlum müvazinət tənliklərini yazırıq:

$$\sum F_{ix} = R_{Ax} + F_1 = 0$$

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} - F_2 + R_B = 0$$

$$\sum m_A(\bar{F}_i) = -F_1 \cdot a - F_2 \cdot 2a + R_B \cdot 3a = 0$$

Bu tənliklərdən tapırıq: $R_{Ax} = -F_1 = -2\text{kN}$,
 $R_B = 1/3(F_1 + 2 \cdot F_2) = 4\text{kN}$, $R_{Ay} = F_2 - R_B = 1\text{kN}$.



Şəkil 8.3

Ritter metoduna əsasən fermanın 4, 5 və 6 nömrəli çubuqlarından keçən kəsik verək (Şəkil 8.3).

Kəsiyin sol hissəsinin müvazinətinə baxaq. Şəkildə S_4 , S_5 və S_6 qüvvələrini göstərək. Burada 3 məchul vardır. S_6 qüvvəsini tapmaq üçün S_4 və S_5 qüvvələrinin kəsişdiyi D nöqtəsinə nəzərən moment tənliyi yazırıq (bu halda tənlikdə yalnız 1 məchul olur):

$$\sum m_D(\bar{F}_i) = -R_{Ay} \cdot 2a - F_1 \cdot a - S_6 \cdot a = 0$$

Buradan tapırıq: $S_6 = -2 \cdot R_{Ay} - F_1 = -3\text{kN}$. S_6 -nın qiyməti mənfi olduğu üçün 6 çubuğu sıxılır.

İndi həmin fermanın 5-ci çubuğunda yaranan S_5 qüvvəsini tapaq. Bunun üçün y oxu üzərindəki proyeksiya tənliyini yazaq (bu halda S_4 və S_6 qüvvələri həmin oxa perpendikulyar olduqları üçün onlar bu tənlikdə iştirak etməyəcəklər):

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} - S_5 \cos 45^\circ = 0$$

Buradan tapırıq: $S_5 = R_{Ay} / \cos 45^\circ = 1/0,707 = 1,41\text{ kN}$.

K İ N E M A T İ K A

IX Fəsil. Nöqtə kinematikası

9.1. Nöqtənin trayektoriya və hərəkət tənlikləri

Kinematikada maddi cisimlərə təsir edən qüvvələrdən asılı olmayaraq onların mexaniki hərəkəti öyrənilir. Başqa sözlə, kinematikada cisimlərin hərəkəti həndəsi nöqtəyindən nəzərdən öyrənilir. Burada cismin hərəkətini xarakterizə edən kinematik parametrlər (yol, sürət, təcil və s.) tədqiq edilir.

Fəzada bir cismin digərinə nəzərən yerdəyişməsinə mexaniki hərəkət deyilir. Kinematikada cismin hərəkəti digər müəyyən cisim və ya obyektə əlaqədar olan koordinat sisteminə nəzərən müşahidə olunur və öyrənilir. Belə sistemə müqayisə və ya hesabaparma sistemi deyilir. Maddi cismin hesabaparma sisteminə nəzərən istənilən anda vəziyyətini təyin edən tənliklərə onun hərəkət tənlikləri deyilir. Maddi nöqtənin fəzada cızdığı əyriyə onun trayektoriyası deyilir.

Nöqtənin hərəkəti əsasən üç üsulla verilir.

1. Vektorial formada hərəkət tənliyi:

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

burada $\vec{r}$ – nöqtənin tərpənməz koordinat sisteminin başlanğıcına nəzərən radius-vektorudur.

2. Koordinat formada hərəkət tənlikləri:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

burada x, y, z – nöqtənin koordinatlarıdır.

3. Təbii formadakı hərəkət tənliyi.

Bu halda nöqtənin trayektoriyası və ya trayektoriya tənlikləri və onun trayektoriya üzrə aşağıdakı hərəkət tənliyi verilir:

$$s = f(t),$$

burada s – nöqtənin trayektoriyası üzrə ölçülən qövs koordinatıdır.

Aşağıdakı məsələlərin həllinə baxaq.

Məsələ 9.1

Nöqtənin verilmiş hərəkət tənliklərinə görə onun koordinat formasında trayektoriya tənliklərini tapmalı və şəkildə hərəkət istiqamətini göstərməli.

$$1. \quad x = 3t - 5, \quad y = 4 - 2t. \quad (9.1)$$

Nöqtənin trayektoriya tənliklərini tapmaq üçün onun (9.1) hərəkət tənliklərinin birincisindən t zamanını tapıb, ikincisində yerinə yazırıq:

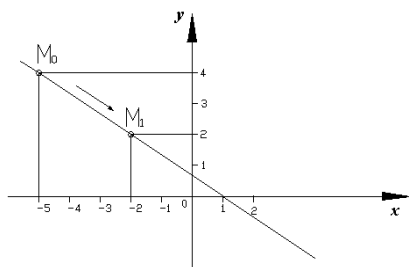
$$t = \frac{x+5}{3}, \quad y = 4 - 2 \frac{x+5}{3}.$$

Buradan nöqtənin trayektoriya tənliyi aşağıdakı şəkildə alınır:

$$2x + 3y - 2 = 0 \text{ və ya}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Bu, şəkl. 9.1-də göstərilmiş düz xəttin tənliyidir. Nöqtənin bu xətt üzərindəki başlanğıc vəziyyətini tapaq:



Şəkil 9.1

$$t = 0, x_0 = -5, y_0 = 4.$$

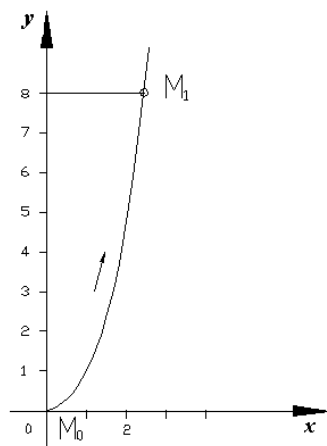
Nöqtənin hərəkət istiqamətini müəyyən etmək üçün $t_1 = 1$ san anında (9.1) tənliklərindən M_1 vəziyyətindəki koordinatlarını tapıb trayektoriya üzərində qeyd edirik:

$$x = 3, 1 - 5 = -2, y = 4 - 2, 1 = 2.$$

Şəkildən aydındır ki, nöqtə onun trayektoriyası üzrə $\overline{M_0 M_1}$ istiqamətində hərəkət edir.

$$2. x = 2t, y = 8t^2. \quad (9.2)$$

Bu tənliklərin birincisindən t -ni tapıb, ikincisində yerinə yazıb, nöqtənin trayektoriyasının tənliyini alırıq:



Şəkil 9.2

$$t = \frac{x}{2}, y = 8 \cdot \frac{x^2}{4} = 2x^2.$$

Bu, koordinat başlanğıcından keçən parabolun

tənliyidir (Şək. 9.2).

Nöqtənin trayektoriyası üzrə hərəkət istiqamətini tapmaq üçün onun $t_0 = 0$ və $t_1 = 1$ san zaman anlarındakı M_0 və M_1 vəziyyətlərinin koordinatlarını (9.2) tənliklərindən tapırıq:

$$x_0 = 0, y_0 = 0,$$

$$x_1 = 2, y_1 = 8.$$

Bu vəziyyətləri şəkildə qeyd edirik. Şəkildən görürük ki, nöqtə M_0 -dan M_1 nöqtəsinə doğru hərəkət edir.

$$3. x = 5\sin 10t, y = 3\cos 10t. \quad (9.3)$$

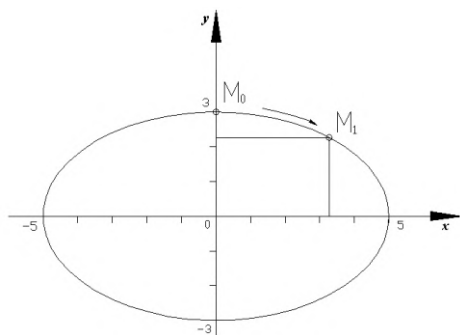
Bu halda nöqtənin trayektoriya tənliyini tapmaq üçün (9.3) tənliklərindən alırıq:

$$\frac{x}{5} = \sin 10t,$$

$$\frac{y}{3} = \cos 10t.$$

Bu ifadələri kvadrata yüksəldib toplusaq, alırıq:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$



Şəkil 9.3

Bu, mərkəzi, koordinat başlanğıcında olan ellipsin tənliyidir (Şək. 9.3).

(9.3) tənliklərində $t_0 = 0$ qiymətini yazıb nöqtənin başlangıç M_0 vəziyyətindəki koordinatlarını tapırıq:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 3.$$

Nöqtənin sonrakı hər hansı bir M_1 vəziyyətini tapmaq üçün t zamanına əlverişli bir qiymət, məsələn, $t_1 = \frac{\pi}{40}$ qiymətini verib, onun bu koordinatlarını tapırıq:

$$x_1 = 5 \sin 10 \cdot \frac{\pi}{40} = 5 \sin \frac{\pi}{4} = 5 \cdot 0,707 = 3,535;$$

$$y_1 = 3 \cos 10 \cdot \frac{\pi}{40} = 3 \cos \frac{\pi}{4} = 3 \cdot 0,707 = 2,121.$$

Bu tapdığımız M_0 və M_1 vəziyyətlərini nöqtənin trayektoriyası üzərində qeyd edirik. Şəkildən görünür ki, nöqtə trayektoriya üzrə soldan sağa doğru (saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində) hərəkət edir.

Məsələ 9.2

Nöqtənin verilmiş aşağıdakı hərəkət tənliklərinə görə onun trayektoriyasının tənliyini və bu trayektoriya üzrə hərəkət tənliyini tapmalı:

$$x = 3t^2, \quad y = 4t^2. \quad (9.4)$$

Həlli.

Nöqtənin trayektoriyasının tənliyini tapmaq üçün onun (9.4) hərəkət tənliklərinin birincisindən $t^2 = \frac{x}{3}$ tapıb

ikincisində yerinə yazırıq:

$$y = \frac{4}{3}x \text{ və ya } 4x - 3y = 0.$$

Bu, koordinat başlanğıcından keçən düz xəttin tənliyidir.

Nöqtənin həmin xətt (trayektoriya) üzrə hərəkət tənliyini tapmaq üçün riyaziyyatdan məlum olan aşağıdakı asılılıqdan istifadə edirik:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

(9.4) tənliklərini diferensiallasaq, alırıq:

$$dx = 6tdt, \quad dy = 8tdt,$$

onda

$$ds = \sqrt{(6tdt)^2 + (8tdt)^2} = 10tdt.$$

Bu ifadəni integrallayıb nöqtənin trayektoriya üzrə hərəkət tənliyini alırıq:

$$s = 5t^2 + C. \quad (9.5)$$

Burada C inteqral sabitidir. Onu tapmaq üçün məsələnin başlanğıc şərtindən istifadə edirik. (9.4) tənliklərindən görürük ki, $t = 0$ başlanğıc zaman anında nöqtənin x və y koor-dinatları sıfıra bərabərdir. Deməli, nöqtə başlanğıc anda ko-ordinat başlanğıcında yerləşir. Aydınır ki, bu anda nöqtə-nin s qövsü koordinatı da sıfıra bərabərdir. Odur ki, verilmiş məsələnin başlanğıc şərti belə ifadə

olunur:

$$t = 0 \text{ olduqda } x = 0, y = 0 \text{ və } s = 0.$$

Onda (9.5) ifadəsindən tapırıq:

$$0 = 0 + C, C = 0.$$

Beləliklə, nöqtənin trayektoriya üzrə hərəkət tənliyini tapırıq:

$$s = 5t^2.$$

Məsələ 9.3

Körpü kranı emalatxana boyunca $x = t$ tənliyi üzrə hərəkət edir. Onun üzərində eninə istiqamətdə $y = 1,5t$ tənliyi üzrə bir arabacıq da hərəkət edir (burada x və y metrə, t saniyə ilə ölçülür). Zəncir $v = 0,5 \text{ m/san}$ sürətilə yığılır. Yükün ağırlıq mərkəzinin trayektoriyasını tapmalı. Başlanğıc vəziyyətdə yükün ağırlıq mərkəzi Oxy üfüqi müstəvisi üzərində yerləşir; Oz oxu şaquli olaraq yuxarı yönəlmişdir.

Həlli.

Məsələnin şərtinə əsasən nöqtənin koordinat formada hərəkət tənliklərini tapırıq:

$$x = t; \quad y = 1,5t; \quad z = vt = 0,5t. \quad (9.6)$$

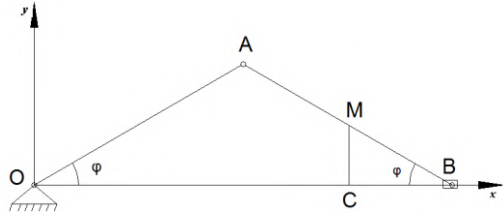
Yükün ağırlıq mərkəzinin trayektoriyasını tapmaq üçün (9.6) ifadələrindəki birinci tənlikdən t zamanını tapıb, ikinci və üçüncü tənliklərdə yerinə yazırıq:

$$y = 1,5x; z = 0,5x.$$

Bu, nöqtənin düzxətli hərəkətinin trayektoriya tənliyidir.

Məsələ 9.4

OA çarxqolu $\omega = 10 \text{ rad/san}$ sabit bucaq sürəti ilə fırlanır. $OA = AB = 80 \text{ sm}$ başlanğıc anda sürüngəc sağ kənar vəziyyəti tutmuş olarsa, sürgüqolunun orta M nöqtəsinin hərəkət tənliyini və trayektoriyasını, həmçinin B sürüngəcinin hərəkət tənliyini tapmalı (Şək. 9.4).



Şəkil 9.4

Həlli.

Sürgüqolunun orta M nöqtəsindən x oxuna MC perpendikulyarı endiririk. Şəkildən görürük ki, CAB üçbucağı bərabəryanlıdır və bu üçbucağın φ bucağını məsələnin şərtinə görə tapırıq: $\varphi = \omega t = 10t$.

Sonra şəkildən M və B nöqtələrinin koordinatlarını tapırıq:

$$x_M = OC = OB - CB = 2 \cdot OA \cdot \cos \varphi - MB \cdot \cos \varphi,$$

$$y_M = MC = MB \cdot \sin \varphi, \quad x_B = OB = 2 \cdot OA \cdot \cos \varphi, \quad y_B = 0.$$

Bu ifadələrdə verilmiş $OA=80 \text{ sm}$, $MB=\frac{1}{2}AB=40 \text{ sm}$, $\varphi=10t$ qiymətlərini yerinə yazıb M və B nöqtələrinin hərəkət tənliklərini tapırıq:

$$x_M = 120 \cdot \cos 10t, \quad y_M = 40 \cdot \sin 10t, \quad (9.7)$$

$$x_B = 160 \cdot \cos 10t, \quad y_B = 0. \quad (9.8)$$

(9.8) tənliklərindən və həmçinin şəkildən görürük ki, B sürüngəcinin trayektoriyası x oxu üzrə yönəlmiş düz xəttidir.

M nöqtəsinin trayektoriyasını tapmaq üçün (9.7) tənliklərindən alırıq:

$$\cos 10t = \frac{x_M}{120}, \quad \sin 10t = \frac{y_M}{40}.$$

Bu ifadələrin kvadratlarını toplayıb M nöqtəsinin trayektoriya tənliyini tapırıq:

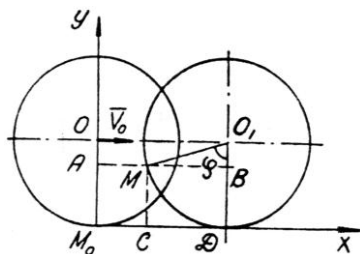
$$\frac{x_M^2}{120^2} + \frac{y_M^2}{40^2} = 1.$$

Bu, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan ellipsin tənliyidir.

Məsələ 9.5

Avtomobil düz yol üzərində 20 m/san sabit sürəti ilə hərəkət edir, onun $R=1 \text{ m}$ radiuslu çarxının çənbəri üzərində yerləşən nöqtəsinin hərəkət tənliklərini və trayektoriyasını tapmalı. Çarx sürüşmədən diyirlənir.

Nöqtənin Ox oxu qəbul olunmuş yolu üzərindəki başlanğıc vəziyyətini koordinat başlanğıcında götürməli.



Həlli.

Şək. 9.5-də çarxın başlanğıc və t zaman anına uyğun O və O_1 vəziyyətləri göstərilmişdir. Bu zaman fasiləsində çarxın O mərkəzi O_1 vəziyyətinə gəlir və OO_1 qədər yol gedir. Onun koordinat başlanğıcında yerləşən M_0 nöqtəsi çarxın O_1 vəziyyətindəki çənbəri üzərində O_1 mərkəzi ətrafında φ bucağı qədər dönrək M vəziyyətini tutur. M nöqtəsinin hərəkət tənliklərini tapmaq üçün əvvəlcə şəkildən onun x və y koordinatlarını tapaq:

Şəkil 9.5

$$x = AM = OO_1 - MB, \quad y = MC = O_1D - O_1B.$$

(9.9)

Şəkildən aydındır ki, çarx üfüqi yolda sürüşmədən diyir-ləndiyi üçün t zaman fasiləsində onun mərkəzinin getdiyi OO_1 yolu çarxın çevrəsi üzərindəki M_0 nöqtəsinin $O_1(O)$ mərkəzi ətrafında φ bucağı qədər dönməsi zamanı cızdığı DM qövsünün uzunluğuna bərabərdir. Buna əsasən şəkildən yazırıq:

$$OO_1 = \overset{\cup}{DM} = R\varphi.$$

Çarxın mərkəzi sabit v_0 sürəti ilə hərəkət etdiyi üçün

$$OO_1 = v_0 t \text{ və } v_0 t = R\varphi. \text{ Buradan } \varphi = \frac{v_0 t}{R}.$$

Şəkildən tapırıq:

$$MB = R \sin \varphi, O_1 D = R, O_1 B = R \cos \varphi.$$

Bu ifadələri (7.9)-da yerinə yazıb çarxın M nöqtəsinin hərəkət tənliklərini alırıq:

$$x = v_0 t - R \sin \frac{v_0 t}{R}, y = R - R \cos \frac{v_0 t}{R}.$$

Burada $v_0 = 20 \text{ m/san}$ və $R = 1 \text{ m}$ qiymətlərini yerinə yazıb tapırıq:

$$x = 20t - \sin 20t, y = 1 - \cos 20t.$$

Bu, sikloidin tənlikləridir.

Məsələ 9.6

Mərminin hərəkət tənlikləri

$$x = v_0 t \cos \alpha, y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (9.10)$$

verilir, burada v_0 – mərminin başlanğıc sürəti; α – $\overline{v_0}$ sürəti ilə üfüqi x oxu arasındakı bucaq; g – ağırlıq qüvvəsinin təcildir.

Nöqtənin H uçuş hündürlüyünü, L uçuş məsafəsini və T uçuş zamanını tapmalı.

Həlli.

Əvvəlcə mərminin trayektoriyasının tənliyini 10.2 məsələsində olduğu kimi (9.10) ifadəsindən tapaq:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}, y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2.$$

Bu, budaqları aşağı yönəlmiş paraboladır.

Mərminin H uçuş hündürlüyü onun y oxu istiqamətində getdiyi maksimum məsafədir. Bu məsafə (9.10) hərəkət tənliklərinin ikincisindən tapıla bilər. Bunun üçün mərminin ən yüksək A vəziyyətindəki t_A zaman

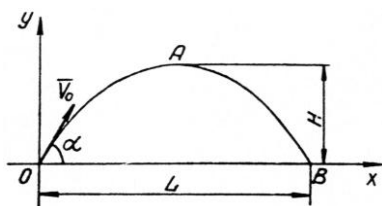
anını tapmaq lazımdır (Şək. 9.6). Bu vəziyyətdə mərminin y oxu istiqamətində getdiyi yolun maksimum olduğunu nəzərə alaraq, (9.10) tənliklərinin ikincisindən zamana görə törəmə alıb sifıra bərabər edirik və oradan t_A zamanını tapırıq:

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt_A = 0,$$

Buradan

$$t_A = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Bu qiyməti həmin tənlikdə yerinə yazıb, oradan H



Şəkil 9.6

uçuş hündürlüyünü tapırıq:

$$H = v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (9.11)$$

Mərmnin uçuş uzaqlığı onun x oxu istiqamətində getdiyi OB məsafəsinə bərabərdir. Şəkildən görürük ki, mərmnin B nöqtəsindəki vəziyyətində (uçuşun ən uzaq nöqtəsində) onun y ordinatı sıfıra bərabərdir. Odur ki, (9.10) tənliklərindən ikincisində $y=0$ qiymətini yazıb, oradan mərmnin B nöqtəsinə uyğun $t_B=T$ uçuş zamanını tapırıq:

$$0 = v_0 \sin \alpha \cdot t_B - \frac{gt_B^2}{2}.$$

Buradan iki qiymət alınır:

$$t_{B1} = 0, t_{B2} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Bu tapdığımız qiymətlərdən ikincisi axtardığımız T zamanı olacaqdır, yəni

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (9.12)$$

Bu qiyməti (9.10) tənliklərindən birincisində yerinə yazıb mərmnin L uçuş uzaqlığını tapırıq:

$$L = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (9.13)$$

Məsələ 9.7

Əvvəlki məsələnin şərtləri daxilində mərminin L uçuş məsafəsinin maksimum olduğu hal üçün α atılma bucağını tapmalı. Uyğun olaraq uçuş hündürlüyünü və zamanını tapmalı.

Həlli.

Mərminin uçuş hərəkətinin onun α atılma bucağından asılı olaraq maksimal qiymətini tapmaq üçün əvvəlki məsələdə aldığımız (9.13) ifadəsindən dəyişən α bucağına görə törəmə alıb sıfıra bərabər edirik:

$$\frac{dL}{d\alpha} = \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\alpha = 0.$$

Buradan axtardığımız α bucağının qiymətini tapırıq:

$$\cos 2\alpha = 0, \alpha = 45^\circ.$$

α bucağının bu tapdığımız qiymətində L funksiyası ekstremal qiymət alır. Bu funksiyanın maksimum qiymətini tapmaq üçün onun ikinci tərtib törəməsini tapıb, $\alpha = 45^\circ$ qiymətini orada yerinə yazırıq:

$$\frac{d^2L}{d\alpha^2} = -\frac{4v_0^2}{g} \sin 2\alpha = -\frac{4v_0^2}{g} \sin 90^\circ = -\frac{4v_0^2}{g}.$$

Buradan görürük ki, L funksiyanın (uçuş uzaqlığının) ikinci tərtib törəməsi sıfırdan kiçikdir. Odur ki, $\alpha = 45^\circ$ qiymətində mərminin L uçuş uzaqlığı maksimum olur.

Beləliklə, α bucağının 45° -yə bərabər qiymətində mərmə üfüqi müstəvi (yer) üzərində yerləşən ən uzaq nöqtəyə düşür. α bucağının bu qiymətini əvvəlki məsələnin həllindən alınan (9.11), (9.12) və (9.13) ifadələrində yerinə yazsaq, baxdığımız halda mərmənin uçuş hündürlüyünü və uçuş zamanını tapırıq:

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 90^\circ, H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 45^\circ, T = \frac{2v_0}{g} \sin 45^\circ$$

və ya
$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}, H = \frac{v_0^2}{4g}, T = \frac{\sqrt{2}v_0}{g}.$$

Qeyd edək ki, burada havanın müqaviməti nəzərə alınmır.

Məsələ 9.8

Nöqtə

$$x = a \cos kt, y = a \sin kt, z = vt. \quad (9.14)$$

vint əyrisi üzrə hərəkət edir. Nöqtənin hərəkətinin silindrik koordinatlarda tənliyini tapmalı.

Həlli.

Məlumdur ki, nöqtənin silindrik koordinatları ilə dekart koordinatları arasında aşağıdakı asılılıqlar vardır:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg \frac{y}{x}, z = z.$$

Nöqtənin (7.14) hərəkət tənliklərini bu ifadələrdə

yerinə yazıb onun silindrik koordinatlardakı hərəkət tənliklərini tapırıq:

$$r = \sqrt{a^2 \cos^2 kt + a^2 \sin^2 kt} = a, \varphi = \arctg \frac{a \sin kt}{a \cos kt} = kt, z = vt.$$

9.2. Nöqtənin hərəkətinin koordinat üsulu ilə verilişində sürət və təcilin tapılması

Nöqtənin sürət vektoru baxdığımız anda onun hərəkətinin qiymətcə dəyişməsinə və istiqamətini xarakterizə edir. Sürət vektoru nöqtənin radius-vektorundan zamana görə alınmış törəməyə bərabərdir, yəni

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Bu vektorial ifadəni x, y, z dekart koordinat oxları üzərinə proyeksiyalayıb sürətin həmin oxlar üzərindəki proyeksiyalarını alırıq:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (9.15)$$

Deməli, nöqtənin sürətinin x, y, z dekart koordinat oxları üzərindəki proyeksiyaları onun uyğun koordinatlarından zamana görə alınmış törəmələrə bərabərdir. Yuxarıdakı (9.15) ifadələrindən nöqtənin sürətinin qiymət və istiqaməti (istiqamətləndirici kosinuslar) aşağıdakı ifadələrdən tapılır:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}, \quad (9.16)$$

$$\cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{v_x}{v}, \cos(\bar{v}, \bar{j}) = \frac{v_y}{v}, \cos(\bar{v}, \bar{k}) = \frac{v_z}{v}.$$

Burada $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ tərpənməz x , y , z dekart koordinat oxlarının vahid vektorlarıdır (ortlarıdır).

Nöqtənin təcil vektoru onun sürət vektorunun qiymət və istiqamətə dəyişməsini xarakterizə edir. Nöqtənin təcil vektoru onun sürət vektorundan zamana görə alınmış törəməyə bərabərdir, yəni

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Bu vektorial ifadəni tərpənməz x , y , z dekart koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq, alarıq:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2}, w_y = \frac{d^2y}{dt^2}, w_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (9.17)$$

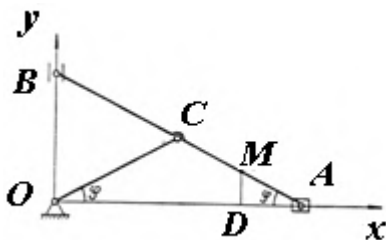
Deməli, nöqtənin təcilinin x , y , z dekart koordinat oxları üzərindəki proyeksiyaları onun uyğun koordinatlarından zamana görə alınmış ikinci tərtibli törəmələrə bərabərdir. Yuxarıdakı (9.17) ifadələrindən nöqtənin təcilinin qiymət və istiqaməti (istiqamətləndirici kosinuslar) aşağıdakı ifadələrdən tapılır:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}, \quad (9.18)$$

$$\cos(\bar{w}, \bar{i}) = \frac{w_x}{w}, \cos(\bar{w}, \bar{j}) = \frac{w_y}{w}, \cos(\bar{w}, \bar{k}) = \frac{w_z}{w}.$$

Məsələ 9.9

Ellipsoqraf xətkəşinin uzunluğu $AB=40$ sm, çarxqolunun uzunluğu isə $OC=20$ sm, $AC=CB$. Çarxqolu müntəzəm sürətdə O oxu ətrafında ω bucaq sürəti ilə fırlanır. Xətkəşin A ucundan $AM=10$ sm məsafədə yerləşən M nöqtəsinin trayektoriya və sürət qodoqrafının tənliklərini tapmalı (Şək. 9.7).



Şəkil 9.7

Həlli.

M nöqtəsinin trayektoriyasının tənliyini tapmaq üçün əvvəlcə onun hərəkət tənliklərini tapmaq lazımdır. Bunun üçün M nöqtəsindən x oxu üzərinə MD perpendikulyarı endiririk. Şəkildən M nöqtəsinin koordinatlarını tapırıq:

$$x_M = OD = OA - DA = 2OC \cos \varphi - MA \cos \varphi,$$

$$y_M = MD = MA \sin \varphi.$$

Bu ifadələrdə $OC=20$ sm, $MA=10$ sm qiymətlərini və məlum $\varphi = \omega t$ tənliyini yerinə yazıb M nöqtəsinin

hərəkət tənliklərini alırıq:

$$x_M = 30 \cos \omega t, y_M = 10 \sin \omega t.$$

Buradan tapırıq: $\cos \omega t = \frac{x_M}{30}, \sin \omega t = \frac{y_M}{10}.$

Bu ifadələri kvadrata yüksəldib tərəf-tərəfə toplayıb M nöqtəsinin trayektoriya tənliyini alırıq:

$$\frac{x_M^2}{900} + \frac{y_M^2}{100} = 1.$$

Xətkeşin M nöqtəsinin sürət qodoqrafını tapmaq üçün əvvəlcə onun sürətinin x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını (9.15) ifadələrinə əsasən tapırıq:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -30\omega \sin \omega t, v_y = \frac{dy}{dt} = 10\omega \cos \omega t.$$

Buradan $\sin \omega t = -\frac{v_x}{30\omega}, \cos \omega t = \frac{v_y}{10\omega}.$

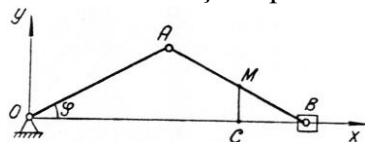
Bu ifadələri kvadrata yüksəldib tərəf-tərəfə toplayaraq, M nöqtəsinin sürət qodoqrafının tənliyini tapırıq:

$$\frac{x_1^2}{900\omega^2} + \frac{y_1^2}{100\omega^2} = 1.$$

Burada $x_1 = v_x, y_1 = v_y$ – sürət vektorunun son nöqtəsinin koordinatlarıdır.

Məsələ 9.10

OA çarxqolu sabit ω bucaq sürətilə fırlanır. Çarxqolu-sürüngəc mexanizminin sürgü qolunun orta M nöqtəsinin sürətini və sürüngəcinin sürətini zamandan asılı olaraq tapmalı. $OA=AB=a$ (Şək. 9.8).



Şəkil 9.8

Həlli.

Sürgüqolunun M nöqtəsinin sürətini tapmaq üçün həmin nöqtənin hərəkət tənliklərini tapaq. Bunun üçün M nöqtəsindən x oxuna MC perpendikulyar xətt çəkək. Şəkindən M nöqtəsinin koordinatlarını tapırıq:

$$x_M = OB - BC = 2OA \cos \varphi - BM \cos \varphi,$$

$$y_M = MC = MB \sin \varphi.$$

Bu ifadələrdə $OA = a$, $BM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ və $\varphi = \omega t$ yazıb M nöqtəsinin hərəkət tənliklərini alırıq:

$$x_M = \frac{3}{2}a \cos \omega t, y_M = \frac{1}{2}a \sin \omega t.$$

Sonra bu ifadələrdən zamana görə törəmələr alıb M nöqtəsinin sürətinin x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını tapırıq:

$$v_{Mx} = \frac{dx_M}{dt} = -\frac{3}{2}a\omega \sin \omega t, v_{My} = \frac{dy_M}{dt} = \frac{1}{2}a\omega \cos \omega t.$$

Buradan (9.16) ifadələrinə əsasən M nöqtəsinin

sürətinin qiymətini tapırıq:

$$v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2\omega^2\sin^2\omega t + \frac{1}{4}a^2\omega^2\cos^2\omega t} = \frac{a\omega}{2}\sqrt{8\sin^2\omega t + 1}$$

İndi B sürüngəcinin sürətini tapaq. Bunun üçün əvvəlcə onun hərəkət tənliklərini tapaq. Şəkildən yazırıq:

$$x_B = OB = 2OA\cos\varphi, y_B = 0.$$

Burada $OA = a$, $\varphi = \omega t$ ifadələri yazıb M nöqtəsinin hərəkət tənliklərini tapırıq:

$$x_B = 2a\cos\omega t, y_B = 0.$$

Bu tənliklərdən t zamanına görə törəmə alıb B sürüngəcinin sürətinin x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını tapırıq:

$$v_{Bx} = \frac{dx_B}{dt} = -2a\omega\sin\omega t, v_{By} = 0.$$

Buradan (9.16) ifadələrinə əsasən B sürüngəcinin sürətini tapırıq:

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \sqrt{4a^2\omega^2\sin^2\omega t} = 2a\omega\sin\omega t.$$

Məsələ 9.11

Nöqtənin hərəkəti

$$x = v_0 t \cos \alpha_0, y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{gt^2}{2}. \quad (9.19)$$

tənlikləri ilə verilmişdir. Ox oxu üfüqi, Oy oxu isə şaquli olaraq yuxarı yönəlmişdir; v_0 , g və $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ sabit kəmiyyətlərdir.

1) nöqtənin trayektoriyasını, 2) onun ən yüksək vəziyyətinin koordinatlarını, 3) nöqtənin Ox oxu üzərində olduğu andakı sürətinin proyeksiyalarını tapmalı.

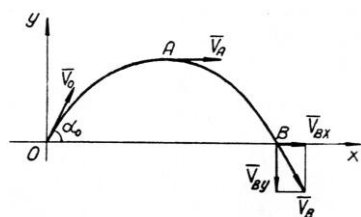
Həlli.

Nöqtənin trayektoriya tənliyini tapmaq üçün (9.19) tənliklərinin birincisindən t zamanını tapıb, ikincisində yerinə yazırıq:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0}, y = v_0 \sin \alpha_0 \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} = x \tan \alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}.$$

Deməli, nöqtənin trayektoriyası təpəsi koordinat başlanğıcında yerləşməyən budaqları aşağıya doğru yönələn paraboladır (Şək. 9.9).

Şəkildən görürük ki, nöqtənin ən yüksək A vəziyyətində onun $\overline{v_A}$ sürəti trayektoriyasına toxunan üzrə x oxuna paralel istiqamətində yönəlir. Onda həmin sürətin y oxu üzərindəki proyeksiyası sıfıra bərabər olar, yəni $v_{Ay} = 0$. Odur ki, A nöqtəsinin koordinatlarını tapmaq



Şəkil 9.9

üçün (9.19) ifadələrindəki ikinci tənlikdən zamana görə törəmə alıb sıfıra bərabər edirik:

$$v_{Ay} = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha_0 - gt_A = 0.$$

Buradan nöqtənin A vəziyyətindəki t_A zamanını tapırıq:

$$t_A = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

Bu qiyməti (9.19) ifadələrində yerinə yazıb nöqtənin ən yüksək A vəziyyətindəki koordinatlarını tapırıq:

$$x_A = v_0 \cos \alpha_0 \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g},$$

$$y_A = v_0 \sin \alpha_0 \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} - \frac{gv_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}.$$

Nöqtənin Ox oxu üzərinə düşən anda B vəziyyətindəki sürətinin proyeksiyalarını tapmaq üçün əvvəlcə onun həmin B vəziyyətindəki t_B zaman anını tapaq. Bunun üçün, şəkildən görüldüyü kimi, B nöqtəsinin y ordinatının sıfıra bərabərlik şərtindən istifadə edirik, yəni

$$y_B = v_0 t_B \sin \alpha_0 - \frac{gt_B^2}{2} = 0.$$

Buradan t_B zamanını tapırıq:
$$t_B = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

Sonra nöqtənin bu andakı sürətinin x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını (7.19) tənliklərindən törəmələr alıb tapırıq:

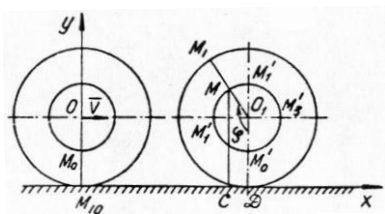
$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha_0, v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt.$$

Burada yuxarıda tapdığımız t_B -nin qiymətini yerinə yazıb nöqtənin Ox oxu üzərində yerləşən B vəziyyətindəki $\overline{v_B}$ sürətinin x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını tapırıq:

$$v_{Bx} = v_0 \cos \alpha_0, v_{By} = v_0 \sin \alpha_0 - \frac{2v_0 g \sin \alpha_0}{g} = -v_0 \sin \alpha_0.$$

Məsələ 9.12

Radiusu $R=1\text{ m}$ olan parovoz çarxı yolun üfüqi düz hissəsində sürüşmədən diyir-lənir, onun oxdan $a=0,5\text{ m}$ məsafədə yerləşən nöqtəsinin hərəkət tənliklərini və traektoriyasını tapmaq lazımdır: çarxın oxunun sürəti $v=10\text{ m/san}$ -dir. Ox oxu rels üzərindədir, Oy oxu isə nöqtənin aşağı başlanğıc vəziyyətindəki radiusu üzərinə düşür. Həmçinin bu nöqtənin üfüqi və şaquli diametrlər üzərində yerləşdiyi andakı sürətini də təyin etməli (Şək. 9.10).



Şəkil 9.10

Həlli.

Çarx x oxu üzrə sürüşmədən diyirləndiyi üçün onun O

mərkəzinin t zaman fasiləsində getdiyi OO_1 yolu çarxın çevrəsi üzərindəki M_{10} nöqtəsinin O (O_1) mərkəzi ətrafında φ bucağı qədər dönməsi zamanı cızdığı DM_1 qövsünün uzunluğuna bərabərdir, yəni

$$OO_1 = \overset{\cup}{DM_1}$$

və ya $OO_1 = vt$, $\overset{\cup}{DM_1} = R\varphi$ olduğunu nəzərə alsaq

$$vt = R\varphi.$$

$$\text{Buradan} \quad \varphi = \frac{vt}{R} = \frac{10t}{1} = 10t. \quad (9.20)$$

Şəkildə çarxın M_1 nöqtəsinin O_1M_1 radiusu üzərində yerləşən və onun $a = 0,5 \text{ m}$ radiusunun çevrəsinə aid olan M nöqtəsi göstərilmişdir. M nöqtəsinin x və y koordinatlarını tapmaq üçün həmin nöqtədən x oxu və DO_1 xətti üzərinə MC və MB perpendikulyarlarını endiririk. Şəkildən yazırıq:

$$x = M_{10}C = OO_1 - CD, y = MC = DO_1 + O_1B.$$

Daha sonra tapırıq:

$$CD = MB = O_1M \sin(180^\circ - \varphi) = a \sin \varphi, DO_1 = R,$$

$$O_1B = O_1M \cos(180^\circ - \varphi) = -a \cos \varphi.$$

Bu qiymətləri yuxarıdakı ifadələrdə yerinə yazıb M nöqtəsinin hərəkət tənliklərini tapırıq:

$$\begin{aligned}x &= vt - a \sin \varphi = 10t - 0,5 \sin 10t, \\y &= R - a \cos \varphi = 1 - 0,5 \cos 10t.\end{aligned}$$

Bu tənliklər qısalmış sikloidin parametrik tənlikləridir.

M nöqtəsinin hərəkət tənliklərinə əsasən onun t zamandakı sürətinin x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını (9.15) ifadələrindən tapırıq:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 10 - 5 \cos 10t, v_y = \frac{dy}{dt} = 5 \sin 10t.$$

Bu proyeksiyalara əsasən M nöqtəsinin sürətinin qiymətini tapırıq:

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(10 - 5 \cos 10t)^2 + 25 \sin^2 10t} = \\&= \sqrt{125 - 100 \cos 10t}.\end{aligned}\tag{9.21}$$

M nöqtəsinin üfüqi M'_1 , M'_3 və şaquli M'_0 , M'_2 diametrləri üzərində yerləşən vəziyyətlərindəki sürətini tapmaq üçün (9.21) tənliklərinə daxil olan t zamanını bilmək lazımdır. Bu t zamanı φ bucağının məlum (9.20) ifadəsindən tapıla bilər. Şəkildən görürük ki, M nöqtəsinin M'_0 , M'_1 , M'_2 və M'_3 vəziyyətlərində φ bucağı uyğun olaraq aşağıdakı qiymətlər alır:

$$\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \pi, \varphi_3 = \frac{3\pi}{2}.$$

Bu qiymətləri (9.20) ifadəsində yerinə yazıb uyğun t zamanlarının qiymətlərini tapırıq:

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{\pi}{20}, t_2 = \pi, \varphi_3 = \frac{3\pi}{20}.$$

t zamanının bu qiymətlərini (9.21) ifadəsində yerinə yazıb, M nöqtəsinin çarxın üfüqi və şaquli diametrləri üzərindəki M'_0 , M'_1 , M'_2 və M'_3 vəziyyətlərindəki sürətlərini tapırıq:

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{125 - 100 \cos 0^0} = 5 \text{ m/san}, v_1 = \\ &= \sqrt{125 - 100 \cos 10\pi/20} = 5\sqrt{5} \text{ m/san}, \\ v_2 &= \sqrt{125 - 100 \cos 10\pi/10} = 15 \text{ m/san}, v_3 = \\ &= \sqrt{125 - 100 \cos 30\pi/20} = 5\sqrt{5} \text{ m/san}. \end{aligned}$$

Məsələ 9.13

Üfüqi Ox oxu üzərində sürüşmədən diyirlənən çarxın M nöqtəsinin təcilinə qiymət və istiqamətini tapmalı. Nöqtə tənlikləri $x = 20t - \sin 20t$, $y = 1 - \cos 20t$ (t – saniyə, x, y – metr ilə ölçülür) olan sikloid cızır.

Həlli.

Bu tənliklərdən (9.17) ifadələrinə əsasən törəmələr alaraq əvvəlcə çarxın M nöqtəsinin təcilinə x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını tapırıq:

$$w_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = 400 \sin 20t, w_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = 400 \cos 20t.$$

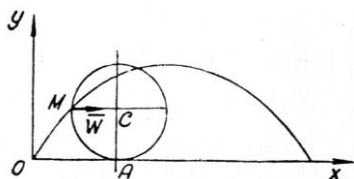
Daha sonra təcilin qiymət və istiqamətini (9.18)

ifadəsinə əsasən tapırıq:

$$w_x = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{400^2 \sin^2 20t + 400^2 \cos^2 20t} = 400 \text{ m/san}^2,$$

$$\cos(\bar{w}, x) = \frac{w_x}{w} = \frac{400 \sin 20t}{400} = \sin 20t = \cos(90^\circ - 20t),$$

$$\cos(\bar{w}, y) = \frac{w_y}{w} = \frac{400 \cos 20t}{400} = \cos 20t.$$



Şəkil 9.11

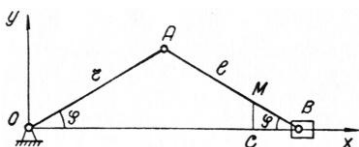
Buradan görürük ki, nöqtənin təcil vektoru x oxu ilə $(90^\circ - 20t)$ və y oxu ilə $20t$ qədər bucaq əmələ gətirir.

Şək. 9.11-də göstərilmiş MCA bucağının $\varphi = 20t$ olduğunu nəzərə alsaq, çarxın M nöqtəsinin təcilinin onun C mərkəzinə doğru yönəldiyini yəqin edərik.

Məsələ 9.14

Çarxqolu-sürüngəc mexanizminin sürgü qolunun M nöqtəsinin trayektoriyasını, eləcə də $\varphi = 0$ olduqda bu

nöqtənin sürət və təcilini tapmalı (şək. 9.12).



Şəkil 9.12

Verilir: $r = l = 60 \text{ sm}$,

$MB = \frac{1}{3}l$, $\varphi = 4\pi(t - \text{saniyə})$
ilə ölçülür).

Həlli.

Əvvəlcə M nöqtəsinin hərəkət tənliklərini çıxaraq. Bunun üçün şəkildən M nöqtəsinin koordinatlarını tapırıq:

$$\begin{aligned}x &= OC = OB - CB = r \cos \varphi + l \cos \varphi - MB \cos \varphi, \\y &= MC = MB \sin \varphi.\end{aligned}$$

Bu ifadələrdə $r = \ell = 60 \text{ sm}$, $MB = \frac{1}{3}\ell = 20 \text{ sm}$ qiymətlərini və $\varphi = 4\pi t$ tənliyini yazıb, M nöqtəsinin hərəkət tənliklərini aşağıdakı kimi tapırıq:

$$\begin{aligned}x &= 60 \cos 4\pi t + 60 \cos 4\pi t - 20 \cos 4\pi t = 100 \cos 4\pi t, \\y &= 20 \sin 4\pi t.\end{aligned} \quad (9.22)$$

Nöqtənin trayektoriyasının tənliyini tapmaq üçün əvvəlcə bu ifadələrdən $\cos 4\pi t$ və $\sin 4\pi t$ funksiyalarını tapırıq:

$$\cos 4\pi t = \frac{x}{100}, \sin 4\pi t = \frac{y}{20}.$$

Bu ifadələri kvadrata yüksəldib toplasaq, M nöqtəsinin trayektoriyasının tənliyini alırıq:

$$\frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1.$$

Bu, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan ellipsin tənliyidir.

M nöqtəsinin sürət və təcilini tapmaq üçün əvvəlcə (9.22) ifadələrindən onların x və y oxları üzərindəki

proyeksiyalarını tapmaq:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -400\pi \sin 4\pi t, v_y = \frac{dy}{dt} = 80\pi \cos 4\pi t,$$

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -1600\pi^2 \cos 4\pi t, w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -320\pi^2 \sin 4\pi t.$$

Daha sonra nöqtənin sürət və təcilinin qiymətini tapırıq:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{400^2 \pi^2 \sin^2 4\pi t + 80^2 \pi^2 \cos^2 4\pi t},$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{1600^2 \pi^4 \cos^2 4\pi t + 320^2 \pi^4 \sin^2 4\pi t}$$

M nöqtəsinin çarxqolunun $\varphi = 0$ vəziyyətindəki zaman anında sürət və təcilini tapmaq üçün $\varphi = 4\pi t$ tənliyindən həmin zaman anını tapırıq: $t_0 = 0$. Bu $t_0 = 0$ qiymətini yuxarıdakı ifadələrdə yerinə yazıb M nöqtəsinin sürət və təcilinin $\varphi = 0$ olan andakı qiymətlərini tapırıq:

$$v = \sqrt{400^2 \pi^2 \sin^2 0^0 + 80^2 \pi^2 \cos^2 0^0} = 80\pi \text{ sm/san},$$

$$w = \sqrt{1600^2 \pi^4 \cos^2 0^0 + 320^2 \pi^4 \sin^2 0^0} = 1600\pi^2 \text{ sm/san}^2.$$

Məsələ 9.15

Nöqtənin hərəkət tənlikləri verilmişdir: $x = 2t$, $y = t^2$ (t saniyə ilə, x və y santimetrlə ölçülür). $t_1 = 1$ san anında nöqtənin sürət və təcilinin qiymət və istiqamətini tapmalı.

Həlli.

Nöqtənin verilmiş andakı sürət və təcilini tapmaq üçün əvvəlcə onun istənilən andakı sürət və təcilinin x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını aşağıdakı məlum ifadələrdən tapırıq:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/san}, v_y = \frac{dy}{dt} = 2t \text{ m/san},$$

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0, w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = 2 \text{ m/san}^2.$$

Sonra nöqtənin sürət və təcilinin qiymət və istiqamətini tapırıq:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 4t^2}, w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ m/san}^2,$$

$$\cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{v_x}{v} = \frac{2}{\sqrt{4 + 4t^2}}, \cos(\bar{w}, \bar{i}) = \frac{w_x}{w} = \frac{0}{2} = 0.$$

Bu ifadələrdə $t_1 = 1 \text{ san}$ qiymətini yazıb nöqtənin həmin andakı sürət və təcilinin qiymət və istiqamətini tapırıq:

$$v_1 = \sqrt{4 + 4t_1^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} \text{ m/san}, w_1 = 2 \text{ m/san}^2,$$

$$\cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(\bar{w}, \bar{i}) = 0.$$

Buradan nöqtənin sürət və təcilinin x oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaqları tapırıq:

$$\angle(\bar{v}, \bar{i}) = 45^\circ, \angle(\bar{w}, \bar{i}) = 90^\circ.$$

Məsələ 9.16

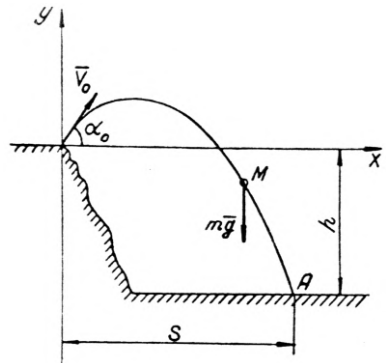
Sahil artilleriyasının topu dəniz səviyyəsindən $h = 30$ m hündürlüyündə yerləşir. Bu topdan üfqlə $\alpha_0 = 45^\circ$ bucaq əmələ gətirən istiqamətdə atəş açılır. Mərminin başlanğıc sürəti $v_0 = 1000$ m/san. Mərminin dəniz səviyyəsində olan hədəfə topdan hansı məsafədə dəyəcəyini tapmalı. Havanın müqavimətini nəzərə almamalı (Şək. 9.13).

Həlli.

Əvvəlcə mərminin hərəkət tənliyini çıxaraq. Şəkildə mərminin trayektoriyası üzərində cari M vəziyyəti göstərilmişdir. Məlum olduğu kimi, müqavimətsiz mühitdə yer səthi yaxınlığında mərmə $g = 9,81$ m/san² sərbəstdüşmə təcili ilə hərəkət edir. Bu təcil şəkildə göstərilmiş Oxy koordinat sisteminin y oxuna paralel olub, onun əksinə yönəlir. Onda həmin təcilin x və y oxları üzərindəki proyeksiyaları belə olar:

$$w_x \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, w_y \frac{d^2 y}{dt^2} = -g. \quad (9.23)$$

Bu diferensial tənlikləri həll edib mərminin hərəkət tənliklərini tapaq. Bunun üçün həmin tənliklərə başlanğıc şərtləri əlavə etmək lazımdır. Bu şərtlər



Şəkil 9.13

belə ifadə olunur:

$$t = 0 \text{ olduqda } \begin{aligned} x_0 &= 0, y_0 = 0, \\ v_{ox} &= v_0 \cos \alpha_0, v_{oy} = v_0 \sin \alpha_0. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Əvvəlcə (9.23) tənliklərindən birincisini inteqrallayaq.

Bunun üçün $v_x = \frac{dx}{dt}$ ifadəsindən istifadə edərək, həmin tənliyi bu şəkildə yazı bilərik:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0.$$

Buradan $v_x = C_1$.

(9.24) başlanğıc şərtlərinə əsasən $C_1 = v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$.

Onda $v_x = v_0 \cos \alpha_0$.

Buradan görürük ki, mərmə müqavimətsiz mühitdə hərəkət etdikdə, onun sürətinin x oxu üzərindəki proyeksiyası sabit qalır.

Yuxarıdakı ifadədə $v_x = \frac{dx}{dt}$ yerinə yazıb tapırıq:

$$dx = v_0 \cos \alpha \cdot dt.$$

Bu ifadəni inteqrallayıb alırıq:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t + C_2.$$

Bu ifadəyə daxil olan naməlum C_2 inteqral sabitini (9.24) başlanğıc şərtlərinə əsasən başlanğıc şərtlərinə əsasən tapırıq:

$$0 = 0 + C_2, \quad C_2 = 0.$$

Onda $x = v_0 t \cos \alpha_0$.

İndi (9.23) diferensial tənliklərindən ikincisini inteqrallayaq. Bunun üçün $v_y = \frac{dy}{dt}$ ifadəsindən istifadə edək. Onda həmin tənlik bu şəkildə yazılar:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g.$$

Buradan $dv_y = -g dt$.

Bu ifadəni inteqrallayıb alırıq: $v_y = -gt + C_3$.

Buradakı naməlum C_3 inteqral sabitini tapmaq üçün (9.24) başlanğıc şərtlərindən istifadə edirik:

$$v_{oy} = v_0 \sin \alpha_0 = 0 + C_3.$$

Buradan $C_3 = v_0 \sin \alpha_0$ tapırıq.

Onda yuxarıdakı ifadə bu şəkildə yazılar:

$$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt.$$

Burada $v_y = \frac{dy}{dt}$ ifadəsini yazıb tapırıq:

$$dy = v_0 \sin \alpha_0 \cdot dt - g dt.$$

Bu ifadəni inteqrallayıb alırıq:

$$y = v_0 t \sin \alpha_0 - g \frac{t^2}{2} + C_4.$$

Naməlum C_4 inteqral sabitini tapmaq üçün yenə də (9.24) başlanğıc şərtlərindən istifadə edirik:

$$0 = 0 - 0 + C_4,$$

buradan $C_4 = 0$ tapırıq.

Onda

$$y = v_0 t \sin \alpha_0 - g \frac{t^2}{2}.$$

Beləliklə, mərminin hərəkət tənlikləri belə olur:

$$x = v_0 t \cos \alpha_0, \quad y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{gt^2}{2}. \quad (9.25)$$

Bu, üfüqlə α_0 bucağı təşkil edən istiqamətdə koordinat başlanğıcından $\overline{v_0}$ sürəti ilə atılmış mərminin və istənilən cismin müqavimətsiz mühitdə hərəkət tənlikləridir.

İndi mərminin dəydiyi dəniz səviyyəsində olan A hədəfinin axtardığımız S məsafəsini tapaq. Bunun üçün A nöqtəsinin y ordinatının h -a bərabərlik şərtindən istifadə edirik. Odur ki, (9.25) tənliklərindən ikincisində $y = -h$ yazaraq, oradan mərminin hədəfə dəydiyi t_A zaman anını tapırıq:

$$-h = v_0 t_A \sin \alpha_0 - \frac{gt_A^2}{2}.$$

Bu kvadrat tənliyi həll edib alırıq:

$$t_A = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} \pm \frac{1}{g} \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 + 2gh}.$$

Burada t_A zamanı üçün müsbət və mənfi qiymətlər alırıq. Bu məsələdə zaman mənfi qiymət ala bilməz. Odur ki, zamanın müsbət qiymətini qəbul edirik. Buna əsasən

$$t_A = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} + \frac{1}{g} \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 + 2gh}$$

qiymətini (7.25) tənliklərindən birincisində yazıb oradan naməlum S məsafəsini tapırıq:

$$S = v_0 \cos \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} + \frac{1}{g} \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 + 2gh} \right).$$

Burada $v_0 = 1000 \text{ m/san}$, $h = 30 \text{ m}$, $\alpha_0 = 45^\circ$ və $g = 9,81 \text{ m/san}^2$ qiymətlərini yazıb alırıq:

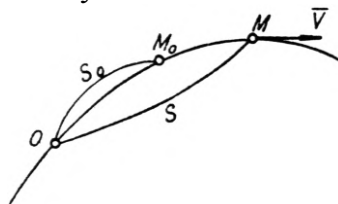
$$S = 102000 \text{ m} = 102 \text{ km}.$$

9.3. Nöqtənin hərəkətinin təbii üsulla verilişində

sürət və təcilinin tapılması

Yuxarıda qeyd etdik ki, nöqtənin hərəkətinin təbii formadakı verilişində onun trayektoriyası verilməli və bu trayektoriya üzrə aşağıdakı hərəkət tənliyi məlum olmalıdır:

$$S = f(t).$$



Şəkil 9.14

Şək. 9.14-də nöqtənin trayektoriyası üzərində yerləşən O nöqtəsi S qövsi koordinat başlanğıcıdır, M_0

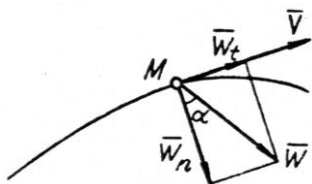
və M nöqtənin başlanğıc və baxdığımız t zaman anındakı vəziyyətləridir. S_0 və S nöqtənin həmin vəziyyətlərdəki qövsi koordinatlarıdır.

Nöqtənin hərəkətinin bu üsulla verilişində onun sürəti qiymətcə s qövsi koordinatından zamana görə alınmış törəmənin mütləq qiymətinə bərabərdir, istiqamətcə nöqtənin trayektoriyasına toxunan üzrə onun hərəkət istiqamətində yönəlir (Şək. 9.14), yəni

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right|.$$

Nöqtənin sürətinin trayektoriyasına toxunan üzərindəki proyeksiyası belə tapılır:

$$v_r = \frac{ds}{dt}.$$



Şəkil 9.15

Əyri xətt üzrə hərəkət edən nöqtənin $\bar{w}$ təcili onun $\bar{w}_t$ toxunan və $\bar{w}_n$ normal təcillərinin həndəsi cəminə bərabərdir (Şək. 9.15). Nöqtənin toxunan təcili qiymətcə onun sürətinin trayektoriyasına toxunan üzərindəki proyektoriyasından zamana görə alınmış törəmənin mütləq qiymətinə bərabərdir, istiqamətcə nöqtənin trayektoriyasına toxunan istiqamətdə yönəlir; yəni

$$w_t = \left| \frac{dv_r}{dt} \right| = \left| \frac{d^2s}{dt^2} \right|.$$

Nöqtənin normal təcili qiymətcə $\frac{v^2}{\rho}$ -ya bərabər olub, istiqamətcə onun trayektoriyasına baş normal istiqamətində ayrılık mərkəzinə doğru yönəlir, yəni

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (9.26)$$

Burada ρ nöqtənin trayektoriyasının verilmiş vəziyyətdəki ayrılık radiusudur.

Nöqtənin hərəkətinin təbii formadakı verilişində təcili qiymət və istiqamətcə belə tapılır:

$$w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}, \quad (9.27)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_t}{w_n} = \frac{\left| \frac{dv_\tau}{dt} \right|}{\frac{v^2}{\rho}}.$$

Nöqtənin təcilinin onun trayektoriyasına toxunan və baş normal üzərindəki proyeksiyaları isə belə tapılır:

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Nöqtənin sürətinin trayektoriyasına toxunan üzərindəki proyeksiyası sabit qalarsa, onun belə hərəkətinə müntəzəm hərəkət deyilir. Nöqtənin müntəzəm hərəkətinin tənliyi belə olur:

$$s = s_0 + v_\tau t.$$

Nöqtənin təcilinin onun trayektoriyasına toxunan üzərindəki proyeksiyası sabit qalarsa, onun belə hərəkətinə müntəzəm dəyişən hərəkət deyilir.

Nöqtənin müntəzəm dəyişən hərəkətinin tənlikləri aşağıdakı şəkildə olur:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 \pm w_t t, \\ s &= s_0 + v_0 t \pm \frac{w_t t^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.28)$$

Bu ifadələrdəki w_t -nin qarşısındakı müsbət işarəli formullar müntəzəm artan hərəkət üçün, mənfi işarəli formullar isə müntəzəm azalan hərəkət üçün tətbiq olunmalıdır, bu şərtlə ki, nöqtə əyrinin müsbət istiqamətində hərəkət etsin.

Məsələ 9.17

Nöqtənin hərəkət tənlikləri verilmişdir:

$$x = 2t, \quad y = t^2 \quad (9.29)$$

(t saniyə ilə, x və y isə santimetrlə ölçülür). $t = 1$ san anında nöqtənin toxunan, normal, tam təcilini və həmçinin onun trayektoriyasının əyrilik radiusunu tapmalı.

Həlli.

Əvvəlcə (9.29) tənliklərinə əsasən nöqtənin sürət və təcilinin istənilən t zaman anındakı qiymətini tapırıq.

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = 2 \text{ sm/san}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 2t \text{ sm/san}, \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2} \text{ sm/san}. \end{aligned} \right\} \quad (9.30)$$

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = 2 \text{ sm/san}^2,$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 2 \text{ sm/san}^2.$$

Sonra nöqtənin toxunan təcilini tapırıq:

$$w_t = \left| \frac{dv}{dt} \right| = 2 \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}. \quad (9.31)$$

Daha sonra (9.27) ifadəsindən nöqtənin normal təcilini tapırıq:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_t^2} = \sqrt{4 - \frac{4t^2}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{4}{1+t^2}}. \quad (9.32)$$

(7.30), (7.31) və (7.32) ifadələrində $t=1 \text{ san}$ qiymətini yazıb nöqtənin həmin zaman anındakı sürətini, toxunan və normal təcillərini tapırıq:

$$v = 2\sqrt{1+1} = 2\sqrt{2} \text{ sm/san}, \quad w_t = \frac{2}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} \text{ sm/san}^2,$$

$$w_n = \sqrt{\frac{4}{1+1}} = \sqrt{2} \text{ sm/san}^2.$$

Nəhayət, (9.26) ifadəsindən nöqtənin $t=1 \text{ san}$ zaman anındakı vəziyyətində onun trayektoriyasının əyrilik radiusunu tapırıq:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \text{ sm}.$$

Məsələ 9.18

Qatar 72 km/saat sürəti ilə hərəkət edir. Tormozlanma vaxtı ona $0,4 \text{ m/san}^2$ təcil verilir. Qatarı, stansiyaya çatmazdan neçə saniyə əvvəl və hansı məsafədə tormozlamağa başlamaq lazımdır?

Həlli.

Əvvəlcə qatarın başlanğıc andakı $v_0 = 72 \text{ km/saat}$ sürətini m/san ölçü vahidinə çeviririk:

$$v_0 = 72 \text{ km/saat} = 72 \cdot \frac{1000}{3600} = 20 \text{ m/san}.$$

Qatar dayanan anda onun son sürəti sıfıra bərabər olur, yəni $v_1 = 0$.

Ayındır ki, qatar müntəzəm azalan sürətlə hərəkət edir. Odur ki, (7.28) ifadələri bu hərəkət üçün aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 - w_t t, \\ s &= s_0 + v_0 t - \frac{w_t t^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

Qatarın baxdığımız müntəzəm azalan hərəkətindəki başlanğıc vəziyyətini (tormozlanmaya başlanan andakı vəziyyətini) onun getdiyi s yolunun (qövsü koordinatının) başlanğıcı qəbul edək. Onda $s_0 = 0$ olar.

Yuxarıda tapdığımız $v_0 = 20 \text{ m/san}$, $v_1 = 0$, $s_0 = 0$ və verilmiş $w_t = 0,4 \text{ m/s}^2$ qiymətlərini (9.33) ifadələrində

yerinə yazıb alırıq:

$$0 = 20 = 0,4t_1,$$

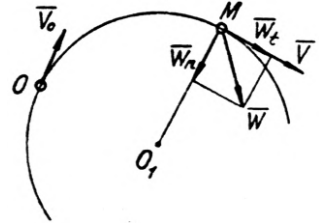
$$s_1 = 20t_1 - \frac{0,4t_1^2}{2}.$$

Buradan qatarın t_1 tormozlanma zaman fasiləsini və onun dayanana qədər getdiyi s_1 məsafəsini tapırıq:

$$t_1 = 50 \text{ san}, s_1 = 500 \text{ m}.$$

Məsələ 9.19

54 *km/saat* başlanğıc sürəti olan qatar sonrakı 30 *san* içərisində 600 *m* yol getmişdir. Qatarın hərəkətini bərabər dəyişən hesab edərək, onun 30-cu *san*-nin sonundakı sürət və təcilini tapmalı. Qatarın hərəkəti, radiusu $R=1 \text{ km}$ olan çevrə üzərində baş verir (Şək. 9.16).



Şəkil 9.16

Həlli.

Əvvəlcə qatarın hərəkətinin dəyişmə xarakterini müəyyən edək. Bunun üçün qatarın $v_0 = 54 \text{ km/saat}$ başlanğıc sürətinin və $R=1 \text{ km}$ radiusunun ölçü vahidlərini metr və saniyə ölçü vahidləri ilə ifadə edirik:

$$v_0 = 54 \text{ km/saat} = 54 \cdot \frac{1000}{3600} = 15 \text{ m/san};$$

$$R = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}.$$

Əgər qatar 15 m/san başlanğıc sürəti ilə sabit sürətlə hərəkət etsəydi, o 30 san ərzində 450 m yol gedərdi. Məsələnin şərtində isə qatar 600 m yol gedir. Buradan belə nəticə çıxır ki, qatar müntəzəm artan hərəkət edir. Odur ki, bu hərəkətin tənliklərindən istifadə edirik:

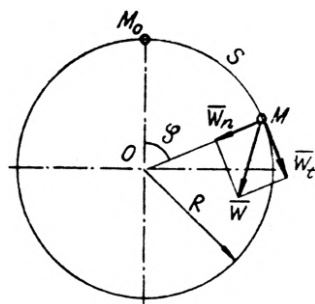
$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + w_t t, \\ s_1 &= s_0 + v_0 t + \frac{w_t t^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

Qatarın başlanğıc andakı vəziyyətini onun s qövsü koordinatının başlanğıcı qəbul edib yazırıq: $s_0 = 0$. Bu qiyməti və məsələdə verilmiş $v_0 = 15 \text{ m/san}$, $s_1 = 600 \text{ m}$, $t_1 = 30 \text{ san}$ qiymətlərini (9.34) tənliklərindən ikincisində yerinə yazıb, oradan qatarın w_t toxunan təcilinin qiymətini tapırıq:

$$w_t = \frac{2s_1 - 2v_0 t_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 600 - 2 \cdot 15 \cdot 30}{30^2} = \frac{1}{3} \text{ m/s}^2$$

Sonra toxunan təcilin bu tapdığımız qiymətini (9.34) ifadələrindən birincisində yerinə yazıb, oradan qatarın 30-cu saniyənin sonundakı v_1 sürətinin qiymətini tapırıq:

$$v_1 = v_0 + w_t t_1 = 15 + \frac{1}{3} \cdot 30 = 25 \text{ m/san}.$$

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{25^2}{1000} = 0,625 m/san^2.$$
$$w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 0,625^2} = 0,708 m / san^2.$$
$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + w_t t, \\ s &= s_0 + v_0 t + \frac{w_t t^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.35)$$


158

başlayan anda) sıfıra bərabərdir, yəni $v_0 = 0$. Qatarın $t_1 = 3 \text{ dəq} = 180 \text{ san}$ zaman anındakı sürətini m/san ilə ifadə edirik:

$$v_1 = 72 \text{ km/saat} = 72 \cdot \frac{1000}{3600} = 20 \text{ m/san}.$$

Bu qiymətləri (9.35) tənliklərindən birincisində yerinə yazıb qatarın w_t toxunan təcilinin qiymətini tapırıq:

$$w_t = \frac{v_1}{t_1} = \frac{20}{180} = \frac{1}{9} \text{ m/san}^2.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, qatarın bu tapdığımız toxunan təcilinin qiyməti onun hərəkəti zamanı sabit qalır.

Qatarın $t_2 = 2 \text{ dəq} = 120 \text{ san}$ zaman anındakı təcilini tapmaq üçün bu qiyməti (9.35) ifadələrindən birincisində yerinə yazıb həmin andakı v_2 sürətini tapırıq:

$$v_2 = v_0 + w_t t_2 = 0 + \frac{1}{9} \cdot 120 = \frac{40}{3} \text{ m/san}.$$

Nəhayət qatarın t_2 zaman anındakı toxunan, normal və tam təcillərini aşağıdakı məlum ifadələrdən tapırıq:

$$w_{t2} = w_{t1} = \frac{1}{9} \text{ m/san}^2, w_{n2} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{(\frac{40}{3})^2}{800} = \frac{2}{9} \text{ m/san}^2,$$

$$w_2 = \sqrt{w_{t2}^2 + w_{n2}^2} = \sqrt{(\frac{1}{9})^2 + (\frac{2}{9})^2} = 0,25 \text{ m/san}^2.$$

Məsələ 9.21

Qatar, radiusu $R=800\text{ m}$ olan çevrə qövsü üzəri ilə bərabər yavaşlayan hərəkət edir: onun başlanğıc sürəti $v_0=54\text{ km/saat}$, son sürəti $v_1=18\text{ km/saat}$; getdiyi yol isə $s_1=800\text{ m}$ -ə bərabərdir. Qatarın, qövsün başlanğıc və sonundakı tam təcilini, həmçinin onun bu qövs üzrə hərəkət etdiyi müddətini tapmalı.

Həlli.

Qatar müntəzəm azalan hərəkət etdiyi üçün bu hərəkətin tənliklərindən istifadə edirik:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_0 - w_t t_1, \\ s &= s_0 + v_0 t_1 - \frac{w_t t_1^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.36)$$

Əvvəlcə qatarın verilmiş başlanğıc və son sürətlərini m/san ölçü vahidi ilə ifadə edək:

$$\begin{aligned} v_0 &= 54\text{ km/saat} = 54 \cdot \frac{1000}{3600} = 15\text{ m/san}, \\ v_1 &= 18\text{ km/saat} = 18 \cdot \frac{1000}{3600} = 5\text{ m/san}. \end{aligned}$$

Bu qiymətləri (9.36) ifadələrinin birincisində yerinə yazıb, $s_0=0$ qəbul edərək, oradan $w_t t_1$ hasilini tapırıq:

$$w_t t_1 = v_0 - v_1 = 15 - 5 = 10\text{ m/san}. \quad (9.37)$$

Bu qiyməti (9.36) ifadələrindən ikincisində yerinə yazıb oradan t_1 zamanını tapırıq:

$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{w_t t_1^2}{2}.$$

Buradan

$$t_1 = \frac{s_1}{v_0 - \frac{w_t t_1}{2}} = \frac{800}{15 - \frac{10}{2}} = 80 \text{ san.}$$

Bu qiyməti (9.37) ifadəsində yerinə yazıb oradan qatarın hərəkəti zamanı sabit qalan toxunan təcilini tapırıq:

$$w_t = \frac{10}{t_1} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} m / san^2.$$

Sonra qatarın t_0 və t_1 zaman anlarındakı normal və tam təcillərini tapırıq:

$$w_{n0} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{15^2}{800} = \frac{9}{32} m / san^2, \quad w_{n1} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{5^2}{800} = \frac{1}{32} m / san^2,$$

$$w_0 = \sqrt{w_t^2 + w_{n0}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{9}{32}\right)^2} = 0,308 m / san^2,$$

$$w_1 = \sqrt{w_t^2 + w_{n1}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{32}\right)^2} = 0,129 m / san^2.$$

Məsələ 9.22

Nöqtə, radiusu $R = 20 \text{ sm}$ olan çevrə qövsü üzrə hərəkət edir. Nöqtənin trayektoriya üzrə hərəkət qanunu $s = 20 \sin \pi t$ şəklindədir (t saniyə, s santimetrlə ölçülür). $t = 5 \text{ san}$ anında nöqtənin sürətinin qiymət və istiqamətini, toxunan, normal və tam təcillərini tapmalı.

Həlli.

Əvvəlcə nöqtənin sürətinin onun hərəkət trayektoriyasına toxunan üzərindəki proyeksiyasını tapaq:

$$v_{\tau} = \frac{ds}{dt} = 20\pi \cos \pi t.$$

Burada $t_1 = 5$ san qiymətini yazıb alırıq:

$$v_{\tau} = 20\pi \cos 5\pi = -20\pi \frac{sm}{san}.$$

Onda nöqtənin t_1 zaman anındakı sürəti qiymətcə belə olar:

$$v_1 = |v_{\tau 1}| = 20\pi \frac{sm}{san}.$$

Buradan görürük ki, $v_{\tau_1} < 0$ olduğu üçün nöqtənin sürəti çevrə qövsünə toxunan istiqamətdə onun müsbət qəbul olunan tərəfinin əksinə yönəlir.

İndi nöqtənin təcilinin çevrə qövsünə toxunan üzərindəki proyeksiyasını tapaq:

$$w_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} = -20\pi^2 \sin \pi t.$$

Burada $t_1 = 5$ san qiymətini yazıb alırıq:

$$w_{\tau} = -20\pi^2 \sin 5\pi = 0.$$

Onda nöqtənin toxunan təcili də qiymətcə sıfıra bərabər

olar, yəni $w_t = |w_\tau| = 0$.

Sonra nöqtənin t_1 zaman anındakı normal təcilini tapırıq:

$$w_{n1} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{(20\pi)^2}{20} = 20\pi^2 \text{ sm} / \text{san}^2.$$

Nəhayət, nöqtənin t_1 zaman anındakı tam təcilini tapırıq:

$$w = \sqrt{w_t^2 + w_{n1}^2} = \sqrt{0 + (20\pi^2)^2} = 20\pi^2 \text{ sm} / \text{san}^2.$$

X Fəsil. Bərk cisim kinematikası

10.1. Bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkəti

Bərk cismin hərəkəti zamanı onun iki nöqtəsi tərpənməz qalarsa belə hərəkətə bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkəti deyilir. Bu iki nöqtədən keçən oxun bütün nöqtələrinin sürəti sıfıra bərabər olur. Həmin oxa cismin fırlanma oxu deyilir.

Bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkətinin tənliyi belə olur:

$$\varphi = f(t).$$

Burada φ – cismin tərpənməz z oxu ətrafında dönmə bucağıdır və radianla ölçülür, belə ki, z oxunun müsbət istiqamətindən baxdıqda cisim bu ox ətrafında saat əqrəbinin fırlanma istiqamətinin əksinə fırlanırsa, φ bucağı müsbət, əks halda bu bucaq mənfi olur.

Dönmə bucağından zamana görə alınmış törəməyə cismin z oxu ətrafında fırlanma bucaq sürəti deyilir və ω_z ilə işarə olunur:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Bucaq sürətindən zamana görə alınmış törəməyə cismin z oxu ətrafında fırlanma bucaq təcili deyilir və ε_z ilə işarə edilir:

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}.$$

Tərpənməz z oxu ətrafında fırlanan cismin ω_z bucaq sürəti sabit qalarsa, bu cür hərəkətə cismin müntəzəm fırlanma hərəkəti deyilir. Bu hərəkətin tənliyi belə olur:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_z t.$$

Burada φ_0 – cismin başlanğıc anda tərpənməz z oxu ətrafında dönmə bucağıdır.

Müntəzəm fırlanma hərəkətində cismin bucaq sürətinin ω mütləq qiymətini aşağıdakı ifadədən tapmaq olar:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (10.1)$$

Burada n cismin tərpənməz ox ətrafında ox ətrafında 1 dəqiqədəki dövrlər sayıdır.

Tərpənməz z oxu ətrafında fırlanan cismin ε_z bucaq təcili sabit qalarsa, bu cür hərəkətə müntəzəm dəyişən fırlanma hərəkəti deyilir. Bu hərəkətin tənlikləri belə ifadə olunur:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \pm \varepsilon t, \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Burada ω_0 – cismin başlanğıc bucaq sürətinin mütləq qiymətidir, yəni $\omega_0 = |\omega_{0z}|$; ε – cismin ε_z bucaq təcilinin mütləq qiymətidir, yəni $\varepsilon = |\varepsilon_z|$.

Yuxarıdakı (10.2) ifadələrindəki ε kəmiyyətinin qarşısındakı müsbət işarəli düsturlar cismin müntəzəm artan fırlanma hərəkəti üçün, mənfi işarəli düsturlar isə müntəzəm azalan fırlanma hərəkəti üçün tətbiq olunmalıdır, bu şərtlə ki, cisim tərpənməz z oxu ətrafında saat əqrəbinin hərəkətinin əksinə fırlansın.

Fırlanan cismin nöqtələri mərkəzləri fırlanma oxu üzərində olan və bu oxa perpendikulyar müstəvilər üzərində yerləşən çevrələr üzrə hərəkət edir. Bu çevrələrin radiuslarına həmin nöqtələrin fırlanma radiusları deyilir.

Tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin hər hansı nöqtəsinin sürətinin qiyməti belə tapılır:

$$v = R\omega.$$

Burada R – nöqtənin fırlanma radiusudur.

Tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin hər hansı bir nöqtəsinin toxunan və normal təcili qiymətcə belə tapılır:

$$w_t = R\varepsilon, w_n = R\omega^2.$$

Həmin nöqtənin tam təcili isə qiymət və istiqamətcə aşağıdakı düsturlardan tapılır:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{w_t}{w_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Burada α – nöqtənin təcilinin fırlanma radiusu ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır.

Məsələ 10.1

Cisim sükunət vəziyyətindən bərabər yeyinləşən fırlanma hərəkətinə başlayır və birinci 2 dəqiqə ərzində $N = 3600$ dövr etmiş olur. Bucaq təcilini tapmalı.

Həlli.

Məsələnin şərtindən görünür ki, cisim müntəzəm artan fırlanma hərəkəti edir. Odur ki, (8.2) ifadələrini aşağıdakı kimi yazırıq:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \varepsilon t, \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.\end{aligned}\tag{10.4}$$

Məsələni həll etmək üçün əvvəlcə cismin $t_1 = 2 \text{ dəq} = 120 \text{ san}$ zaman anındakı φ_1 dönmə bucağını tapırıq:

$$\varphi_1 = 2\pi N = 2\pi \cdot 3600 = 7200\pi \text{ rad}.$$

Cisim sükunət vəziyyətindən hərəkətə başladığı üçün başlanğıc andakı bucaq sürəti sıfıra bərabərdir, yəni $\omega_0 = 0$.

Cismin tərpənməz ox ətrafında φ dönmə bucağını onun başlanğıc andakı vəziyyətindən hesablasaq, $\varphi_0 = 0$ olar. Odur ki, $\varphi_0 = 0$ qəbul edərək, yuxarıda tapdığımız t_1 , φ_1 və ω_0 kəmiyyətlərinin qiymətlərini (8.4) ifadələrindən ikincisində yerinə yazaraq, oradan cismin ε bucaq təcilini tapırıq:

$$\varepsilon = \frac{2\varphi_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 7200\pi}{120^2} = \pi \text{ rad/san}^2.$$

Məsələ 10.2

Tərpənməz oxu olan çarxa $2\pi \text{ rad/san}$ başlanğıc bucaq sürəti verilir. Çarx 10 *dövr* etdikdən sonra yastıqlardakı sürtünmə nəticəsində dayanır. Çarxın sabit olan ε bucaq təcilini tapmalı.

Həlli.

Məsələnin şərtindən görürük ki, çarx tərpənməz ox ətrafında müntəzəm azalan fırlanma hərəkəti edir. Odur ki, bu hərəkətin aşağıdakı tənliklərindən istifadə edirik:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 - \varepsilon t, \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}.\end{aligned}\tag{10.5}$$

Çarxın hərəkətinin sonunda bucaq sürəti sıfıra bərabər olur, yəni $\omega_1 = 0$. Bu hərəkəti t_1 zaman fasiləsində çarx $N = 10$ *dövr* edir. Onda çarxın t_1 zaman müddətindəki φ_1 dönmə bucağı belə olar:

$$\varphi_1 = 2\pi N = 2\pi \cdot 10 = 20\pi \text{ rad}.$$

Bu tapdığımız qiymətləri (10.5) ifadələrindən birincisində nəzərə alıb oradan $\varepsilon_1 = \omega_0 = 2\pi$ tapırıq. Bu qiyməti və $\omega_0 = 0$ qiymətini ikinci tənlikdə yerinə yazaq:

$$\varphi_1 = \omega_0 t_1 - \frac{2\pi}{2} \cdot t_1.$$

Buradan t_1 zaman anını tapırıq:

$$t_1 = \frac{\varphi_1}{\omega_0 - \pi} = \frac{20\pi}{2\pi - \pi} = 20 \text{ san.}$$

Daha sonra bu qiyməti (10.5) ifadələrindən birincisində yerinə yazıb çarxın ε bucaq təcilini tapırıq:

$$\varepsilon = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1} = \frac{2\pi}{20} = 0,1\pi \text{ rad/san}^2.$$

Məsələ 10.3

Radiusu $R=2 \text{ m}$ olan nazim çarx sükunət vəziyyətindən bərabər yeyinləşən fırlanma hərəkəti etməyə başlayır. $t_1=10 \text{ san}$ keçdikdən sonra onun çənbəri üzərindəki nöqtənin sürəti $v_1=100 \text{ m/san}$ olur. $t_2=15 \text{ san}$ anı üçün çarxın çənbəri üzərindəki nöqtələrin sürətini, normal və toxunan təcillərini tapmalı.

Həlli.

Əvvəlcə nazim çarxın çənbəri üzərindəki nöqtənin verilmiş v_1 sürətinə əsasən $t_1=10 \text{ san}$ zaman anındakı ω_1 bucaq sürətini tapırıq:

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{100}{2} = 50 \text{ rad/san}.$$

Sonra müntəzəm artan fırlanma hərəkətinin (10.2)

tənliklərinin birincisindən istifadə edərək, nazim çarxın başlanğıc andakı bucaq sürətinin sıfıra bərabər olduğunu nəzərə alaraq, onun ε ucaq təcilini tapırıq:

$$\varepsilon = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1} = \frac{50}{10} = 5 \text{ rad/san}^2.$$

Daha sonra həmin ifadədən $t_2 = 15 \text{ san}$ zaman anında nazim çarxın ω_2 bucaq çürətini tapırıq:

$$\omega_2 = \omega_0 + \varepsilon t_2 = 0 + 5 \cdot 15 = 75 \text{ rad/san}.$$

Nəhayət, nazim çarxın çənbəri üzərindəki nöqtənin $t_2 = 15 \text{ san}$ zaman anındakı sürətini, normal və toxunan təcillərini tapırıq:

$$v_2 = R\omega_2 = 2 \cdot 75 = 150 \text{ m/san},$$

$$w_n = R\omega_2^2 = 2 \cdot 75^2 = 11250 \text{ m/san}^2, w_t = R\varepsilon = 2 \cdot 5 = 10 \text{ m/san}^2.$$

Məsələ 10.4

Radiusu $R = 10 \text{ sm}$ olan A valı ona sarıyan ipdən asılmış P çəki daşı ilə fırlandırılır. Daşın hərəkəti $x = 100 \cdot t^2$ tənliyi ilə verilir. Burada $x \text{ sm}$ ilə ifadə olunan ipin valın səthindən ayrıldığı B nöqtəsindən daşın məsafəsidir. $t \text{ san}$ ilə ölçülür. t zaman anında valın ω bucaq sürətini, ε bucaq təcilini, həmçinin valın səthi üzərindəki M nöqtəsinin $\bar{w}$ tam təcilini tapmalı (Şək. 10.1).

$$w_n = R\omega^2 = 10(20t)^2 = 4000t^2 \text{ sm} / \text{san}^2,$$

$$w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = \sqrt{200^2 + (4000t^2)^2} = 200\sqrt{1 + 400t^4} \text{ sm} / \text{san}^2.$$

10.2. Fırlanma ötürmələri

İndi bərk cismin fırlanma hərəkətlərinin çevrilməsinə aid aşağıdakı məsələlərin həllinə baxaq. Fırlanma hərəkətini bir valdan (çarxdan) digər vala (çarxa) ötürmək üçün istifadə olunan mexanizmlərə ötürmə mexanizmləri deyilir. Hərəkəti ötürən çarx aparan çarx, hərəkət ötürülən çarx isə aparılan çarx adlanır. Aparan çarxın ω_1 bucaq sürətinin aparılan çarxın ω_2 bucaq sürətinə olan nisbətinə i ötürmə ədədi deyilir:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

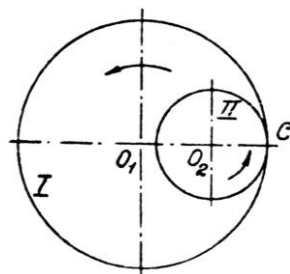
Əgər hərəkət bir valdan digərinə dişli çarxlar vasitəsi ilə ötürülürsə, onda ötürmə ədədi aşağıdakı ifadədən tapıla bilər:

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Burada r_1 və r_2 – aparan və aparılan dişli çarxların radiusları, z_1 və z_2 – isə həmin çarxların dişlərinin sayıdır.

Məsələ 10.5

Diametri $D_1 = 360 \text{ mm}$ olan I diş-li çarxın bucaq sürəti $\frac{10\pi}{3} \text{ rad/san}$ -yə bərabərdir. I dişli çarx ilə daxili ilişmədə olan və ondan 3 dəfə böyük dövr edən II dişli çarxın diametri nəyə bərabər olmalıdır (Şək. 10.2)?



Şəkil 10.2

Həlli.

Şəkildən aydındır ki, daxili ilişmədə olan I və II çarxlarının bir-birilə ilişdikləri (toxunduqları) C nöqtəsindəki hər iki çarxın nöqtələrinin sürətləri bir-birinə bərabərdir. Bu şərtdən istifadə edərək, hər iki çarx üçün yazı bilərik:

$$v_C = \omega_1 \frac{D_1}{2} = \omega_2 \frac{D_2}{2}.$$

Burada ω_1 və ω_2 – I və II çarxların bucaq sürətləridir və (10.1) formuluna əsasən belə tapılır:

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}, \omega_2 = \frac{\pi n_2}{30}.$$

Bu qiymətləri yuxarıdakı ifadədə yerinə yazsaq, alırıq:

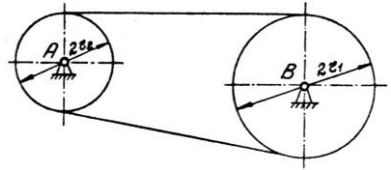
$$\frac{\pi n_1}{30} \cdot \frac{D_1}{2} = \frac{\pi n_2}{30} \cdot \frac{D_2}{2}.$$

Buradan verilmiş $n_2 = 3n_1$ şərtini nəzərə alaraq, II çarxın diametrini tapırıq:

$$D_2 = \frac{n_1 D_1}{n_2} = \frac{n_1 D_1}{3n_1} = \frac{360}{3} = 120 \text{ mm}$$

Məsələ 10.6

A qasnağı olan dinamomaşın, sükunət vəziyyətindən buxar maşınının B qasnağın-dan sonsuz qayış vasitəsilə hərəkətə gətirilir. Qasnaqların radiusları belədir: $r_1 = 75 \text{ sm}$, $r_2 = 30 \text{ sm}$; buxar maşını işə buraxıldıqdan sonra onun bucaq təcili $0,4\pi \text{ rad/san}^2$ olur. Qayışın qasnaqlar üzərində sürüşməsinə nəzərə almayaraq, dinamomaşının neçə vaxtdan sonra $10\pi \text{ rad/san}$ edəcəyini təyin etməli (Şək. 10.3).



Şəkil 10.3

Həlli.

Məsələnin şərtinə görə qayış qasnaqlar üzərində sürüşmədiyi üçün A və B qasnaqlarının çevrələri üzərində yerləşən nöqtələrinin sürətləri bir-birinə bərabər olacaqdır. Bu şərtə əsasən yazırıq:

$$v = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2.$$

Buradan B qasnağının bucaq sürətini tapırıq:

$$\omega_1 = \frac{r_2 \omega_2}{r_1} = \frac{30 \cdot 10\pi}{75} = 4\pi \text{ rad/san}.$$

Şərtə görə qasnaqlar müntəzəm artan fırlanma hərəkəti etdiyi üçün bu hərəkətin tənliklərindən istifadə

edərək B qasnağı üçün yazırıq:

$$\omega_1 = \omega_{10} + \varepsilon_1 t_1.$$

Buradan $\omega_{10} = 0$ olduğunu nəzərə alaraq, dinamomaşının qasnağının $10\pi \text{ rad/san}$ bucaq sürətinə malik olana qədər sərf olunan zaman fasiləsini tapırıq:

$$t_1 = \frac{\omega_1}{\varepsilon_1} = \frac{4\pi}{0,4\pi} = 10 \text{ san.}$$

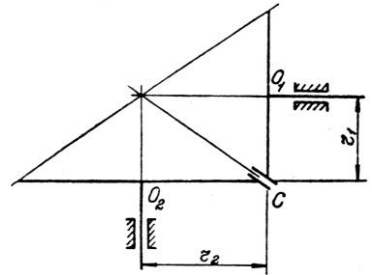
Məsələ 10.7

Radiusu $r_2 = 15 \text{ san}$ olan və $4\pi \text{ rad/san}^2$ bucaq təcili ilə bərabər yeyinlənən fırlanma hərəkəti edən O_2 konusvari dişli çarxı, radiusu $r_1 = 10$ olan O_1 konusvari çarxını fırlandırır. Sükunət vəziyyətindən hərəkət etdirilən O_1 çarxı nə qədər zaman keçdikdən sonra $144\pi \text{ rad/san}$ bucaq sürətinə malik olacaqdır (Şək. 10.4).

Həlli.

Şəkildən aydındır ki, konusvari çarxların C nöqtəsi üzərinə düşən ilişmə nöqtələrinin sürətləri bir-birinə bərabərdir. Bu şərtə əsasən hər iki konusvari çarx üçün yazırıq:

$$v_C = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2.$$



Şəkil 10.4

Buradan ikinci çarxın ω_2 bucaq sürətini tapırıq:

$$\omega_2 = \frac{r_1 \omega_1}{r_2} = \frac{10 \cdot 144\pi}{15} = 96\pi \text{ rad/san}.$$

Şərtə görə ikinci konusvari dişli çarx bərabər yeyinləşən fırlanma hərəkəti etdiyi üçün bu hərəkətin tənliklərindən istifadə edirik:

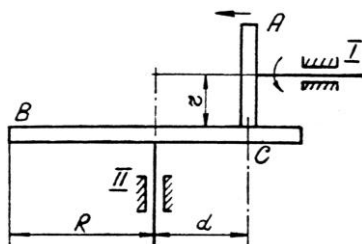
$$\omega_2 = \omega_{20} + \varepsilon_2 t_2.$$

Buradan $\omega_{20} = 0$ olduğunu nəzərə alaraq, t_2 zaman fasiləsini tapırıq:

$$t_2 = \frac{\omega_2}{\varepsilon_2} = \frac{96\pi}{4\pi} = 24 \text{ san}.$$

Məsələ 10.8

Friksion ötürmənin I apanar valı 20π rad/san bucaq sürətilə fırlanır və iş zamanı yerini elə dəyişir ki, (yerdəyişmə istiqaməti ox ilə göstərilmişdir), d məsafəsi $d = (10 - 0,5t)$ sm (t saniyə ilə ölçülür) qanunu üzrə dəyişir.



Şəkil 10.5

Tapmalı: 1) d məsafəsindən asılı olaraq II valın bucaq təcilini və 2) $d = r$ olan anda B çarxının çənbəri üzərindəki nöqtənin tam təcilini. Friksion çarxlarının radiusları belədir: $r = 5$ sm; $R = 15$ sm (Şək. 10.5).

Həlli.

Şəkildə göstərilmiş friksion ötürməsinin A və B çarxlarının C toxunma nöqtəsi üzərinə düşən nöqtələrinin sürətləri bir-birinə bərabər olduğu üçün həmin çarxlar üzərində yerləşən və baxdığımız anda bu kontakt nöqtəsi üzərinə düşən nöqtələr üçün yazıla bilər:

$$v_C = r\omega_1 = d\omega_2.$$

Buradan II çarxın ω_2 bucaq sürətini tapırıq:

$$\omega_2 = \frac{r\omega_1}{d} = \frac{5 \cdot 20\pi}{10 - 0,5t} = \frac{100\pi}{10 - 0,5t} = \frac{100\pi}{d}.$$

Bu ifadədən zamana görə törəmə alaraq, II çarxın ε_2 bucaq təcilini tapırıq:

$$\varepsilon_{2z} = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{-50\pi}{(10 - 0,5t)^2} = \frac{-50\pi}{d^2}; \varepsilon_2 = |\varepsilon_{2z}| = \frac{50\pi}{d^2}.$$

2) İkinci çarxın qasnağı üzərindəki B nöqtəsinin təcilini (10.3) ifadəsindən tapırıq:

$$w = R\sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4} = R\sqrt{\frac{50^2 \pi^2}{d^4} + \frac{100^4 \pi^4}{d^4}} = \frac{50\pi R}{d^2} \sqrt{1 + 40000\pi^2}.$$

Burada $d = r = 5 \text{ sm}$, $R = 15 \text{ sm}$ qiymətlərini yerinə yazsaq, alarıq:

$$w = 30\pi\sqrt{40000\pi^2 + 1}.$$

XI Fəsil. Bərk cismin müstəvi hərəkəti

11.1. Bərk cismin müstəvi hərəkətinin tənlikləri

Bərk cismin müstəvi hərəkəti elə hərəkətə deyilir ki, bu hərəkət zamanı cismin nöqtələrinin verilmiş tərpənməz müstəvidən olan məsafələri dəyişməsin.

Cismin belə hərəkəti, onun həmin tərpənməz müstəviyə paralel olan müstəvi ilə kəsişməsindən alınan kəsiyinin (yastı fiqurun) hərəkəti ilə tamamilə müəyyən olunur. Bu fiqurun hərəkət tənlikləri belə olur:

$$x_{O'} = f_1(t), y_{O'} = f_2(t), \varphi = f_3(t). \quad (11.1)$$

Burada $x_{O'}$, $y_{O'}$ yastı fiqur üzərində ixtiyari seçilmiş O' nöqtəsinin (qütbünün) koordinatlarıdır, φ isə fiqurun bu qütb ətrafında fırlanma bucağıdır.

Qeyd etmək lazımdır ki, yastı fiqurun hərəkətinə iki hərəkətin cəmi kimi baxmaq olar:

1. Fiqurun O' qütbü ilə birlikdə irəliləmə hərəkəti;
2. Onun bu qütb ətrafında fırlanma hərəkəti.

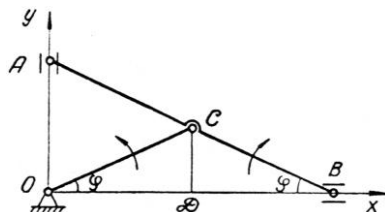
(11.1) ifadələrindəki birinci iki tənlik yastı fiqurun O' qütbü ilə birlikdə irəliləmə hərəkətinin, üçüncü tənlik isə onun bu qütb ətrafında fırlanma hərəkətinin tənlikləridir.

Məsələ 11.1

Ellipsoqrafın xətkəsi, O oxu ətrafında sabit ω_0 bucaq sürəti ilə fırlanan OC çarxqolu vasitəsilə hərəkətə gətirilir. B sürüngəcini qütb qəbul edərək, ellipsoqraf xətkəsinin müstəvi hərəkətinin tənliyini tapmalı. $OC=BC=AC=r$. Başlangıç anda AB xətkəsi üfüqi vəziyyətdə yerləşmişdir (Şək. 11.1).

Həlli.

Əvvəlcə B sürüngəcinin (qütübünün) hərəkət tənliyini tapaq. Məsələdə verilmiş şərtlərə əsasən OCB üçbucağı bərabəryanlı olduğu üçün bu üçbucağın OBC bucağı φ -yə bərabərdir. Şəkildən B nöqtəsinin koordinatlarını tapırıq:



Şəkil 11.1

$$x_B = OD + DB = OC \cos \varphi + CB \cos \varphi = 2r \cos \omega_0 t, y_B = 0.$$

Bu iki tənlik AB xəttkeşinin B qütübü ilə birlikdə irəliləmə hərəkətinin tənlikləridir. Xəttkeşin bu qütüb ətrafında fırlanan hərəkətinin tənliyi isə $\varphi = \omega_0 t$ olacaqdır.

Beləliklə, AB xəttkeşinin müstəvi hərəkətinin tənlikləri belə olur:

$$x_B = 2r \cos \omega_0 t, y_B = 0, \varphi = \omega_0 t.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, AB xəttkeşi B qütübü ətrafında saat əqrəbi istiqamətində fırlandığı üçün φ bucağı mənfi qəbul olunmalıdır.

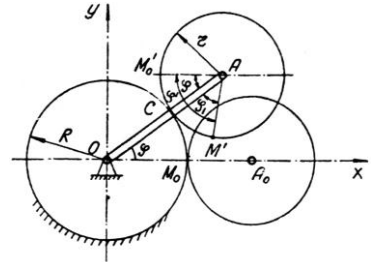
Məsələ 11.2

Radiusu r olan dişli çarx, R radiuslu tərpənməz çarx üzərində OA çarxqolu vasitəsilə diyrirlənir. Çarxqolu isə

tərpənməz çarxın O oxu ətrafında sabit ε_0 bucaq təcili ilə fırlanır. $t=0$ olduqda çarxqolunun bucaq sürəti $\omega_0=0$ və başlanğıc dönmə bucağı $\varphi_0=0$ olarsa, diyirlənən dişli çarxın A mərkəzini qütb qəbul edərək, bu çarxın hərəkət tənliklərini tərtib etməli (Şək. 11.2).

Həlli.

Şək. 11.2-də diyirlənən çarxın OA çarxqolu ilə birlikdə $t_0=0$ ($\varphi_0=0$) olan başlanğıc andakı A_0 vəziyyəti və t zaman anındakı A vəziyyəti göstərilmişdir. Bu vəziyyətdə çarxqolu O oxu ətrafında φ bucağı qədər dönmüşdür.



Şəkil 11.2

Əvvəlcə diyirlənən çarxın A mərkəzinin hərəkət tənliklərini tapaq. Şəkildən A nöqtəsinin koordinatlarını tapırıq:

$$x_A = OA \cos \varphi, y_A = OB \sin \varphi.$$

Şərtə görə OA çarxqolu müntəzəm artan fırlanma hərəkəti edir və onun başlanğıc andakı φ_0 dönmə bucağı və ω_0 bucaq sürəti sıfıra bərabərdir. Onda çarxqolunun fırlanma hərəkətinin tənliyi belə olur:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_0 t^2}{2}. \quad (11.2)$$

Bu ifadəni yuxarıdakı tənliklərdə yerinə yazıb və $OA = (R + r)$ olduğunu nəzərə alıb yazırıq:

$$x_A = (R + r) \cos \frac{\varepsilon_0 t^2}{2}, y_A = (R + r) \sin \frac{\varepsilon_0 t^2}{2}.$$

Əgər diyirlənən çarx t zaman fasiləsində irəliləmə hərəkəti etsəydi, onda onun üzərində yerləşən üfüqi $A_0 M_0$ xətti həmin zaman fasiləsində yenə də üfüqi AM'_0 vəziyyətinə gələrdi.

Çarx öz A mərkəzi ətrafında fırlandığı üçün onun AM'_0 xətti sonra t zaman fasiləsində həmin mərkəz ətrafında φ' bucağı qədər dönərək AM' vəziyyətinə gəlir və çarxın M'_0 nöqtəsi $M'_0 M'$ qövsünün uzunluğu qədər yol gedir.

Şəkildən yazırıq:

$$\varphi' = \varphi + \varphi_1. \quad (11.3)$$

Burada φ_1 – diyirlənən çarxın OA çarxqoluna nəzərən dönmə bucağıdır.

Ayındır ki, bu çarx tərpənməz çarx üzərində sürüşmədən diyirləndiyi üçün onun çevrəsi üzərindəki CM' qövsünün uzunluğu çarxqolunun C nöqtəsi üzərinə düşən nöqtəsinin tərpənməz çarxın çevrəsi üzrə getdiyi $M_0 C$ qövsünün uzunluğuna bərabərdir, yəni

$$M_0 C = CM' \text{ və ya } R\varphi = r\varphi_1,$$

Buradan

$$\varphi_1 = \frac{R\varphi}{r}.$$

Bu ifadəni (9.3) bərabərliyində yerinə yazıb alırıq:

$$\varphi' = \varphi + \frac{R\varphi}{r} = \left(1 + \frac{R}{r}\right)\varphi.$$

Burada φ -nin (9.2) ifadəsini yerinə yazıb diyirlənən çarxın A qütübü ətrafında fırlanma hərəkətinin tənliyini alırıq:

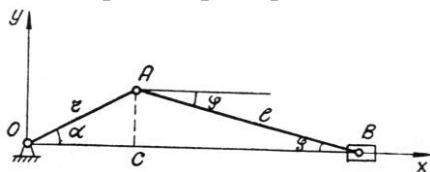
$$\varphi' = \left(1 + \frac{R}{r}\right) \frac{\varepsilon_0 t^2}{2}.$$

Beləliklə, diyirlənən çarxın A mərkəzini qütüb qəbul edib onun müstəvi hərəkətinin tənliklərini belə yazırıq:

$$x_A = (R+r) \cos \frac{\varepsilon_0 t^2}{2}, y_A = (R+r) \sin \frac{\varepsilon_0 t^2}{2}, \varphi' = \left(1 + \frac{R}{r}\right) \frac{\varepsilon_0 t^2}{2}.$$

Məsələ 11.3

OA çarxqolu müntəzəm fırlanıqda onun sürgüqolunun hərəkət tənliklərini tapmalı. Çarxqolu barmağının oxu üzərindəki A nöqtəsini qütüb qəbul etməli, çarxqolunun uzunluğu r , sürgüqolunun uzunluğu ℓ , çarxqolunun bucaq sürəti ω_0 -dır. $t = 0$ olduqda $\alpha = 0$ (Şək. 11.3).



Şəkil 11.3

Həlli.

Şəkildən A nöqtəsinin hərəkət tənliklərini çıxaraq. Bunun üçün A nöqtəsindən x oxu üzərinə AC

perpendikulyarı endiririk. Sonra A nöqtəsinin koordinatlarını tapırıq:

$$x_A = OC = r \cos \alpha, y_A = AC = r \sin \alpha.$$

Məsələnin şərtinə əsasən OA çarxqolu ω_0 bucaq sürəti ilə müntəzəm fırlandığı üçün bu fırlanma hərəkətinin tənliyi belə olur:

$$\alpha = \omega_0 t.$$

Onda A nöqtəsinin hərəkət tənliklərini belə yazırıq:

$$x_A = r \cos \omega_0 t, y_A = r \sin \omega_0 t.$$

İndi AB sürgüqolunun A qütbü ətrafında fırlanma hərəkətinin tənliyini tapaq. Şəkildən sinuslar teoreminə əsasən OAB üçbucağından yazırıq:

$$\frac{r}{\sin \varphi} = \frac{l}{\sin \alpha}.$$

Buradan

$$\sin \varphi = \frac{r}{l} \sin \alpha = \frac{r}{l} \sin \omega_0 t, \varphi = \arcsin\left(\frac{r}{l} \sin \omega_0 t\right).$$

Qeyd etmək lazımdır ki, AB sürgüqolu A qütbü ətrafında saat əqrəbinin istiqamətində fırlandığı üçün φ bucağı mənfi qəbul olunmalıdır.

Beləliklə, AB sürgüqolunun A nöqtəsi qütb qəbul edildikdə onun müstəvi hərəkətinin tənlikləri belə olur:

$$x_A = r \cos \omega_0 t, y_A = r \sin \omega_0 t, \varphi = \arcsin\left(\frac{r}{l} \sin \omega_0 t\right).$$

11.2. Yastı fiqur nöqtələrinin sürətlərinin tapılması

Yastı fiqurun hər hansı bir M nöqtəsinin sürəti onun O' qütbünün sürətilə həmin M nöqtəsinin bu qütb ətrafında fırlanma hərəkətindəki sürətinin həndəsi cəminə bərabərdir, yəni

$$\bar{v}_M = \bar{v}_{O'} + \bar{v}_{MO'}. \quad (11.4)$$

Burada $\bar{v}_{O'}$ fiqurun O' qütbünün sürətidir, $\bar{v}_{MO'}$ isə onun M nöqtəsinin O' qütbü ətrafında fırlanma hərəkətindəki sürətdir.

Yastı fiqurun O' qütbünün sürəti qiymət və istiqamətcə bu qütbün verilmiş

$$x_{O'} = f_1(t), y_{O'} = f_2(t).$$

hərəkət tənliklərinə əsasən aşağıdakı ifadələrdən tapılır:

$$\left. \begin{aligned} v_{O'x} &= \frac{dx_{O'}}{dt}, v_{O'y} = \frac{dy_{O'}}{dt}, v_{O'} = \sqrt{v_{O'x}^2 + v_{O'y}^2}, \\ \cos(\bar{v}_{O'}, \bar{i}) &= \frac{v_{O'x}}{v_{O'}}, \cos(v_{O'}, \bar{j}) = \frac{v_{O'y}}{v_{O'}} \end{aligned} \right\}$$

Burada $v_{O'x}$ və $v_{O'y}$ fiqurun O' qütbünün sürətinin x və y koordinat oxları üzərindəki proyeksiyalarıdır, $\bar{i}$, $\bar{j}$ həmin oxların vahid vektorlarıdır.

Yastı fiqurun baxdığımız andakı sürəti sıfır olan nöqtəsinə ani sürətlər mərkəzi deyilir və P ilə işarə olunur. Baxdığımız anda yastı fiqurun ani sürətlər mərkəzinin üzərinə düşən və tərpənməz müstəvi üzərində

yerləşən nöqtəyə ani fırlanma mərkəzi deyilir.

Yastı fiqurun P ani sürətlər mərkəzi məlumdursa, onun hər hansı bir M nöqtəsinin sürəti bu nöqtənin ani sürətlər mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətindəki sürət kimi aşağıdakı ifadədən tapılır:

$$\bar{v}_M = \bar{\omega} \times \overline{PM}. \quad (11.5)$$

Burada $\overline{PM}$ -fiqurun M nöqtəsinin P ani sürətlər mərkəzinə nəzərən radius vektorudur, $\bar{\omega}$ -yastı fiqurun fırlanma bucaq sürətidir və qiymətcə aşağıdakı ifadədən tapılır:

$$\omega = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|.$$

(11.5) ifadəsindən görürük ki, fiqurun M nöqtəsinin sürəti qiymətcə onun ω bucaq sürəti ilə PM fırlanma radiusunun hasilinə bərabərdir, istiqamətcə həmin radiusa perpendikulyar olub həmin nöqtənin fırlanma hərəkətinin istiqamətində yönəlir, yəni

$$v_M = \omega \cdot PM, \bar{v}_M \perp \overline{PM}. \quad (11.6)$$

Buradan belə nəticə çıxır ki, yastı fiqurun ani sürətlər mərkəzi onun hər hansı bir M nöqtəsindən bu nöqtənin sürət vektoruna endirilmiş perpendikulyar xətt üzərində

$$PM = \frac{v_M}{\omega} \text{ məsafəsində yerləşir.}$$

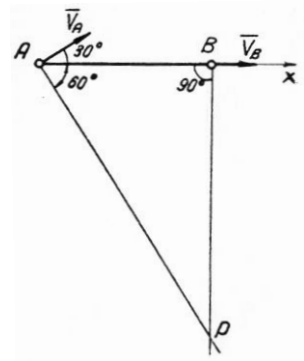
Əgər fiqurun hər hansı iki nöqtəsinin sürətinin istiqaməti məlumdursa, onda onun ani sürətlər mərkəzi həmin nöqtələrdən onların sürət vektorlarına endirilmiş

perpendikulyarların kəsişmə nöqtəsində yerləşir.

Qeyd edək ki, yastı fiqurun iki nöqtəsinin sürətlərinin həmin nöqtələrdən keçən ox üzərindəki proyeksiyaları bir-birinə bərabərdir.

Məsələ 11.4

AB düz xətti şəkil müstəvisi üzərində hərəkət edir. Müəyyən bir anda A nöqtəsinin $\overline{v_A}$ sürəti AB düz xətti ilə 30° bucaq əmələ gətirir və qiymətə 180 sm/san -yə bərabərdir (Şək. 11.4). Həmin anda B nöqtəsinin sürətinin istiqaməti AB düz xəttinin istiqaməti üzərinə düşür. B nöqtəsinin $\overline{v_B}$ sürətini tapmalı.



Şəkil 11.4

Həlli.

Məsələni iki üsulla həll edək.

I üsul. Əvvəlcə AB xəttinin P ani sürətlər mərkəzini tapırıq. Bunun üçün A və B nöqtələrindən həmin nöqtələrin sürət vektorlarına perpendikulyarlar endirib P nöqtəsində kəsişdiririk. Onda A və B nöqtələrinin sürətləri qiymətə (11.6) ifadəsinə əsasən belə tapılır:

$$v_A = \omega \cdot PA, v_B = \omega \cdot PB.$$

Bu ifadələri tərəf-tərəfə bölüb alırıq:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{PB}{PA}.$$

Şəkildən tapırıq:

$$\frac{PB}{PA} = \sin 60^0.$$

Onda B nöqtəsinin sürətini belə tapırıq:

$$v_B = v_A \cdot \frac{PB}{PA} = v_A \sin 60^0 = 180 \cdot 0,86 = 156 \text{ sm/san}.$$

II üsul. Məlumdur ki, A və B nöqtələrinin sürətlərinin AB xətti üzərindəki proyeksiyaları bir-birinə bərabərdir. A və B nöqtələrindən keçən oxu x ilə işarə etsək yazı bilərik:

$$v_{Ax} = v_{Bx}.$$

Şəkildən tapırıq: $v_{Ax} = v_A \cos 30^0, v_{Bx} = v_B$. Bu qiymətləri yuxarıdakı ifadədə yerinə yazıb alırıq:

$$v_B = v_A \cos 30^0 = 180 \cdot 0,86 = 156 \text{ sm/san}.$$

Məsələ 11.5

AB düz xətti şəkil müstəvisi üzərində hərəkət edir, belə ki, onun A ucu həmişə CAD yarım çevrəsi üzərində qalır, düz xəttin özü isə həmişə CD diametrinin tərpənməz C nöqtəsindən keçir, OA radiusu CD diametrinə perpendikulyar olan anda, düz xəttin C nöqtəsi üzərinə düşən nöqtəsinin $\overline{v_C}$ sürətini tapmalı; bu anda A

nöqtəsinin sürəti 4 m/san-dir
(Şək. 11.5).

Həlli.

Məsələni həll etmək üçün əvvəlcə AB xəttinin ani sürətlər mərkəzini tapırıq. Bunun üçün xəttin iki A və C nöqtələrinin sürətlərinin istiqamətlərini bilmək lazımdır. Şəkildən görürük ki, xəttin A nöqtəsinin sürəti DAC yarımçevrəsinə toxunan

istiqamətdə yönəlir, C nöqtəsinin sürəti isə AB xətti boyunca yönələcəkdir. Odur ki, A və C nöqtələrinin sürətlərinin bu istiqamətlərinə perpendikulyar çəkib, onların kəsişdiyi P ani sürətlər mərkəzini tapırıq.

Onda xəttin A və C nöqtələrinin sürətləri qiymətcə belə tapılır:

$$v_A = \omega \cdot PA, v_C = \omega \cdot PC.$$

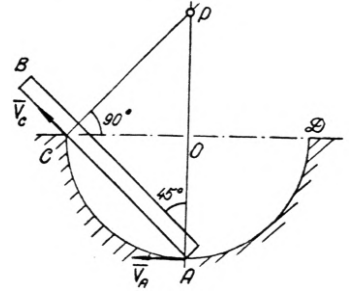
Bu ifadələri tərəf-tərəfə bölüb alırıq:

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{PC}{PA}.$$

Şəkildən tapırıq:

$$\frac{PC}{PA} = \sin 45^\circ.$$

Bu qiyməti yuxarıdakı ifadədə yerinə yazıb oradan C



Şəkil 11.5

nöqtəsinin sürətini tapırıq:

$$v_C = v_A \frac{PC}{PA} = v_A \sin 45^\circ = 4 \cdot 0,707 = 2,828 \text{ sm/san}.$$

Məsələ 11.6

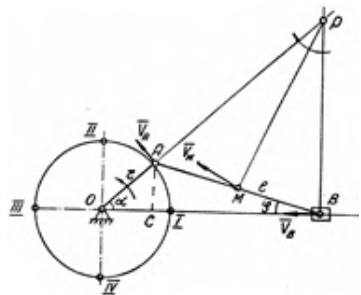
Çarxqolu mexanizmində çarxqolunun uzunluğu $OA = 40 \text{ sm}$, sürgüqolunun uzunluğu $AB = 2 \text{ m}$. Çarxqolu $\omega_0 = 6\pi \text{ rad/san}$ sabit bucaq sürəti ilə fırlanır. Çarxqolunun dörd vəziyyətində (α bucağı uyğun surətdə $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ -yə bərabər olduqda) sürgüqolunun ω_{AB} bucaq sürətini və onun orta M nöqtəsinin sürətini tapmalı (Şək. 11.6).

Həlli.

Əvvəlcə çarxqolunun A nöqtəsinin sürətini tapaq:

$$\begin{aligned} v_A &= OA \cdot \omega_0 = 40 \cdot 6\pi = \\ &= 240\pi \text{ sm/san} = 754 \text{ sm/san}. \end{aligned}$$

Bu sürət OA çarxqoluna perpendikulyar olub hərəkət istiqamətdə yönəlir. Sürüngəcin B nöqtəsinin sürəti isə silindrin oxu boyunca BO xətti üzrə (sağdan sola) yönəlir. Şəkildə A və B nöqtələrinin sürət vektorlarına perpendikulyar xətlər çəkib kəsişdiririk və sürgüqolunun P ani sürətlər



Şəkil 11.6

mərkəzinə tapırıq. Digər tərəfdən sürgüqolunun A nöqtəsinin sürəti aşağıdakı kimi tapıla bilər:

$$v_A = PA \cdot \omega_{AB}.$$

Buradan tapırıq:

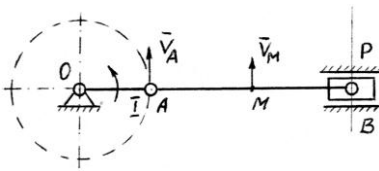
$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA}.$$

Şəkildən sürgüqolunun B və M nöqtələrinin sürətlərini P ani sürətlər mərkəzinə əsasən tapırıq:

$$v_B = PB \cdot \omega_{AB}, v_M = PM \cdot \omega_{AB}.$$

Sürgüqolunun M nöqtəsinin sürət vektoru PM düz xətt parçasına perpendikulyar olub hərəkət istiqamətində yönəlir.

İndi bu naməlum kəmiyyətləri α - nın $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ qiymətlərində mexanizmin konkret vəziyyətləri üçün tapaq.



Şəkil 11.7

1) $\alpha = 0$.

Bu halda OA çarxqolu ilə AB sürgüqolu bir düz xətt boyunca üfqi vəziyyət alırlar və sürgüqolunun P ani sürətlər mərkəzi B nöqtəsinin üzərinə düşür (şək. 9.7).

Şəkildən göründüyü kimi

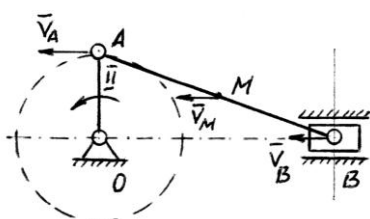
$$PA = AB = 2m = 200\text{sm}, PB = 0, PM = \frac{AB}{2} = 100\text{sm}.$$

Onda yuxarıdakı ifadələrdən ω_{AB} , v_B və v_M kəmiyyətlərini tapırıq:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{2,4\pi}{2} = 1,2\pi \text{ rad/san}.$$

$$v_B = PB \cdot \omega_{AB} = 0, v_M = PM \cdot \omega_{AB} = 100 \cdot 1,2\pi = 377 \text{ sm/san}.$$

$$2) \alpha = \pi/2.$$



Şəkil 11.8

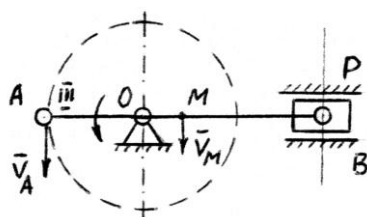
Bu halda OA çarxqolu şaquli vəziyyətdə olur, $\bar{v}_A$ və $\bar{v}_B$ sürətləri bir birinə paralel üfüqi istiqamətdə yönəliirlər (Şək. 11.8). Onda sürgüqolunun P ani sürətlər mərkəzi sonsuzluqda yerləşir, yəni $PA = \infty$. Bu halda

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{2,4\pi}{\infty} = 0.$$

Deməli, sürgüqolu bu halda ani irəliləmə hərəkəti edir. Odur ki, onun bütün nöqtələrinin sürətləri bir-birinə bərabərdir, yəni

$$v_B = v_M = v_A = 754 \text{ sm/san}.$$

$$3) \alpha = \pi.$$



Şəkil 11.9

1-ci halda olduğu kimi OA çarxqolu ilə AB sürgüqolu üfqi vəziyyət alırlar və sürgüqolunun P ani sürətlər mərkəzi B nöqtəsinin üzərinə düşür (Şək. 11.9). Şəkindən $PA = AB = 200\text{sm}$, $PB = 0$, $PM = \frac{AB}{2} = 100\text{sm}$.

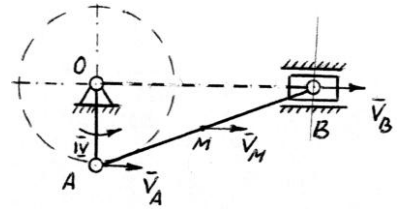
Onda yuxarıdakı ifadələrdən ω_{AB} , v_B və v_M kəmiyyətlərini tapırıq:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{2,4\pi}{2} = 1,2\pi \text{ rad/san}.$$

$$v_B = PB \cdot \omega_{AB} = 0, v_M = PM \cdot \omega_{AB} = 100 \cdot 1,2\pi = 377 \text{ sm/san}.$$

4) $\alpha = 3\pi/2$.

Bu halda 2-ci halda olduğu kimi OA çarxqolu şaquli vəziyyətdə olur, $\bar{v}_A$ və $\bar{v}_B$ sürətləri bir birinə paralel üfqi istiqamətdə yönəliirlər (Şək. 11.10). Onda sürgüqolunun P ani sürətlər mərkəzi sonsuzluqda yerləşir, yəni $PA = \infty$. Bu halda



Şəkil 11.10

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{2,4\pi}{\infty} = 0.$$

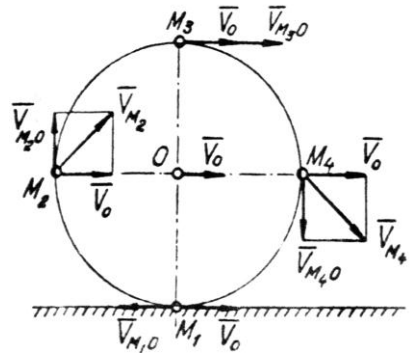
Deməli, sürgüqolu bu halda ani irəliləmə hərəkəti edir. Odur ki, onun bütün nöqtələrinin sürətləri bir-birinə bərabərdir, yəni

$$v_B = v_M = v_A = 754 \text{ sm/san}.$$

Məsələ 11.7

Radiusu $R = 0,5 \text{ m}$ olan çarx düzxətli yolda sürüşmədən diyirlənir, onun mərkəzinin sabit sürəti $v_0 = 10 \text{ m/san-yə}$ bərabərdir. Çarxın şaquli və üfüqi diametrinin M_1, M_2, M_3 və

M_4 uclarının sürətlərini tapmalı, habelə çarxın ω bucaq sürətini də təyin etməli (Şək. 11.11).



Şəkil 11.11

Həlli.

Məsələni iki üsulla həll edək.

I üsul. Yuxarıda 10.13 məsələsinin həllində isbat etdik ki, düz yol üzrə sürüşmədən diyirlənən çarxın mərkəzinin hər hansı bir zaman fasiləsində getdiyi yol çarxın çevrəsi üzərində yerləşən nöqtənin onun mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətindəki cızdığı qövsün uzunluğuna bərabərdir. Buradan belə nəticə çıxır ki, göstərilən çarxın mərkəzinin sürət və toxunan təcili qiymətcə onun çevrəsi üzərində yerləşən nöqtənin bu çarxın mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətindəki sürət və toxunan təcilinə bərabərdir. Buna əsasən yaza bilərik:

$$v_0 = \omega R.$$

Buradan çarxın O mərkəzi ətrafında ω fırlanma bucaq sürətini tapırıq:

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ rad/san}.$$

Çarxın O mərkəzini qütb qəbul edərək, (9.4) ifadəsinə əsasən onun çevrəsi üzərindəki istənilən M nöqtəsinin sürəti belə tapılır:

$$V_M = V_O + V_{MO} \quad (11.17)$$

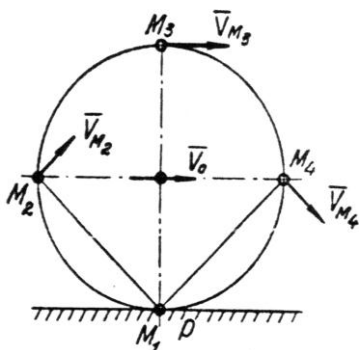
Burada $\bar{v}_{MO}$ – çarxın M nöqtəsinin onun O mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətindəki sürətidir. Bu sürət qiymətcə $v_{MO} = \omega \cdot MO = \omega R = 10 \text{ m/c}$ bərabər olub, istiqamətcə nöqtənin cızdığı çevrəyə (çarxın çevrəsinə) toxunan üzrə onun hərəkət istiqamətində yönəlir.

Şəkildən aydındır ki, çarxın M_1 , M_2 , M_3 , M_4 nöqtələrinin onun O mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətindəki sürətləri qiymətcə bir-birinə bərabərdir, istiqamətcə çarxın çevrəsinə toxunan istiqamətdə yönəlir. Buna əsasən Şək. 11.7-də çarxın həmin nöqtələrinin sürətləri (11.17) ifadəsinə əsasən iki sürətin həndəsi cəmi kimi göstərilmişdir. Bu şəkilə əsasən M_1 , M_2 , M_3 və M_4 nöqtələrinin sürətlərini qiymətcə belə tapırıq:

$$v_{M1} = v_0 - v_{M1O} = 10 - 10 = 0, v_{M2} = \sqrt{v_0^2 + v_{M2O}^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14,14 \text{ m/san},$$

$$v_{M3} = v_0 + v_{M3O} = 10 + 10 = 20 \text{ m/san}, v_{M4} = \sqrt{v_0^2 + v_{M4O}^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14,14 \text{ m/san}.$$

Bu sürətlərin istiqamətləri şəkildə göstərilmişdir.



Şəkil 11.12

II üsul. Bu üsulda çarxın M_1 , M_2 , M_3 və M_4 nöqtələrinin sürətlərini tapmaq üçün onun ani sürətlər mərkəzini tapırıq. Şəkildən göründüyü kimi, çarx düz yol üzrə sürüşmədən diyirləndiyi üçün onun bu yola toxunduğu M_1 nöqtəsi çarxın

P ani sürətlər mərkəzi olacaqdır. Buna əsasən çarxın ω bucaq sürətini onun O mərkəzinin məlum sürətinə əsasən tapırıq (Şək. 11.12).

$$v_0 = \omega \cdot PO = \omega R,$$

buradan

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ rad/san}.$$

Onda çarxın M_1 , M_2 , M_3 və M_4 nöqtələrinin sürətləri onların ani sürətlər mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətlərindəki sürətlər kimi belə tapılır:

$$v_{M_1} = \omega \cdot 0 = 0, v_{M_2} = \omega \cdot PM_2, v_{M_3} = \omega \cdot PM_3, v_{M_4} = \omega \cdot PM_4.$$

Şəkildən tapırıq:

$$PM_2 = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2} = 0,5\sqrt{2} = 0,707m, PM_3 = 2R = 2 \cdot 0,5 = 1m,$$

$$PM_4 = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2} = 0,5 \cdot \sqrt{2} = 0,707m.$$

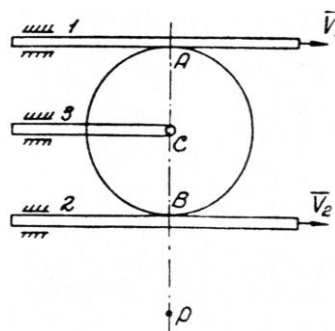
Bu qiymətləri yuxarıdakı ifadələrdə yerinə yazıb alırıq:

$$v_{M1} = 0, v_{M2} = 20 \cdot 0,707 = 14,14 \text{ m/san}, v_{M3} = 20 \cdot 1 = 20 \text{ m/san}, v_{M4} = 14,14 \text{ m/san}.$$

Çarxın M_1 , M_2 , M_3 və M_4 nöqtələrinin $\bar{v}_{M1}$, $\bar{v}_{M2}$, $\bar{v}_{M3}$ və $\bar{v}_{M4}$ sürət vektorları həmin nöqtələrin P anı sürətlər mərkəzi ətrafında uyğun PM_1 , PM_2 , PM_3 və PM_4 fırlanma radiuslarına perpendikulyar istiqamətlərdə yönəliirlər.

Məsələ 11.8

Şəkildə toplayıcı mexanizm göstərilmişdir. 1 və 2 paralel reykaları $\bar{v}_1$ və $\bar{v}_2$ sabit sürətləri ilə eyni istiqamətdə hərəkət edir. Reykalar arasında onlar üzrə sürüşmədən diyirlənən r radiuslu disk sıxılmışdır. Diskin C oxuna bərkidilmiş 3 reykasının sürətinin 1 və 2 reykalarının sürətlərinin cəminin yarısına bərabər olduğunu göstərməli. Diskin bucaq sürətini də tapmalı (Şək. 11.13).



Şəkil 11.13

Həlli.

Şəkildən aydındır ki, 1 və 2 reykaları (tamasaları) arasında sıxılmış disk həmin reykalar üzrə sürüşmədən diyirlənir. Diskin bu reykalara toxunduğu A və B nöqtələrinin sürətləri uyğun olaraq onların $\bar{v}_1$ və $\bar{v}_2$ sürətlərinə bərabər olacaqdır, yəni

$$\bar{v}_A = \bar{v}_1, \bar{v}_B = \bar{v}_2.$$

Beləliklə, diskin iki A və B nöqtələrinin $\bar{v}_A$ və $\bar{v}_B$ sürətləri məlumdur. Həmin sürətlər diskin AB xəttinə perpendikulyar istiqamətdə yönəlirlər. Odur ki, diskin P ani sürətlər mərkəzi A və B nöqtələrindən keçən xətt üzərində yerləşəcəkdir. Onda P ani sürətlər mərkəzinin bu nöqtələr-dən olan məsafələri aşağıdakı ifadələrdən tapıla bilər:

$$v_A = \omega \cdot PA, v_B = \omega \cdot PB.$$

Bu ifadələri bir-birindən çıxsaq və tərəf-tərəfə bölsək, alırıq:

$$v_A - v_B = \omega(PA - PB) = \omega \cdot 2r, \frac{v_A}{v_B} = \frac{PA}{PB} = \frac{r + PB}{PB}.$$

Buradan məlum ω və PB kəmiyyətlərini tapırıq:

$$\omega = \frac{v_A - v_B}{2r} = \frac{v_1 - v_2}{2r}, PB = \frac{v_2 r}{v_1 - v_2}.$$

İndi diskin C mərkəzinin sürətini tapaq:

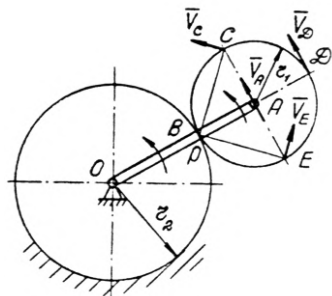
$$v_C = \omega \cdot PC = \omega(r + PB).$$

Burada yuxarıda tapdığımız PB -nin ifadəsini yerinə yazıb alırıq:

$$v_C = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Məsələ 11.9

OA çarxqolu, radiusu $r_2 = 15 \text{ sm}$ olan tərənəmz dişli çarxın O oxu ətrafında $\omega_0 = 2,5 \text{ rad/san}$ bucaq sürəti ilə fırlanaraq, onun A oxundakı barmağa geydirilmiş $r_1 = 5 \text{ sm}$ radiuslu dişli çarxı hərəkətə gətirir. $CE \perp BD$ nəzərdə tutaraq, tərənən dişli çarxın A , B , C , D və E nöqtələrinin sürətlərini qiymət və istiqamətcə tapmalı (Şək. 11.14).



Şəkil 11.14

Həlli.

Hərəkətdə olan çarx tərənəmz çarx üzrə sürüşmədən diyirləndiyi üçün bu çarxların toxunduğu B nöqtəsi onun P ani sürətlər mərkəzi olacaqdır.

Əvvəlcə tərənən çarxın A mərkəzinin sürətini onun OA çarxqolu ilə birlikdə O nöqtəsi ətrafında fırlanma hərəkətindəki sürət kimi tapaq:

$$v_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0 (r_1 + r_2) = 2,5(5 + 15) = 50 \frac{\text{sm}}{\text{san}}.$$

Daha sonra hərəkətdə olan çarxın ani sürətlər mərkəzi ətrafında ω fırlanma bucaq sürətini tapırıq:

$$v_A = \omega \cdot PA, \text{ buradan } \omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{50}{5} = 10 \text{ rad/san}$$

Onda çarxın B , C , D və E nöqtələrinin sürətləri onların P ani sürətlər mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətindəki sürətlər kimi belə tapılır:

$$v_B = \omega \cdot 0 = 0, v_C = \omega \cdot PC, v_D = \omega \cdot PD, v_E = \omega \cdot PE.$$

Şəkildən tapırıq:

$$PC = \sqrt{r_1^2 + r_1^2} = r_1 \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ sm}, PD = 2r_1 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ sm}, PE = \sqrt{r_1^2 + r_1^2} = 5\sqrt{2} \text{ sm}.$$

Bu qiymətləri yuxarıdakı ifadələrdə yerinə yazıb tərpənən çarxın B , C , D və E nöqtələrinin sürətlərinin qiymətlərini tapırıq:

$$v_B = 0, v_C = 10 \cdot 5\sqrt{2} = 70,7 \text{ sm/san}, v_D = 10 \cdot 10 = 100 \text{ sm/san}, v_E = 10 \cdot 5\sqrt{2} = 70,7 \text{ sm/san}.$$

Şəkildən görüldüyü kimi, diyirlənən çarxın B , C , D və E nöqtələrinin $\overline{v_B}$, $\overline{v_C}$, $\overline{v_D}$ və $\overline{v_E}$ sürət vektorları həmin fırlanma radiuslarına perpendikulyar istiqamətlərdə yönəliirlər.

11.3. Tərpənən və tərpənməz sentroidlərin tənlikləri

Yastı fiqurun müxtəlif zaman anlarındakı ani sürətlər mərkəzlərindən keçən səlis əyriyə tərpənən sentroid deyilir. Yastı fiqurun ani fırlanma mərkəzlərini birləşdirən səlis əyriyə isə tərpənməz sentroid deyilir. Fiqur hərəkət etdikdə tərpənən sentroid tərpənməz sentroid üzrə sürüşmədən diyirlənir.

Tərpənməz sentroidin nöqtələrinin x_P və y_P koordinatları aşağıdakı ifadələrdən tapılır:

$$x_P = f_1(t) - \frac{f_2'(t)}{f_3'(t)}, y_P = f_2(t) + \frac{f_1'(t)}{f_3'(t)}. \quad (11.18)$$

Burada $f_1(t) = x_{0'}$, $f_2(t) = y_{0'}$ – yastı fiqurun O' qütbünün hərəkət tənlikləridir; $f_3(t) = \varphi$ – isə fiqurun bu qütb ətrafında fırlanma hərəkətinin tənliyidir.

Bu tənliklərdən t zamanını çıxartsaq, tərənəmz sentroidin tənliyini alarıq.

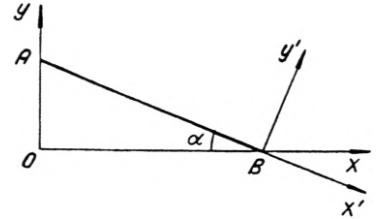
Yastı fiqurun tərənən sentroidinin nöqtələrinin x'_p və y'_p koordinatları aşağıdakı ifadələrdən tapılır:

$$x'_p = \frac{f'_1(t) \sin \varphi - f'_2(t) \cos \varphi}{f'_3(t)}, y'_p = \frac{f'_1(t) \cos \varphi + f'_2(t) \sin \varphi}{f'_3(t)}. \quad (11.19)$$

Bu ifadələrdən t zamanını çıxartsaq, tərənən sentroidin tənliyini alarıq.

Məsələ 11.10

Uzunluğu 1 m olan AB çubuğu öz ucları ilə həmişə iki qarşılıqlı perpendikulyar Ox və Oy düz xətlərinə söykənərək hərəkət edir. Çubuğun bu hərəkətindəki tərənəmz və tərənən sentroidlərinin tənliklərini tapmalı (Şək. 11.15).



Şəkil 11.15

Həlli.

Şəkildən tapırıq:

$$x_B = AB \cos \alpha = \cos \alpha, y_B = 0.$$

Çubuğun B nöqtəsini tərpənən $Bx'y'$ koordinat sisteminin başlanğıcı qəbul edib, x' oxunu AB xətti istiqamətində yönəldirik.

Şəkildən görürük ki, $Bx'y'$ sistemi B qütbü ətrafında saat əqrəbinin əks istiqamətində fırlandıqda α bucağı azalır. Odur ki, AB çubuğunun B qütbü ətrafında fırlanma hərəkətinin tənliyi belə olar:

$$\varphi = -\alpha(t) = f_3(t).$$

Beləliklə, AB çubuğunun müstəvi hərəkətinin tənlikləri belə olur:

$$x_B = f_1(t) = \cos \alpha, y_B = f_2(t) = 0, \varphi = f_3(t). \quad (11.20)$$

Bu tənlikləri (9.18) ifadələrində yerinə yazıb alırıq:

$$x_P = f_1(t) - \frac{f_2'(t)}{f_3'(t)} = \cos \varphi, y_P = f_2(t) + \frac{f_1'(t)}{f_3'(t)} = \frac{-\dot{\varphi} \sin \varphi}{\dot{\varphi}} = -\sin \varphi.$$

Bu ifadələri kvadrata yüksəldib toplayaraq tərpənməz sentroidin tənliyini tapırıq:

$$x_P^2 + y_P^2 = 1.$$

Bu, mərkəzi tərpənməz xOy koordinat sisteminin O başlanğıcında yerləşən və radiusu 1 m olan çevrənin tənliyidir.

İndi (11.20) tənliklərini (11.19) ifadələrində yerinə yazıb çubuğun tərpənən sentroidinin tənliyini çıxardaq:

$$x'_p = \frac{f'_1(t) \sin \varphi - f'_2(t) \cos \varphi}{f'_3(t)} = \frac{-\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \varphi}{\dot{\varphi}} = -\sin^2 \varphi,$$

$$y'_p = \frac{f'_1(t) \cos \varphi + f'_2(t) \sin \varphi}{f'_3(t)} = \frac{-\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi}{\dot{\varphi}} = -\sin \varphi \cos \varphi.$$

Bu ifadələri aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$x'_p = -\frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi), y'_p = -\frac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

Buradan tapırıq:

$$\frac{1}{2} \cos 2\varphi = x'_p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \sin 2\varphi = -y'_p.$$

Bu ifadələri kvadrata yüksəldib, tərəf-tərəfə toplayaraq tərənən sentroidin tənliyini alırıq:

$$(x'_p + \frac{1}{2})^2 + (y'_p)^2 = (\frac{1}{2})^2.$$

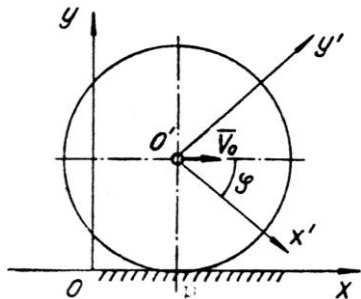
Bu, radiusu 0,5 m olan və mərkəzi AB parçasının ortasında yerləşən çevrənin tənliyidir.

Məsələ 11.11

Radiusu $R=0,5$ m olan çarx düzxətli yolla sürüşmədən diyirlənir. Onun mərkəzi sabit $v_O = 10$ m/san sürətlə hərəkət edir. Çarxın bu hərəkəti zamanı tərənəmz və tərənən sentroidlərin tənliklərini tapmalı (Şək. 11.16).

Həlli.

Əvvəlcə çarxın hərəkət tənliklərini tapaq. Çarxın yolla görüşdüyü (toxunduğu) nöqtə P ani sürətlər mərkəzi olduğu üçün onun O' mərkəzinin sürətini belə ifadə edirik:



Şəkil 11.16

$$v_{O'} = R\omega.$$

Buradan çarxın ω fırlanma bucaq sürətini tapırıq:

$$\omega = \frac{v_{O'}}{R} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ rad/san}.$$

Onda çarxın O' mərkəzini qütb qəbul etsək, onun müstəvi hərəkətinin tənlikləri belə olar:

$$x_{O'} = v_{O'}t = 10t = f_1(t), y_{O'} = PO' = R = 0,5 f_2(t),$$

$$\varphi = -\omega t = f_3(t) \quad (11.21)$$

Bu tənliklərdən törəmələr alaq:

$$f_1'(t) = v_{O'} = 10, f_2'(t) = 0, f_3'(t) = -\omega = -20. \quad (11.22)$$

Bu tənlikləri (9.18) ifadələrində yerinə yazıb tərpənməz sentroidin tənliyini tapırıq:

$$x_P = f_1(t) - \frac{f_2'(t)}{f_3'(t)} = 10t, y_P = f_2(t) + \frac{f_1'(t)}{f_3'(t)} = R - \frac{v_{O'}}{\omega} = 0.$$

Bu tənliklər x oxu üzrə hərəkət edən ani P nöqtəsinin hərəkət tənliyidir. Odur ki, tərpənməz sentroid x oxu üzərində yerləşən düz xətdir.

Tərpənən sentroidin tənliyini tapmaq üçün başlanğıcı çarxın O' mərkəzində yerləşən və çarxla əlaqədar olan $O'x'y'$ koordinat sistemi götürürük, bu şərtlə ki, başlanğıc anda həmin sistemin $O'x'$ və $O'y'$ oxları tərpənməz Oxy sisteminin uyğun Ox və Oy oxlarına paralel olsun.

(9.21) və (9.22) funksiyalarını (9.19) ifadələrində yerinə yazıb alırıq:

$$x'_p = \frac{f_1'(t) \sin \varphi - f_2'(t) \cos \varphi}{f_3'(t)} = \frac{v_{O'} \sin \varphi - 0}{\omega} = -R \sin \varphi = -0,5 \sin 20t,$$

$$y'_p = \frac{f_1'(t) \cos \varphi + f_2'(t) \sin \varphi}{f_3'(t)} = \frac{v_{O'} \cos \varphi + 0}{-\omega} = -R \cos \varphi = -0,5 \cos 20t.$$

Bu ifadələri kvadrata yüksəldib, tərəf-tərəfə toplayaraq, tərpənən sentroidin tənliyini tapırıq:

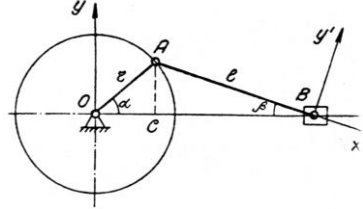
$$(x'_p)^2 + (y'_p)^2 = 0,5^2.$$

Bu tənlik $O'x'y'$ koordinat sisteminə çarxın çevrəsinin tənliyidir.

Beləliklə, düz yolda sürüşmədən diyirlənən çarxın tərpənməz sentroidi bu yol üzərində yerləşən düz xətdir, tərpənən sentroid isə çarxın çevrəsidir. Çarx hərəkət etdikdə bunu biz bilavasitə görürük.

Məsələ 11.12

Çarxqolu-sürüngəc mexanizminin AB sürgüqolunun tərpənməz və tərpənən sentroidlərinin tənliklərini tapmalı. OA çarxqolu sabit ω_0 bucaq sürətilə fırlanır. $OA=r$, $AB=\ell$, $\angle AOB=\alpha=\omega_0 t$ (Şək. 11.17).



Şəkil 11.17

Həlli.

Əvvəlcə sürgüqolunun B nöqtəsini qütb qəbul edib, onun hərəkət tənliklərini çıxarıyıq. Şəkildən tapırıq:

$$x_B = OC + CB = r \cos \alpha + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha} = r \cos \omega_0 t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t} = f_1(t),$$

$$y_B = 0 = f_2(t).$$

Bu tənliklərdən zamana görə törəmə alaq:

$$f_1'(t) = -r\omega_0 \sin \omega_0 t - \frac{r^2 \omega_0 \sin 2\omega_0 t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}}, f_2'(t) = 0. \quad (11.23)$$

Sonra OAB üçbucağından sinuslar teoreminə əsasən yazırıq:

$$\frac{l}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \beta}, \sin \beta = \frac{r}{l} \sin \alpha = \frac{r}{l} \sin \omega_0 t, \quad (11.24)$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \omega_0 t} = \frac{1}{l} \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}.$$

Şəkildən görürük ki, AB sürgüqolu B qütbü ətrafında saat əqrəbinin əks istiqamətində fırlandıqda β bucağı azalır. Odur ki, sürgüqolunun bu qütb ətrafında fırlanma hərəkətinin tənliyi belə olur:

$$\varphi = f_3(t) = -\beta(t).$$

Buradan

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\beta}{dt}, -\sin \beta = \sin \varphi, \cos \beta = \cos \varphi. \quad (11.25)$$

Bu asılılıqları nəzərdə tutaraq (11.24) ifadəsindən zamana görə törəmə alaıq:

$$\cos \beta \frac{d\beta}{dt} = \frac{r\omega_0}{l} \cos \omega_0 t.$$

Buradan tapırıq:

$$f_3'(t) = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\beta}{dt} = -\frac{r\omega_0 \cos \omega_0 t}{l \cos \beta} = -\frac{r\omega_0 \cos \omega_0 t}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}}. \quad (9.26)$$

Yuxarıda çıxardığımız $f_1(t)$, $f_2(t)$ və $f_3(t)$ funksiyalarını (sürgüqolunun hərəkət tənliklərini) və onların (11.23) və (11.26) törəmələrini (11.18) ifadələrində yerinə yazıb ani fırlanma mərkəzinin koordinatlarını tapırıq:

$$\begin{aligned}x_p &= f_1(t) - \frac{f_2'(t)}{f_3'(t)} = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t} + r \cos \omega_0 t, \\y_p &= f_2(t) + \frac{f_1'(t)}{f_3'(t)} = \sin \omega_0 t \left(r + \frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}}{\cos \omega_0 t} \right).\end{aligned}\quad (11.27)$$

(11.27) ifadəsindən tapırıq:

$$\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t} = x_p - r \cos \omega_0 t.$$

Bu ifadəni kvadrata yüksəldib alırıq:

$$l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t = x_p^2 - 2x_p r \cos \omega_0 t + r^2 \cos^2 \omega_0 t.$$

Buradan tapırıq:

$$\cos \omega_0 t = \frac{x_p^2 + r^2 - l^2}{2rx_p}, \sin \omega_0 t = \sqrt{1 - \frac{(x_p^2 + r^2 - l^2)^2}{4r^2 x_p^2}}.$$

Bu ifadələri (9.27)-də yerinə yazıb alırıq:

$$y_p = \frac{\sqrt{4r^2 x_p^2 - (x_p^2 + r^2 - l^2)^2}}{x_p^2 + r^2 - l^2} \cdot x_p.$$

Buradan müəyyən cəbri sadələşdirmə əməliyyatından sonra tərpənməz sentroidin tənliyini tapırıq:

$$(x_p^2 + r^2 - l^2)(y_p^2 + x_p^2) = 4r^2 x_p^4.$$

İndi tərpənən sentroidin tənliyini tapaq. Bunun üçün (11.23) və (11.26) ifadələrini (11.23)-də yerinə yazırıq:

$$\begin{aligned}
x'_p &= \frac{f'_1(t) \sin \varphi - f'_2(t) \cos \varphi}{f'_3(t)} = \left(r \omega_0 \sin \omega_0 t + \frac{r^2 \omega_0 \sin 2\omega_0 t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}} \right) \times \\
&\frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}}{r \omega_0 \cos \omega_0 t} \sin \varphi = -\frac{r}{l} \sin^2 \omega_0 t \left(\frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}}{\sqrt{1 - \sin^2 \omega_0 t}} - r \right), \\
y'_p &= \frac{f'_1(t) \cos \varphi + f'_2(t) \sin \varphi}{f'_3(t)} = \left(r \omega_0 \sin \omega_0 t + \frac{r^2 \omega_0 \sin 2\omega_0 t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}} \right) \cdot \\
&\frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}}{r \omega_0 \cos \omega_0 t} \cos \varphi
\end{aligned} \tag{11.28}$$

Bu ifadələri tərəf-tərəfə bölüb (11.24) və (11.25) asılılıqlarını nəzərdə tutaraq, alırıq:

$$\frac{x'_p}{y'_p} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{r \sin \omega_0 t}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}}.$$

Buradan tapırıq:

$$l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{r^2 (y'_p)^2}{(x'_p)^2} \sin^2 \omega_0 t, \sin^2 \omega_0 t = \frac{l^2 (x'_p)^2}{[(x'_p)^2 + (y'_p)^2] r^2}.$$

Bu ifadəni (11.28) tənliyində yerinə yazıb bəzi cəbri əməliyyatlar aparandan sonra sürgüqolunun tərpənən sentroidinin tənliyini aşağıdakı şəkildə tapırıq:

$$(l^2 - r^2) l^2 (x'_p)^2 = [2l(x'_p)^2 + (x'_p)^2 + (y'_p)^2] \cdot [r^2 (y'_p)^2 - (l^2 - r^2)(x'_p)^2]$$

11.4. Yastı fiqurun nöqtələrinin təcillərinin tapılması

Məlum olduğu kimi, yastı fiqurun hər hansı bir M nöqtəsinin təcili onun O' qütbünün təcili ilə həmin M nöqtəsinin bu qütb ətrafında fırlanma hərəkətindəki təcilinin həndəsi cəminə bərabərdir, yəni

$$\overline{w}_M = \overline{w}_{O'} + \overline{w}_{MO'}.$$

Burada $\overline{w}_{O'}$ – fiqurun O' qütbünün təcilidir, $\overline{w}_{MO'}$ – isə M nöqtəsinin O' qütbü ətrafında fırlanma hərəkətindəki təcildir.

Yastı fiqurun O' qütbünün təcili qiymət və istiqamətcə aşağıdakı ifadələrdən tapılır:

$$\begin{aligned} w_{O'x} &= \frac{d^2 x_{O'}}{dt^2}, w_{O'y} = \frac{d^2 y_{O'}}{dt^2}, w_{O'} = \sqrt{w_{O'x}^2 + w_{O'y}^2}, \\ \cos(\overline{w}_{O'}, \vec{i}) &= \frac{w_{O'x}}{w_{O'}}, \cos(\overline{w}_{O'}, \vec{j}) = \frac{w_{O'y}}{w_{O'}}. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Yastı fiqurun M nöqtəsinin O' qütbü ətrafında fırlanma hərəkətindəki təcil, həmin nöqtənin $\overline{w}_{MO'}^t$ toxunan və $\overline{w}_{MO'}^n$ normal təcillərinin həndəsi cəminə bərabərdir:

$$\overline{w}_{MO'} = \overline{w}_{MO'}^t + \overline{w}_{MO'}^n. \quad (11.30)$$

Bu ifadəyə daxil olan toplanan təcillər qiymət və istiqamətcə belə tapılır:

$$\begin{aligned}\overline{w}_{MO'}^t &= \overline{\varepsilon} \times \overline{O'M}, w_{MO'}^t = O'M \cdot \varepsilon, \\ \overline{w}_{MO'}^n &= \overline{\omega} \times \overline{v}_{MO'}, w_{MO'}^n = O'M \cdot \omega^2.\end{aligned}\quad (11.31)$$

Burada $\overline{\omega}$ və $\overline{\varepsilon}$ yastı fiqurun O' qütbü ətrafında fırlanma hərəkətindəki bucaq sürəti və bucaq təcildir, $\overline{O'M}$ fiqurun M nöqtəsinin bu qütb ətrafında fırlanma radiusudur, $\overline{v}_{MO'}$ həmin nöqtənin O' qütbü ətrafında fırlanma hərəkətindəki sürətdir.

(11.30) və (11.31) ifadələrindən yastı fiqurun M nöqtəsinin O' qütbü ətrafında fırlanma hərəkətindəki $\overline{w}_{MO'}$ təcili qiymət və istiqamətcə belə tapılır:

$$w_{MO'} = \sqrt{(w_{MO'}^t)^2 + (w_{MO'}^n)^2} = O'M \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

(11.32)

Burada α bucağı $\overline{w}_{MO'}$ təcil vektorunun $\overline{O'M}$ fırlanma radiusu ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır.

Yastı fiqurun verilmiş anda təcili sıfır olan Q nöqtəsinə ani təcillər mərkəzi deyilir. Bu mərkəzin O' qütbündən $O'Q$ məsafəsi (9.32) ifadələrinə əsasən belə tapılır:

$$O'M = \frac{w_{O'}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

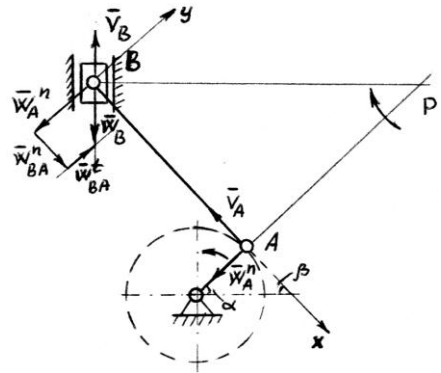
Həmin $O'Q$ xətt parçası $\overline{W}_{O'}$ təcil vektoru ilə $\alpha = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ bucağını əmələ gətirir. Yastı fiqurun hər

hansı bir M nöqtəsinin təcili onun Q ani təcillər mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətindəki təcil kimi qiymət və istiqamətcə aşağıdakı ifadədən tapıla bilər:

$$w_M = QM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (11.33)$$

Məsələ 11.13

Uzunluğu $OA=20$ sm olan çarxqolu sabit $\omega_0=10$ rad/san bucaq sürəti ilə fırlanıqda uzunluğu $AB=100$ sm olan sürgüqolunu hərəkətə gətirir; B sürüngəci şaqul üzərində hərəkət edir. Çarxqolu və sürgüqolu qarşılıqlı sürətdə perpendikulyar olduğu və üfüqi oxla $\alpha=45^\circ$, $\beta=45^\circ$ bucaq təşkil etdiyi anda sürgüqolunun bucaq sürətini və bucaq təcilini, həmçinin B sürüngəcinin təcilini tapmalı (Şək.11.18).



Şəkil 11.18

Həlli.

Şəkildən göründüyü kimi, A nöqtəsi həm OA çarxqolunun, həm də AB sürgüqolunun müştərək nöqtələridir. Odur ki, çarxqolunun A nöqtəsinin $\vec{v}_A$ sürəti OA çarxqoluna perpendikulyar olaraq fırlanma istiqamətində (AB üzrə) yönəlir və onun qiyməti aşağıdakı ifadədən tapılır:

$$v_A = \omega_0 \cdot OA = 10 \cdot 20 = 200 \text{ sm/san.}$$

Sürüngəcin B nöqtəsinin $\bar{v}_B$ sürəti şaquli xətt üzrə hərəkət istiqamətində (yuxarıya doğru) yönəlir. AB sürgüqolunun P ani sürətlər mərkəzinə tapmaq üçün A və B nöqtələrindən onların $\bar{v}_A$ və $\bar{v}_B$ sürətlərinə perpendikulyar xətlər çəkib kəsişdiririk. Digər tərəfdən, ani sürətlər mərkəzinin köməyi ilə $\bar{v}_A$ sürəti üçün aşağıdakı ifadəni yazırıq:

$$v_A = PA \cdot \omega,$$

burada ω – sürgüqolunun ani fırlanma bucaq sürətidir; PA – sürgüqolunun A nöqtəsinin P ani sürətlər mərkəzi ətrafında ani fırlanma radiusudur.

Şəkildən göründüyü kimi, ABP üçbucağı bərabəryanlıdır. Odur ki, $PA = AB = 100 \text{ sm}$. Onda

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{200}{100} = 2 \text{ rad/san.}$$

İndi çarxqolunun A nöqtəsinin təcilini tapaq.

$$\bar{w}_A = \bar{w}_A^t + \bar{w}_A^n.$$

Məsələnin şərtinə görə çarxqolu sabit bucaq sürəti ilə fırlanır. Odur ki, onun bucaq təcili $\varepsilon_0 = 0$. Onda

$$w_A^t = OA \cdot \varepsilon_0 = 0, \quad w_A^n = OA \cdot \omega_0^2 = 20 \cdot 10^2 = 2000 \text{ sm/san}^2.$$

Deməli, $\bar{w}_A = \bar{w}_A^n$ və bu təcil A nöqtəsindən O fırlanma mərkəzinə doğru yönəlir. A nöqtəsini qütb qəbul edib, sürgüqolunun B nöqtəsinin $\bar{w}_B$ təcilin tapırıq:

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA} = \overline{w}_A^n + \overline{w}_{BA}^n + \overline{w}_{BA}^t. \quad (11.34)$$

Burada $\overline{w}_{BA}^n$ və $\overline{w}_{BA}^t$ – sürgüqolunun B nöqtəsinin A qütbü ətrafında fırlanma hərəkətindəki normal və toxunan təcilidir. $\overline{w}_{BA}^n$ təcili B nöqtəsindən A qütbünə doğru, $\overline{w}_{BA}^t$ isə AB -yə perpendikulyar istiqamətdə yönəlir. $\overline{w}_{BA}^n$ -in qiymətini tapırıq:

$$w_{BA}^n = AB \cdot \omega^2 = 100 \cdot 2^2 = 400 \text{ sm/san}^2.$$

İndi (11.34) ifadəsinə əsasən B nöqtəsində təcillər çoxbucaqlısını quraq. Bunun üçün $\overline{w}_A^n$ təcil vektorunu özünə paralel olaraq B nöqtəsinə köçürək. Sonra onun a sonuna $\overline{w}_{BA}^n$ təcilini özünə paralel olaraq köçürək. Daha sonra onun b sonundan $\overline{w}_{BA}^t$ istiqamətində, yəni AB -yə perpendikulyar xətt çəkirik. Şəkildən görüldüyü kimi, B nöqtəsi eyni zamanda şaquli istiqamətdə hərəkət edən sürüngəcin nöqtəsidir. Odur ki, $\overline{w}_B$ təcili şaquli istiqamətdə yönəlir. b nöqtəsindən AB -yə çəkilən perpendikulyar xətlə B nöqtəsindən çəkilən şaquli xəttin kəsişmə nöqtəsi $\overline{w}_{BA}^t$ -nin sonu və təcillər çoxbucaqlısının qapayıcısı olan $\overline{w}_B$ təcilinin sonu olur. (11.34) vektorial ifadəsini (təcillər çoxbucaqlısını) şəkildə göstərilən x və y oxları üzərinə proyeksiyalayaq:

$$w_B \cos 45^\circ = w_A^n - w_{BA}^t,$$

$$w_B \sin 45^\circ = w_{BA}^n.$$

Buradan w_B və w_{BA}^t -ni tapırıq:

$$w_B = \frac{w_{BA}^n}{\sin 45^\circ} = \frac{400}{0,707} = 565,6 \text{ sm} / \text{san}^2.$$

$$w_{BA}^t = -w_B \cos 45^\circ + w_A^n = -400 + 2000 = 1600 \text{ sm} / \text{san}^2.$$

Nəhayət sürgüçölunun ε bucaq təcilin tapırıq:

$$\varepsilon = \frac{w_{BA}^t}{AB} = \frac{1600}{100} = 16 \text{ rad} / \text{san}^2.$$

Məsələ 11.14

Çarx şaquli müstəvi üzərində yerləşən düzxətli yolda sürüşmədən diyirlənir. Baxılan anda çarxın mərkəzinin sürəti $v_0 = 1 \text{ m/san}$, çarxın mərkəzinin təcili $w_0 = 3 \text{ m/san}^2$, radiusu $R = 0,5 \text{ m}$ olarsa, çarxın biri relsə paralel olan iki qarşılıqlı perpendikulyar diametrlərinin uclarının təcillərini tapmalı.

Həlli.

Çarx sürüşmədən diyirləndiyi üçün ani sürətlər mərkəzi onun yola toxunduğu M_1 nöqtəsinin üzərinə düşür. 13.31 məsələsinin həllindən çıxan nəticəyə əsasən çarxın O mərkəzinin sürət və təcili qiymətcə onun çevrəsi (çənbəri) üzərindəki nöqtələrin çarxın mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətindəki sürətinə və toxunan təcilinə bərabər olacaqdır, yəni:

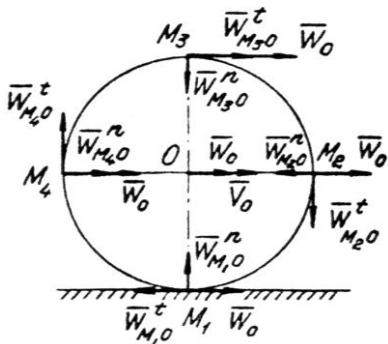
$$v_0 = M_1 O \cdot \omega, w_{M_1 O}^t = w_{M_2 O}^t = w_{M_3 O}^t = w_{M_4 O}^t = R\varepsilon = w_O = 3 \text{ m} / \text{san}^2.$$

Buradan çarxın O mərkəzi ətrafında ω fırlanma bucaq

sürəti və ε bucaq təcilini tapırıq:

$$\omega = \frac{v_o}{M_1O} = \frac{v_o}{R} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ rad/san}, \varepsilon = \frac{w_o}{R} = \frac{3}{0,5} = 6 \text{ rad/san}^2.$$

Çarx müntəzəm artan fırlanma hərəkəti etdiyi üçün onun M_1 , M_2 , M_3 və M_4 nöqtələrinin yuxarıda tapdığımız $\bar{w}_{M_1O}^t$, $\bar{w}_{M_2O}^t$, $\bar{w}_{M_3O}^t$ və $\bar{w}_{M_4O}^t$ toxunan təcil vektorları uyğun olaraq həmin nöqtələrdə çarxın çevrəsinə toxunan üzrə fırlanma hərəkətləri istiqamətlərində yönəliirlər (Şək. 11.19).



Şəkil 11.19

İndi çarxın çevrəsi üzərindəki nöqtələrin tam təcillərini tapaq. Bunun üçün çarxın O mərkəzini qütb qəbul edək. Onda məlum olduğu kimi, çarxın çevrəsi üzərindəki hər hansı M nöqtəsinin təcili O qütbünün təcili ilə həmin M nöqtəsinin bu qütb ətrafında fırlanma hərəkətidəki təcilinin həndəsi cəminə bərabər olar, yəni

$$\bar{w}_M = \bar{w}_O + \bar{w}_{MO} = \bar{w}_O + \bar{w}_{MO}^t + \bar{w}_{MO}^n.$$

Bu ifadəyə daxil olan çarxın O qütbünün $\bar{w}_O$ təcil vektoru onun bütün nöqtələri üçün qiymət və istiqamətcə sabitdir. Odur ki, $\bar{w}_O$ təcilini özünə paralel olaraq çarxın M_1 , M_2 , M_3 və M_4 nöqtələrinə köçürürük. Bu nöqtələrin O qütbü ətrafında fırlanma hərəkətidəki $\bar{w}_{M_1O}^n$, $\bar{w}_{M_2O}^n$,

$\overline{w}_{M_3 0}^n$ və $\overline{w}_{M_4 0}^n$ normal təcillərinin qiymətlərini aşağıdakı ifadələrdən tapırıq:

$$w_{M_1 O}^n = OM_1 \cdot \omega^2 = R\omega^2 = 0,5 \cdot 2^2 = 2 \text{ m/san}^2,$$

$$w_{M_2 O}^n = OM_2 \cdot \omega^2 = R\omega^2 = 2 \text{ m/san}^2,$$

$$w_{M_3 O}^n = OM_3 \cdot \omega^2 = R\omega^2 = 2 \text{ m/san}^2,$$

$$w_{M_4 O}^n = OM_4 \cdot \omega^2 = R\omega^2 = 2 \text{ m/san}^2.$$

Bu tapdığımız normal təcil vektorları uyğun olaraq çarxın M_1 , M_2 , M_3 və M_4 nöqtələrindən onların fırlanma radiusları üzrə O qütübünə doğru yönəliirlər (Şək. 11.19).

Şəkildə göstərilmiş təcillərin yerləşməsinə əsasən çarxın M_1 , M_2 , M_3 və M_4 nöqtələrinin tam təcillərinin qiymətlərini aşağıdakı ifadələrdən tapırıq:

$$w_{M_1} = \sqrt{(w_O - w_{M_1 O}^t)^2 + (w_{M_1 O}^n)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + 2^2} = 2 \text{ m/san}^2,$$

$$w_{M_2} = \sqrt{(w_O - w_{M_2 O}^t)^2 + (w_{M_2 O}^n)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + 3^2} = 3,16 \text{ m/san}^2,$$

$$w_{M_3} = \sqrt{(w_O + w_{M_3 O}^t)^2 + (w_{M_3 O}^n)^2} = \sqrt{(3+3)^2 + 2^2} = 6,32 \text{ m/san}^2,$$

$$w_{M_4} = \sqrt{(w_O + w_{M_4 O}^t)^2 + (w_{M_4 O}^n)^2} = \sqrt{(3+2)^2 + 3^2} = 5,83 \text{ m/san}^2.$$

Bu təcil vektorlarının istiqamətini tapmaq üçün çarxın M_1 , M_2 , M_3 və M_4 nöqtələrində tətbiq olunmuş

üç $\overline{w}_0$, $\overline{w}_{M_0}^t$ və $\overline{w}_{M_0}^n$ təcil vektorlarını həndəsi üsulla toplamaq lazımdır. Şəkildən aydındır ki, həmin təcil vektorlarının M_1 , M_2 , M_3 və M_4 nöqtələrinin OM_1 , OM_2 , OM_3 və OM_4 fırlanma radiusları ilə əmələ gətirdiyi α bucağının tangensi belə tapılır:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{w_O - w_{M_1 O}^t}{w_{M_1 O}^n} = \frac{3-3}{2} = 0, \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{w_{M_2 O}^t}{w_O - w_{M_2 O}^n} = \frac{3}{3-2} = 3, \\ \operatorname{tg} \alpha_3 &= \frac{w_O + w_{M_3 O}^t}{w_{M_3 O}^n} = \frac{3+3}{2} = 3, \operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{w_{M_4 O}^t}{w_O + w_{M_4 O}^n} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Çarxın $\overline{w}_{M_1}$, $\overline{w}_{M_2}$, $\overline{w}_{M_3}$ və $\overline{w}_{M_4}$ təcillərinin istiqaməti α bucağına əsasən müəyyən edilir.

Məsələ 11.15

Radiusu $r = 12 \text{ sm}$ olan dişli çarx, $R = 12 \text{ sm}$ radiuslu tərpənməz dişli çarxın O oxu ətrafında $\varepsilon_0 = 8 \text{ rad/san}^2$ bucaq təcili ilə fırlanan OA çarxqolu vasitəsilə hərəkətə gətirilir; çarxqolunun baxılan andakı bucaq sürəti $\omega_0 = 2 \text{ rad/san}$.

Tapmalı: 1) Tərpənən çarxın baxılan anda ani sürətlər mərkəzi üzərinə düşən M nöqtəsinin təcilini, 2) diametral qarşıda duran N nöqtəsinin təcilini, habelə 3) Q ani təcillər mərkəzinin vəziyyətini.

Həlli.

İkinci çarx birinci üzərində sürüşmədən diyirləndiyi

üçün onun M nöqtəsi ani sürətlər mərkəzi olacaqdır. Onda ikinci çarxın A mərkəzinin v_A sürəti onun $M(P)$ ani sürətlər mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətindəki sürət kimi belə tapılır:

$$v_A = MA \cdot \omega = r\omega.$$

Digər tərəfdən, A nöqtəsi tərpənməz O nöqtəsi ətrafında çarxqolu ilə birlikdə ω_0 bucaq sürəti ilə fırlandığı üçün yaza bilərik:

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = (R+r)\omega_0.$$

Bu iki ifadənin müqayisəsindən alarıq:

$$r\omega = (R+r)\omega_0$$

Buradan tərpənən çarxın ω bucaq sürətini tapırıq:

$$\omega = \frac{(R+r)\omega_0}{r} = \frac{(12+12) \cdot 2}{12} = 4 \text{ rad/san}.$$

Sonra ikinci çarxın A mərkəzinin təcili tapırıq. Həmin nöqtənin tam təcili onun O mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətindəki $\bar{w}_A^t$ toxunan və $\bar{w}_A^n$ normal təcillərinin həndəsi cəminə bərabərdir, yəni:

$$\bar{w}_A = \bar{w}_A^t + \bar{w}_A^n.$$

İndi bu toplanan təcilləri tapaq:

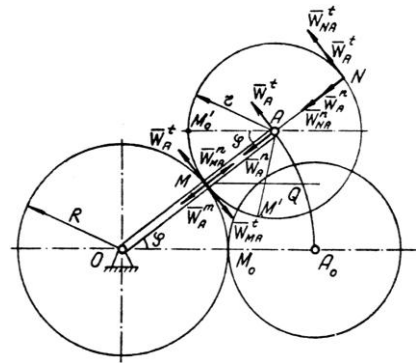
$$w_A^t = OA \cdot \varepsilon_0 = (R + r) \varepsilon_0 = (12 + 12) \cdot 8 = 192 \frac{\text{sm}}{\text{san}},$$

$$w_A^n = OA \cdot \omega_0^2 = (R + r) \omega_0^2 = (12 + 12) \cdot 2^2 = 96 \frac{\text{sm}}{\text{san}^2}.$$

OA çarxqolu artan fırlanma hərəkəti etdiyi üçün $\overline{w}_A^t$ təcil vektoru ona perpendikulyar üzrə A nöqtəsinin fırlanma hərəkəti istiqamətində, $\overline{w}_A^n$ təcil vektoru isə OA çarxqolu boyunca O mərkəzinə doğru yönəlir (Şək. 11.20).

İndi tərpənən çarxın M nöqtəsinin təcilini tapaq. Şəkildə tərpənən çarxın başlanğıc A_0 vəziyyəti və OA çarxqolunun O nöqtəsi ətrafında $\varphi = \omega_0 t$ bucağı qədər dönmən andakı A vəziyyəti göstərilmişdir.

Məlum olduğu kimi, tərpənən çarx t zaman fasiləsində onun A nöqtəsilə (qütbü ilə) birlikdə irəliləmə hərəkəti edir və eyni zamanda bu qütb ətrafında fırlanır. Çarxın başlanğıc anda üfüqi vəziyyətdə yerləşən $A_0 M_0$ xətti göstərilən irəliləmə hərəkətində



Şəkil 11.20

üfüqi AM_0' vəziyyətini tutur. Həmin zaman fasiləsində çarxın A mərkəzi O nöqtəsi ətrafında φ bucağı qədər dönmək $\overset{\cup}{A_0}A$ qövsü, onun M_0' nöqtəsi isə bu mərkəz

ətrafında φ' bucağı qədər dönərək M'_0M' qövsü cızır.

Şəkildən tapırıq:

$$A_0A = (R + r)\varphi = R\varphi + r\varphi,$$

$$M'_0M' = r\varphi' = M'_0M + MM' = M'_0M + M_0M = r\varphi + R\varphi.$$

Yuxarıdakı ifadələrin müqayisəsindən alırıq:

$$A_0A = M'_0M'.$$

Bu ifadədən zamana görə törəmələr alıb belə nəticəyə gəlirik ki, tərpənən çarxın A mərkəzinin sürəti və toxunan təcili qiymətcə onun M nöqtəsinin A mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətidəki sürət və toxunan təcilə bərabərdir, yəni:

$$v_A = v_{MA}, w_A^t = w_{MA}^t = r\varepsilon = 192 \frac{sm}{san^2}.$$

Buradan tərpənən çarxın bucaq təcilini tapırıq:

$$\varepsilon = \frac{w_A^t}{r} = \frac{192}{12} = 16 \frac{rad}{san^2}.$$

İndi M nöqtəsinin A mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətidəki normal təcili tapırıq:

$$w_{MA}^n = r\omega^2 = 12 \cdot 4^2 = 192 \frac{sm}{san^2}.$$

OA çarxqolu müntəzəm artan fırlanma hərəkəti etdiyi üçün tərpənən çarx da müntəzəm fırlanma hərəkəti edəcəkdir. Odur ki, $\vec{w}_{MA}^t$ təcil vektoru çarxın çevrəsinə M

nöqtəsindəki toxunan üzrə onun fırlanma istiqamətində yönələcəkdir. $\overline{w}_{MA}^n$ təcil vektoru isə həmin nöqtədən AM fırlanma radiusu üzrə A mərkəzinə doğru yönəlir (Şək. 11.20). Tərpənən çarxın M nöqtəsinin tam təcil vektoru aşağıdakı ifadədən tapılır:

$$\overline{w}_M = \overline{w}_A + \overline{w}_{MA} = \overline{w}_A^t + \overline{w}_A^n + \overline{w}_{MA}^t + \overline{w}_{MA}^n.$$

Bu toplanan təcillər şəkildə göstərilmişdir. Şəkildə M nöqtəsində tətbiq olunmuş $\overline{w}_A^t$, $\overline{w}_A^n$, $\overline{w}_{MA}^t$ və $\overline{w}_{MA}^n$ təcil vektorlarının yerləşməsinə əsasən çarxın M nöqtəsinin təcili qiymətcə belə tapılar:

$$\begin{aligned} w_M &= \sqrt{(w_A^t - w_{MA}^t)^2 + (w_A^n - w_{MA}^n)^2} = \\ &= \sqrt{(192 - 192)^2 + (96 - 192)^2} = 96 \text{ sm} / \text{san}^2 \end{aligned}$$

Yuxarıdakı ifadədən görünür ki, tərpənən çarxın M nöqtəsinin təcili onun AM fırlanma radiusu üzrə A mərkəzinə doğru yönəlir.

Eyni qayda ilə N nöqtəsinin $\overline{w}_N$ təcil vektorunu tapırıq:

$$\overline{w}_N = \overline{w}_A + \overline{w}_{NA} = \overline{w}_A^t + \overline{w}_A^n + \overline{w}_{NA}^t + \overline{w}_{NA}^n.$$

Burada $\overline{w}_{NA}^n$ və $\overline{w}_{NA}^t$ çarxın N nöqtəsinin A mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətindəki toxunan və normal təcillərdir və qiymətcə aşağıdakı ifadələrdən tapılır:

$$w_{NA}^t = AN \cdot \varepsilon = r\varepsilon = 12 \cdot 16 = 192 \text{ sm} / \text{san}^2,$$

$$w_{NA}^n = AN \cdot \omega^2 = r\omega^2 = 12 \cdot 4^2 = 192 \text{ sm} / \text{san}^2.$$

$\bar{w}_{NA}^t$ təcil vektoru çarxın çevrəsinə N nöqtəsində toxunan üzrə onun fırlanma hərəkətinin istiqamətində yönəlir. $\bar{w}_{NA}^n$ təcil vektoru isə N nöqtəsinin AN fırlanma radiusu üzrə onun A mərkəzinə tərəf yönəlir. Bu təcil vektorları və $\bar{w}_A^t$, $\bar{w}_A^n$ təcilləri N nöqtəsində tətbiq olunaraq şəkildə göstərilmişdir. Həmin təcil vektorlarının yerləşməsinə əsasən N nöqtəsinin $\bar{w}_N$ təcilinin qiymətini belə tapırıq:

$$\begin{aligned} w_N &= \sqrt{(w_A^t + w_{NA}^t)^2 + (w_A^n + w_{NA}^n)^2} = \\ &= \sqrt{(192 + 192)^2 + (96 + 192)^2} = 4800 \text{ sm} / \text{san}^2 \end{aligned}$$

İndi tərpənən çarxın Q ani təcillər mərkəzinə tapaq. Bunun üçün M nöqtəsinin Q ani təcillər mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətindəki $\bar{w}_{MQ}$ təcilinin qiymət və istiqamətini aşağıdakı ifadələrdən tapırıq:

$$w_M = w_{MQ} = QM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

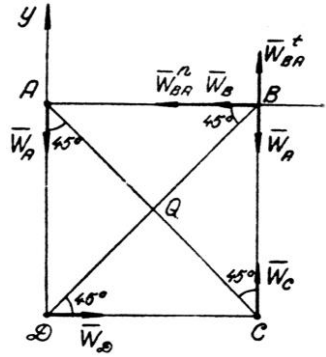
Buradan tapırıq:

$$QM = \frac{w_M}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{96}{\sqrt{16^2 + 4^4}} = 4,24 \text{ sm}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{16}{4^2} = 1, \alpha = 45^\circ.$$

Deməli, tərpənən çarxın ani təcillər mərkəzi onun M nöqtəsinin təcil vektoru ilə $\alpha = 45^\circ$ bucaq əmələ gətirən xətt üzərində həmin nöqtədən $4,24 \text{ sm}$ məsafədə yerləşir.

Məsələ 11.16

Tərəfləri $a=10$ sm olan ABCD kvadrati şəkil müstəvisi üzərində hərəkət edir. Baxılan anda A və B təpələrinin təcilləri qiymətcə eynidir və 10 m/san^2 -a bərabərdir, istiqamətcə şəkildə göstərildiyi kimi kvadratin tərəfləri üzrə yönəlmişdir. Ani təcillər mərkəzinin vəziyyətini, C və D nöqtələrinin təcillərini tapmalı (Şək. 11.21).



Şəkil 11.21

Həlli.

Kvadratin A nöqtəsini qütb qəbul edib B nöqtəsinin təcilinin ifadəsini yazaq:

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{BA} = \vec{w}_A + \vec{w}_{BA}^t + \vec{w}_{BA}^n.$$

Kvadratin A qütübü ətrafında saat əqrəbinin hərəkətinin əksi istiqamətində artan fırlanma hərəkəti etdiyini yəqin edərək, bu toplanan təcilləri şəkildə B nöqtəsində tətbiq edirik.

Yuxarıdakı vektorial ifadəni şəkildə göstərilmiş x və y oxları üzərinə proyeksiyalayıb alırıq:

$$w_{Bx} = -w_B = -w_{BA}^n = -AB \cdot \omega^2, w_{By} = 0 = -w_A + w_{BA}^t = -w_A + AB \cdot \varepsilon$$

Bu ifadələrdən ABCD kvadratinın ω fırlanma bucaq sürəti və ε bucaq təcilini tapırıq:

$$\omega = \sqrt{\frac{w_B}{AB}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1 \text{ rad/san}, \varepsilon = \frac{w_A}{AB} = \frac{10}{10} = 1 \text{ rad/san}^2.$$

Kvadratin ani təcillər mərkəzini tapmaq üçün (9.33) ifadəsinə əsasən onun A nöqtəsinin təcilini aşağıdakı kimi tapırıq:

$$w_A = QA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Buradan tapırıq:

$$QA = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{10}{\sqrt{1^2 + 1^4}} = 5\sqrt{2} \text{ sm}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{1} = 1, \alpha = 45^\circ.$$

Buradan görürük ki, kvadratin Q ani təcillər mərkəzi A və B nöqtələrinin $\bar{w}_A$ və $\bar{w}_B$ təcilləri ilə saat əqrəbinin hərəkətinin əksi istiqamətində $\alpha = 45^\circ$ bucaq təşkil edən xətlərin kəsişmə nöqtəsində yerləşir (kvadratin mərkəzi). Kvadratin Q ani təcillər mərkəzi məlum olduqda onun C və D nöqtələrinin təcillərinin qiymətini (11.33) ifadəsinə əsasən belə tapırıq:

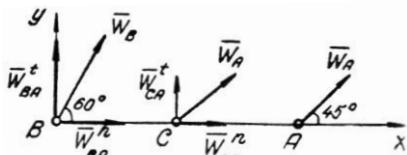
$$w_C = QC\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{10\sqrt{2}}{2} \sqrt{1^2 + 1^4} = 10 \text{ sm/san}^2,$$

$$w_D = QD\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{10\sqrt{2}}{2} \sqrt{1^2 + 1^4} = 10 \text{ sm/san}^2$$

Bu təcil vektorları da uyğun olaraq QC və QD xətləri ilə saat əqrəbinin hərəkətinin əksi istiqamətində $\alpha = 45^\circ$ bucaq təşkil edirlər. Odur ki, bu təcillər uyğun olaraq kvadratin CB və DC tərəfləri istiqamətində yönəliirlər.

Məsələ 11.17

Uzunluğu $0,2 \text{ m}$ olan AB çubuğu şəkil müstəvisində hərəkət edir. A nöqtəsinin $\bar{w}_A$ ($w_A = 2 \text{ m/san}^2$) təcil vektoru çubuq üzərinə düşən x oxu ilə 45° bucaq təşkil edir. B nöqtəsinin $\bar{w}_B$ ($w_B = 4,42 \text{ m/san}^2$) təcil vektoru x oxu ilə 60° bucaq əmələ gətirir. Çubuğun bucaq sürətini, bucaq təcilini və onun orta C nöqtəsinin təcilini tapmalı (Şək. 11.22).



Şəkil 11.22

Həlli.

Çubuğun A nöqtəsinə qütb qəbul edib onun B nöqtəsinin təcilini tapırıq:

$$\bar{w}_B = \bar{w}_A + \bar{w}_{BA} = \bar{w}_A + \bar{w}_{BA}^t + \bar{w}_{BA}^n.$$

Çubuğun A qütbü ətrafında saat əqrəbinin hərəkətinin əksi istiqamətində azalan fırlanma hərəkəti etdiyini yəqin edərək, bu ifadəyə daxil olan toplanan təcilləri şəkildə B nöqtəsində tətbiq edirik. Yuxarıdakı vektorial ifadəni şəkildə göstərilmiş x və y oxları üzərinə proyeksiyalayaq:

$$w_{Bx} = w_B \cos 60^\circ = w_A \cos 45^\circ + w_{BA}^n,$$

$$w_{By} = w_B \sin 60^\circ = w_A \sin 45^\circ + w_{BA}^t.$$

B nöqtəsinin A qütbü ətrafında fırlanma hərəkətindəki normal w_{BA}^n və toxunan w_{BA}^t təcillərini aşağıdakı ifadələrdən tapırıq:

$$w_{BA}^n = AB \cdot \omega^2, \quad w_{BA}^t = AB \cdot \varepsilon.$$

Burada ω və ε – uyğun olaraq çubuğun bucaq sürəti və bucaq təcilidir.

Bu ifadələri yuxarıda yerinə yazıb alırıq:

$$w_B \cos 60^0 = w_A \cos 45^0 - AB \cdot \omega^2,$$

$$w_B \cos 30^0 = w_A \cos 45^0 + AB \cdot \varepsilon$$

Buradan çubuğun ω bucaq sürətini və ε bucaq təcilini tapırıq:

$$\omega^2 = \frac{w_B \cos 60^0 - w_A \cos 45^0}{AB} = \frac{4,42 \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,707}{0,2} = 4, \omega = 2 \text{ rad/san},$$

$$\varepsilon = \frac{w_B \cos 30^0 - w_A \cos 45^0}{AB} = \frac{4,42 \cdot 0,86 - 2 \cdot 0,707}{0,2} = 12,05 \text{ rad/san}^2.$$

İndi çubuğun C nöqtəsinin təcilini tapaq. Bunun üçün C nöqtəsinin A qütbünə nəzərən təcil vektorunun ifadəsini yazırıq:

$$\overline{w}_C = \overline{w}_A + \overline{w}_{CA} = \overline{w}_A + \overline{w}_{CA}^t + \overline{w}_{CA}^n.$$

Şəkildə toplanan təcillər C nöqtəsində tətbiq edilmişdir. Bu vektorial ifadəni x və y oxları üzərinə proyeksiyalayaq:

$$w_{Cx} = w_A \cos 45^0 + w_{CA}^n,$$

$$w_{Cy} = w_A \cos 45^0 + w_{CA}^t.$$

C nöqtəsinin A qütbü ətrafında fırlanma hərəkətindəki w_{CA}^n normal və w_{CA}^t toxunan təcillərini aşağıdakı

ifadələrdən tapırıq:

$$w_{CA}^n = AC \cdot \omega^2, \quad w_{CA}^t = AC \cdot \varepsilon.$$

C nöqtəsinin təcilinin w_{Cx} və w_{Cy} proyeksiyalarını tapırıq:

$$w_{Cx} = w_A \cos 45^\circ + AC \cdot \omega^2 = 2 \cdot 0,707 + 0,1 \cdot 2^2 = 1,4148 \text{ m/san}^2,$$

$$w_{Cy} = w_A \cos 45^\circ + AC \cdot \varepsilon = 2 \cdot 0,707 + 0,1 \cdot 12,05 = 2,6145 \text{ m/san}^2.$$

Çubuğun C nöqtəsinin $\overline{w}_C$ təcilinin bu proyeksiyaları məlum olduqda onun qiymətini aşağıdakı ifadədən tapırıq:

$$w_C = \sqrt{w_{Cx}^2 + w_{Cy}^2} = \sqrt{1,414^2 + 2,614^2} = 3,18 \text{ sm/san}^2.$$

XII Fəsil. Bərk cismin tərpənməz nöqtə ətrafında fırlanma hərəkəti

Cismin hərəkəti zamanı onun bir nöqtəsi tərpənməz qalarsa, bu hərəkətə bərk cismin tərpənməz nöqtə ətrafında fırlanma hərəkəti deyilir.

Tərpənməz nöqtə ətrafında fırlanan cismin hərəkət tənlikləri (Eyler tənlikləri) belə olur:

$$\psi = f_1(t), \theta = f_2(t), \varphi = f_3(t).$$

Burada ψ , θ , φ Eyler bucaqları adlanır. Tərpənməz O nöqtəsi ətrafında fırlanan cisimlə sərt əlaqədar olan və onunla birlikdə hərəkət edən $Ox'y'z'$ koordinat sisteminin x', y', z' oxlarının, başlanğıcı həmin O nöqtəsində yerləşən tərpənməz $Oxyz$ sisteminin x, y, z oxları ilə əmələ gətirdiyi $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ bucaqları üç ψ, θ, φ Eyler bucaqlarından asılı olaraq aşağıdakı ifadələrdən tapılır:

$$\cos \alpha_1 = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi,$$

$$\cos \beta_1 = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi,$$

$$\cos \gamma_1 = \sin \varphi \sin \theta,$$

$$\cos \alpha_2 = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi,$$

$$\cos \beta_2 = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi,$$

$$\cos \gamma_2 = \cos \varphi \sin \theta,$$

$$\cos \alpha_3 = \sin \theta \sin \psi,$$

$$\cos \beta_3 = -\sin \theta \cos \psi,$$

$$\cos \gamma_3 = \cos \theta.$$

Bu bucaqlar aşağıdakı cədvəldə göstərilmişdir.

	x	y	z
x'	α_1	β_1	γ_1
y'	α_2	β_2	γ_2
z'	α_3	β_3	γ_3

Məlum olduğu kimi, bərk cismin tərpənməz nöqtə ətrafında fırlanma hərəkətinə verilmiş zaman anında həmin tərpənməz nöqtədən keçən ani P oxu ətrafında müəyyən $\bar{\omega}$ bucaq sürəti ilə fırlanma hərəkəti kimi baxmaq olar. Odur ki, tərpənməz O nöqtəsi ətrafında fırlanan cismin hər hansı bir M nöqtəsinin sürəti onun həmin ani ox ətrafında fırlanma hərəkətindəki sürət kimi belə tapılar:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (12.1)$$

Burada $\bar{r}$ cismin M nöqtəsinin tərpənməz O nöqtəsinə nəzərən radius-vektorudur, $\bar{\omega}$ isə cismin ani ox ətrafında fırlanma bucaq sürətidir. Həmin bucaq sürəti vektoru ani P oxu boyunca elə yönəlir ki, onun sonundan baxdıqda cisim bu ox ətrafında saat əqrəbinin əks istiqamətində fırlansın.

(10.1) vektorial ifadəsini tərpənməz x, y, z dekart

koordinat oxları üzərinə proyeksiyalayıb alırıq:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

Burada ω_x , ω_y , ω_z cismin $\bar{\omega}$ bucaq sürətinin x , y , z oxları üzərindəki proyeksiyalarıdır; x , y , z onun M nöqtəsinin tərpənməz $Oxyz$ sistemindəki koordinatlarıdır.

Tərpənməz nöqtə ətrafında fırlanan cismin $\bar{\omega}$ bucaq sürətinin tərpənməz x , y , z koordinat oxları üzərindəki proyeksiyaları belə tapılır:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

Həmin bucaq sürətinin tərpənən x' , y' , z' koordinat oxları üzərindəki proyeksiyaları isə aşağıdakı ifadələrdən tapılır:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_{y'} &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Tərpənməz nöqtə ətrafında fırlanan cismin ani oxunun tərpənməz $Oxyz$ sistemindəki tənlikləri belə olur:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (12.5)$$

Həmin ani oxun tərpənən $Ox'y'z'$ sistemindəki tənlilikləri isə aşağıdakı oxşar ifadələrdən tapılır:

$$\frac{x'}{\omega_{x'}} = \frac{y'}{\omega_{y'}} = \frac{z'}{\omega_{z'}}. \quad (12.6)$$

Tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin M nöqtəsinin sürəti qiymətcə belə tapılır:

$$v = \omega \cdot d.$$

Burada α cismin M nöqtəsinin ani P oxundan olan məsafəsidir, yəni M nöqtəsinin bu ox ətrafında ani fırlanma radiusudur. Bu sürət vektoru ani oxa perpendikulyar olan müstəvi üzərində yerləşir və həmin nöqtənin bu ox ətrafında fırlanma hərəkəti istiqamətində yönəlir.

Tərpənməz O nöqtəsi ətrafında fırlanan cismin həmin M nöqtəsinin təcili (12.1) ifadəsində zamana görə alınmış törəmə kimi aşağıdakı ifadədən tapılır:

$$\bar{w} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{w}^{\varepsilon} + \bar{w}^{\omega}. \quad (12.7)$$

Burada $\bar{\varepsilon}$ cismin tərpənməz O nöqtəsi ətrafında fırlanma bucaq təcili vektorudur və belə ifadə olunur:

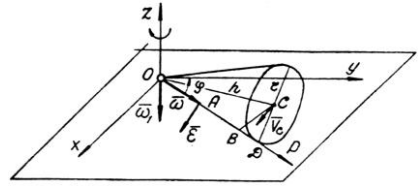
$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \left(\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}, \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}, \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} \right) \quad (12.8)$$

$\bar{\varepsilon}$ vektoru qiymət və istiqamətcə dəyişən $\bar{\omega}$ bucaq

sürəti vektorunun qodoqrafına toxunan istiqamətdə yönəlir və O nöqtəsində tətbiq olunur. Başqa sözlə, $\vec{\varepsilon}$ bucaq sürəti $\vec{\omega}$ vektorunun son nöqtəsinin sürətinə bərabərdir.

Məsələ 12.1

Hündürlüyü $h = 4 \text{ sm}$ və oturacağıın radiusu $r = 3 \text{ sm}$ olan konus, təpəsi tərpənməz O nöqtəsində qalmaq şərtlə üfüqi müstəvi üzərində sürüşmədən diyirlənir. Konusun oturacağıın mərkəzinin sürəti $v_C = 48 \text{ sm/san} = \text{sabit}$ olarsa, onun bucaq sürətini, bucaq sürəti qodoqrafını cızan nöqtənin koordinatlarını və konusun bucaq təcilini tapmalı (Şək. 12.1).



Şəkil 12.1

Həlli.

Şəkildən göründüyü kimi, ani P oxu və $\vec{\omega}$ ani fırlanma bucaq sürəti konusun üfüqi Oxy müstəvisinə toxunan doğurarı üzrə yönəlir. Onda konusun oturacağıın mərkəzi C nöqtəsinin sürətinin qiyməti ω bucaq sürətilə bu nöqtənin ani oxdan olan BC məsafəsinin vurma hasilinə bərabər olacaqdır, yəni

$$v_C = \omega \cdot BC. \quad (12.9)$$

Şəkildən BC məsafəsini tapmaq. Bunun üçün aşağıdakı ifadələri yazırıq:

$$BC^2 = r^2 - BD^2 = h^2 - OB^2, BD = OD - OB = \sqrt{r^2 + h^2} - OB, \\ r^2 - (\sqrt{r^2 + h^2} - OB)^2 = h^2 - OB^2.$$

$$\text{Buradan tapırıq: } OB = \frac{h^2}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{4^2}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{16}{5} \text{ sm.}$$

Onda yuxarıdakı ifadədən alırıq:

$$BC = \sqrt{h^2 - OB^2} = \frac{rh}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5} \text{ sm.}$$

(12.9) ifadəsindən konusun ω bucaq sürətini tapırıq:

$$\omega = \frac{v_C}{BC} = \frac{48 \cdot 5}{12} = 20 \text{ rad/san.}$$

Konusun $\bar{\omega}$ bucaq sürəti vektorunun son A nöqtəsi radiusu ω olan çevrə üzrə z oxu ətrafında ω_1 bucaq sürəti ilə fırlanır. Konusun oturacağıнын mərkəzi C nöqtəsi də z oxu ətrafında həmin ω_1 bucaq sürəti ilə fırlanır.

$$v_C = \omega_1 \cdot OB. \quad (12.10)$$

Burada OB oturacağın C mərkəzinin z oxu ətrafında fırlanma radiusudur.

Tapdığımız OB -ni (12.10) ifadəsində yerinə yazıb alırıq:

$$\omega_1 = \frac{v_C}{OB} = \frac{48 \cdot 5}{16} = 15 \text{ rad/san.}$$

İndi $\bar{\omega}$ vektoru ilə y oxu arasındakı φ bucağını tapaq:

$$\varphi = \omega_1 t = 15t.$$

Şəkildən $\overline{\omega}$ vektorunun son A nöqtəsinin koordinatlarını tapırıq:

$$x_1 = \omega \sin \varphi = 20 \sin 15t, y_1 = \omega \cos \varphi = 20 \cos 15t.$$

Konusun $\overline{\varepsilon}$ bucaq təcilini tapaq:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}.$$

Konusun hərəkəti zamanı $\overline{\omega}$ vektorunun qiyməti sabit qalır, istiqaməti dəyişir. Onda $\overline{\varepsilon}$ bucaq təcili z oxu ətrafında $\overline{\omega}_1$ bucaq sürəti ilə fırlanan A nöqtəsinin sürətinin vektorial ifadəsindən tapılır:

$$\overline{\varepsilon} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}.$$

Buradan konusun $\overline{\varepsilon}$ bucaq təcilinin qiymət və istiqamətini tapırıq:

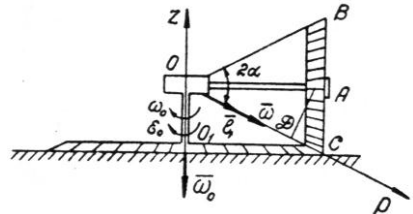
$$\varepsilon = \omega_1 \omega \sin(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}) = 15 \cdot 20 \sin 90^\circ = 300 \text{ rad/san}^2.$$

Aydındır ki, $\overline{\varepsilon}$ vektoru $\overline{\omega}_1$ və $\overline{\omega}$ vektorlarının yerləşdiyi müstəviyə perpendikulyar olub, elə yönəlik ki, onun sonundan baxdıqda $\overline{\omega}_1$ vektorunun qısa yolla $\overline{\omega}$ vektoru üzərinə düşməsi saat əqrəbinin fırlanma istiqamətinin əksinə olsun. Odur ki, konusun $\overline{\varepsilon}$ bucaq təcili vektorunun istiqaməti A nöqtəsinin cızdığı çevrəyə ($\overline{\omega}$ bucaq sürəti vektorunun qodoqrafına) toxunan olur.

Məsələ 12.2

OA çarxqolu üzərində sərbəst oturdulmuş konusvari dişli çarx tərənəmz konusvari dişli çarx üzərində diyərlənir. Diyərlənən dişli çarxın ω bucaq sürətini və ε bucaq təcilini tapmalı.

Tərənəmz O_1O oxu ətrafında fırlanan OA çarxqolunun bucaq sürətinin və bucaq təcilinin (onların istiqamətləri şəkildə göstərilmişdir) qiymətləri uyğun olaraq ω_0 və ε_0 -a bərabərdir (Şək. 12.2).



Şəkil 12.2

Həlli.

Əvvəlcə diyərlənən konusvari çarxın A nöqtəsinin ω_0 və ε_0 -in verilmiş qiymətlərinə əsasən sürətini və təcilini tapaq. Bu nöqtə OO_1 (z) oxu ətrafında müntəzəm artan fırlanma hərəkəti etdiyi üçün onun sürət və təcilinin qiymətlərini aşağıdakı ifadələrdən tapırıq:

$$v_A = OA \cdot \omega_0, w_A = OA \sqrt{\varepsilon_0^2 + \omega_0^4}.$$

Diyərlənən çarx tərənəmz çarx üzrə sürüşmədən diyərləndiyi üçün bu çarxların toxunduğu C nöqtəsi baxdığımız anda tərənəmz qalacaqdır. Onda tərənəmz O və C nöqtələrindən keçən P oxu diyərlənən çarxın ani fırlanma oxu olacaqdır.

Odur ki, diyərlənmə çarxın A nöqtəsinin sürəti

qiymətcə onun ani P oxu ətrafında fırlanma hərəkətinin sürəti kimi belə tapılır:

$$v_A = DA \cdot \omega.$$

Burada DA diyirlənən çarxın A nöqtəsindən ani oxa endirilmiş perpendikulyardır (ani fırlanma radiusudur). Onu şəkildən tapırıq:

$$DA = OA \sin \alpha$$

Bu qiyməti yuxarıdakı ifadədə yerinə yazıb alırıq:

$$v_A = OA \cdot \omega \sin \alpha.$$

Buradan ω ani bucaq sürətinin qiymətini tapırıq:

$$\omega = \frac{v_A}{OA \sin \alpha} = \frac{OA \cdot \omega_0}{OA \cdot \sin \alpha} = \frac{\omega_0}{\sin \alpha}.$$

Bu bucaq sürəti vektoru ani P oxu boyunca O nöqtəsindən C -yə tərəf yönəlir. İndi diyirlənən çarxın ε bucaq təcili vektorunu tapaq. Ani oxun vahid vektorunu $\bar{e}_1$ ilə işarə edib ani fırlanma bucaq sürətini belə ifadə edirik:

$$\bar{\omega} = \omega \bar{e}_1 = \frac{\omega_0}{\sin \alpha} \cdot \bar{e}_1.$$

Bu ifadəyə daxil olan ω_0 bucaq sürətinin qiyməti, $\bar{e}_1$ vektorunun isə istiqaməti dəyişir. Həmin ifadədən zamana görə alınmış törəmə diyirlənən çarxın ε bucaq təcilinə bərabərdir, yəni:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{d\omega_0}{dt} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\omega_0}{\sin \alpha} \cdot \frac{d\bar{e}_1}{dt} = \frac{\varepsilon_0}{\sin \alpha} \cdot \bar{e}_1 + \\ &+ \frac{\omega_0}{\sin \alpha} \cdot \frac{d\bar{e}_1}{dt}. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Şəkildən görüldüyü kimi $\bar{e}_1$ vektoru ani P oxu ilə birlikdə verilmiş anda z oxu ətrafında $\bar{\omega}_0$ bucaq sürəti və $\bar{\varepsilon}_0$ bucaq təcili ilə saat əqrəbi istiqamətində fırlanır. Odur ki, həmin vektorun törəməsini belə ifadə etmək olar:

$$\frac{d\bar{e}_1}{dt} = \bar{\omega}_0 \times \bar{e}_1.$$

Buradan tapırıq:

$$\frac{d\bar{e}_1}{dt} = \omega_0 e_1 \sin(\bar{\omega}_0, \bar{e}_1) \cdot \bar{e}_2 = \omega_0 \cos \alpha \cdot \bar{e}_2. \quad (12.12)$$

Burada $\bar{e}_2$ vektoru qiymətcə vahidə bərabər olub, istiqamətcə $\bar{\omega}_0$ və $\bar{e}_1$ vektorlarının yerləşdiyi OO_1C üçbucaq müstəvisinə perpendikulyar üzrə şəkildən bizə tərəf yönəlir.

Beləliklə, (12.12) asılılığını (12.11)-də yerinə yazıb diyirlənən konusvari dişli çarxın $\bar{\varepsilon}$ bucaq təcili vektorunu tapırıq:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{\sin \alpha} \cdot \bar{e}_1 + \omega_0^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \bar{e}_2.$$

Məsələ 12.3

Cismin tərpənməz nöqtə ətrafında hərəkəti Eylerin

$$\varphi = 4t, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - 2t, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$
 bucaqları ilə verilmişdir.

Tərpənməz x, y, z oxlarına nəzərən bucaq sürəti qodoqrafını, bucaq sürətini və bucaq təcilini tapmalı.

Həlli.

Cismin $\bar{\omega}$ bucaq sürətinin tərpənməz x, y, z koordinat oxları üzərindəki proyeksiyalarını (12.3) ifadələrinə əsasən tapırıq:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi = 4 \cos 2t \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \cos 2t, \\ \omega_y &= -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi = -4 \sin 2t \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3} \sin 2t, \\ \omega_z &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 = 0. \end{aligned} \right\} (12.13)$$

Onda bucaq sürətinin qiyməti aşağıdakı ifadədən tapılır:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{12 \cos^2 2t + 12 \sin^2 2t} = 2\sqrt{3} \text{ rad/san}.$$

İndi (12.13) ifadələrinə əsasən (12.8) ifadəsindən cismin $\bar{\varepsilon}$ bucaq təcilinin tərpənməz x , y , z oxları üzərindəki proyeksiyalarını tapırıq:

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt} = -4\sqrt{3} \sin 2t, \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt} = -4\sqrt{3} \cos 2t, \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = 0$$

Bucaq təcilinin bu proyeksiyalarına əsasən onun qiymətini tapırıq:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{48 \sin^2 2t + 48 \cos^2 2t} = 4\sqrt{3} \text{ rad/san}^2$$

Məsələ 12.4

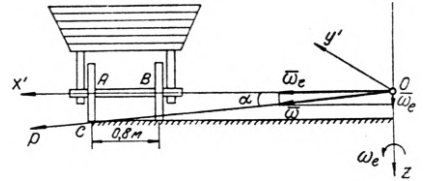
Vaqonun üfüqi yolla diyirlənən xarici çarxının tərpənən və tərpənməz aksoidlərini tapmalı. Yolun orta əyrilik radiusu 5 m , vaqon çarxının radiusu $0,25 \text{ m}$, relslər arasındakı məsafə $0,80 \text{ m}$ -dir.

Qeyd: Çarx vaqonla birlikdə yolun diyirlənmə mərkəzindən keçən şaquli Oz oxu ətrafında və vaqona

nəzərən AB oxu ətrafında fırlanır, yəni tərpənməz O nöqtəsi ətrafında fırlanır.

Həlli.

Şəkildən görüldüyü kimi, vaqonun üfüqi yolla diyirlənən xarici çarxının ani P fırlanma oxu onun relsə toxunduğu C nöqtəsi ilə O nöqtəsindən keçir. Odur ki, vaqonun $\bar{\omega}$ ani bucaq sürəti vektoru bu ox istiqamətində yönələcəkdir.



Şəkil 12.3

Vaqon üfüqi yolla sabit v sürətilə hərəkət edir. Onda o tərpənməz z oxu ətrafında $\bar{\omega}_e$ bucaq sürəti ilə köçürmə fırlanma hərəkəti edəcəkdir. Bunun nəticəsində $\bar{\omega}$ ani fırlanma bucaq sürəti vektoru da z oxu ətrafında həmin $\bar{\omega}_e$ bucaq sürətilə fırlanacaqdır (Şək. 12.3).

Odur ki, vaqonun ani P oxu ətrafında $\bar{\omega}$ fırlanma bucaq sürətinin şəkildə göstərilmiş tərpənməz x , y , z oxları üzərindəki proyeksiyaları belə tapılır:

$$\omega_x = \omega \cos(\bar{\omega}, x) = \omega \cos \alpha \cos \varphi = \omega \frac{OA}{OC} \cos \varphi = \frac{\omega}{OC} 5,4 \cos \omega_e t,$$

$$\omega_y = \omega \cos(\bar{\omega}, y) = \omega \cos \alpha \sin \varphi = \omega \frac{OA}{OC} \sin \varphi = \frac{\omega}{OC} 5,4 \sin \omega_e t,$$

$$\omega_z = \omega \cos(\bar{\omega}, z) = \omega \sin \alpha = \omega \frac{AC}{OC} = \frac{\omega}{OC} 0,25.$$

Burada φ vaqonun t zaman fasiləsində z oxu ətrafında

dönmə bucağıdır. Bu ifadələri ani oxun tərpənməz sistemindəki (12.4) tənliklərində yerinə yazıb alırıq:

$$\frac{x}{5,4 \cos \omega_e t} = \frac{y}{5,4 \sin \omega_e t} = \frac{z}{0,25}.$$

Buradan tapırıq:

$$\cos \omega_e t = \frac{0,25x}{5,4z}, \sin \omega_e t = \frac{0,25y}{5,4z}.$$

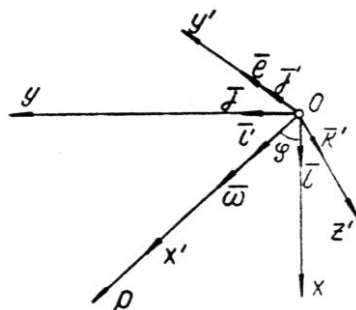
Bu ifadələri kvadrata yüksəldib tərəf-tərəfə toplayaraq tərpənməz aksoidin tənliyini tapırıq:

$$\frac{0,0625x^2}{5,4^2 z^2} + \frac{0,0625y^2}{5,4^2 z^2} = 1$$

və ya
$$x^2 + y^2 = 466,56z^2.$$

Bu tənlik simmetriya oxu Oz oxu üzərinə düşən və təpə bucağı $\beta = 2\arctg 21,6 = 174^\circ 42'$ olan konusun tənliyidir.

İndi tərpənən aksoidin tənliyini tapaq. Bunun üçün vaqonun xarici çarxı ilə əlaqədar olan $Ox'y'z'$ koordinat sistemi götürək, belə ki, z' oxu tərpənməz z oxu üzərinə düşsün, x' oxu isə vaqonun xarici çarxının A nöqtəsindən keçsin, yəni çarxın AB oxu boyunca



Şəkil 12.4

yönəlsin. Onda y' oxu şəkildə göstərildiyi kimi yönələr. Tərpənməz x, y, z oxlarının vahid vektorlarını $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ilə, tərpənən x', y', z' oxlarının vahid vektorlarını isə uyğun olaraq $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ ilə işarə edək. Başlanğıc anda hər iki koordinat sisteminin uyğun oxları bir-birinin üzərinə düşür (Şək. 12.4).

$\bar{j}'$ vektorunun Oxy koordinat müstəvisi üzərindəki proyeksiyasının vahid vektorunu $\bar{e}$ ilə işarə edək. Bu vektoru x və y oxları boyunca toplananlara ayıraq:

$$\bar{e} = -\bar{i} \sin \varphi + \bar{j} \cos \varphi.$$

Vaqon z oxu ətrafında ω_e bucaq sürətilə φ bucağı qədər döənən zaman x' oxu da Oxy müstəvisi üzrə sürüşərək, z oxu ətrafında φ bucağı qədər dönəcəkdir. Tərpənən $Ox'y'z'$ sisteminin bu zaman fasiləsində x' oxu ətrafında dönmə bucağını β ilə işarə edək. Bunun nəticəsində şəkildə göstərilmiş y' və z' oxları z oxu ilə uyğun olaraq $90^\circ - \beta$ və β bucaqları əmələ gətirəcəkdir.

Tərpənən $Ox'y'z'$ sisteminin $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ vahid vektorlarını tərpənməz x, y, z oxları boyunca toplananlara ayıraq:

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}' &= \bar{i} \cos \varphi + \bar{j} \sin \varphi, \\ \bar{j}' &= \bar{e} \cos \beta + \bar{k} \sin \beta = -\bar{i} \sin \varphi \cos \beta + \bar{j} \cos \varphi \cos \beta + \bar{k} \sin \beta, \\ \bar{k}' &= \bar{k} \cos \beta - \bar{e} \sin \beta = \bar{k} \cos \beta + \bar{i} \sin \varphi \sin \beta - \bar{j} \cos \varphi \sin \beta. \end{aligned} \right\} (12.14)$$

Bu ifadələrə daxil olan β bucağı belə tapılır:

$$\beta = \omega_r t.$$

Burada ω_r vaqonun xarici çarxının x' oxu ətrafında nisbi fırlanma hərəkətinin bucaq sürətidir. Şəkildən tapırıq:

$$\omega_r = \omega \cos \alpha, \omega_e = \omega \sin \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{OA}{oc}, \sin \alpha = \frac{AC}{OC}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{0,25}{5,4} = 0,046$$

Xarici çarxın $\bar{\omega}$ bucaq sürəti vektorunu x' və z oxları boyunca toplananlara ayıraq:

$$\omega = \omega(\bar{i}' \cos \alpha + \bar{k} \sin \alpha) = \omega(\bar{i} \cos \varphi \cos \alpha +$$

$$+ \bar{j} \sin \varphi \cos \alpha + \bar{k} \sin \alpha). \quad (12.15)$$

(12.14) vektorial ifadələrini skalyar olaraq $\bar{\omega}$ bucaq sürəti vektorunun (12.15) vektorial ifadəsinə vurub həmin bucaq sürəti vektorunun tərpənən x' , y' , z' oxları üzərindəki proyeksiyalarını tapırıq:

$$\omega_{x'} = \omega(\cos^2 \varphi \cos \alpha + \sin^2 \varphi \cos \alpha) = \omega(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \cos \alpha,$$

$$\omega_{y'} = \omega(-\cos \varphi \sin \varphi \cos \alpha \cos \beta + \sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha \cos \beta +$$

$$+ \sin \alpha \sin \beta) = \omega \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\omega_{z'} = \omega(-\sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha \sin \beta + \sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha \sin \beta +$$

$$+ \sin \alpha \cos \beta) = \omega \sin \alpha \cos \beta.$$

Bu ifadələri (12.6)-da yerinə yazıb vaqonun kənar çarxının ani oxunun tərpənən $Ox'y'z'$ sistemindəki tənliliklərini alırıq:

$$\frac{x'}{\cos \alpha} = \frac{y'}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{z'}{\sin \alpha \cos \beta}.$$

Buradan tapırıq:

$$\sin \beta = \frac{y' \cos \alpha}{x' \sin \alpha} = 21,6 \frac{y'}{x'}; \cos \beta = \frac{z' \cos \alpha}{x' \sin \alpha} = 21,6 \frac{z'}{x'}.$$

Bu ifadələri kvadrata yüksəldib, tərəf-tərəfə toplayaraq, vaqonun kənar çarxının tərpənən aksoidinin tənliyini tapırıq:

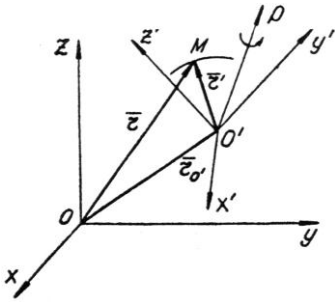
$$(y')^2 + (z')^2 = \frac{(x')^2}{21,6^2}.$$

Bu simmetriya oxu OA və təpə bucağı $2\beta = 2\arctg 0,046 = 5^\circ 18'$ olan konusun tənliyidir.

XIII Fəsil. Nöqtənin mürəkkəb hərəkəti

13.1. Nöqtənin mürəkkəb hərəkətinin tənlikləri

Nöqtə eyni zamanda bir neçə hərəkətdə iştirak edərsə, onun belə hərəkətinə mürəkkəb hərəkət deyilir.



Şəkil 13.1

Şək. 13.1 - də verilmiş M nöqtəsi $O'x'y'z'$ sisteminə nəzərən hərəkət edir. $O'x'y'z'$ sistemi özü də tərpənməz $Oxyz$ sisteminə nəzərən hərəkət edir. Onda M nöqtəsi eyni zamanda iki hərəkət etmiş olur:

1. Nöqtənin tərpənən $O'x'y'z'$ sisteminə nəzərən hərəkəti, buna nisbi hərəkət deyilir.

2. Nöqtənin tərpənən $O'x'y'z'$ sistemi ilə birlikdə (baxdığımız anda bu sistemə nəzərən hərəkət etməmək şərtilə) tərpənməz $Oxyz$ sisteminə nəzərən hərəkəti, buna köçürmə hərəkəti deyilir. Başqa sözlə, nöqtənin köçürmə hərəkəti tərpənən $O'x'y'z'$ sistemilə əlaqədar olan elə bir nöqtənin hərəkətinə deyilir ki, hərəkət edən M nöqtəsi baxdığımız anda bu nöqtə üzərinə düşsün.

Bu iki hərəkətin toplanması nəticəsində M nöqtəsi tərpənməz $Oxyz$ sisteminə nəzərən müəyyən sürətdə hərəkət edir ki, həmin hərəkətə nöqtənin mütləq hərəkəti və ya mürəkkəb hərəkəti deyilir.

M nöqtəsinin tərpənən və tərpənməz koordinat sistemlərinin O' və O başlanğıclarına nəzərən radius-

vektorlarını r^l və r ilə, həçinin O^l nöqtəsinin O nöqtəsinə nəzərən radius-vektorunu r_{O^l} ilə işarə etsək, şəkildən yaza bilərik:

$$\bar{r} = \bar{r}_{O^l} + \bar{r}'.$$

Bu ifadəyə vektorial formada nöqtənin mütləq hərəkətinin tənliyi deyilir.

Nöqtənin nisbi hərəkətinin tənliklərini aşağıdakı kimi yazaq:

$$x' = f_1(t), y' = f_2(t), z' = f_3(t).$$

Nöqtənin köçürmə hərəkətinin tənlikləri isə belə olur:

$$X = F_1(t), Y = F_2(t), Z = F_3(t).$$

Bu iki hərəkətin cəmindən ibarət olan nöqtənin mütləq hərəkətinin tənlikləri skalyar formada belə ifadə olunur:

$$x = x_{O^l} + x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3,$$

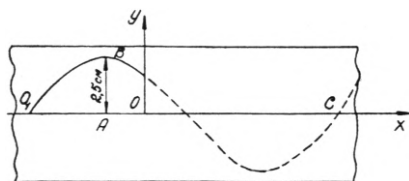
$$y = y_{O^l} + x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3,$$

$$z = z_{O^l} + x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3.$$

Bu ifadələrə daxil olan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ bucaqları tərpənən x', y', z' oxlarının tərpənməz x, y, z oxları ilə əmələ gətirdiyi bucaqlardır və X - cu fəsilə verilən cədvəldə göstərilmişdir.

Məsələ 13.1

Rəqs hərəkətlərini yazan cihazın lenti Ox oxu üzərində $v = 2 \text{ m/san}$ sürətilə hərəkət edir. Oy oxu boyunca rəqs edən cisim lent üzərində ən böyük ordinatı $a = AB = 2,5 \text{ sm}$, uzunluğu isə $O_1C = 8 \text{ sm}$



Şəkil 13.2

olan sinusoid çəkir. Sinusoidin O_1 nöqtəsinin cismin $t = 0$ anındakı vəziyyətinə təsadüf etdiyini fərz edərək, cismin rəqs hərəkətinin tənliyini tapmalı (Şək. 13.2).

Həlli.

Məsələnin şərtinə görə lent üzərindəki y oxu boyunca rəqs edən cismin periodu lentin O_1C qədər getdiyi yola sərf olunan zaman fasiləsinə bərabərdir. Lent sabit sürətlə hərəkət etdiyi üçün həmin yolun uzunluğu lentin sürətilə cismin T rəqs periodunun hasilinə bərabər olacaqdır, yəni

$$O_1C = vT.$$

Buradan cismin rəqs periodunu tapırıq:

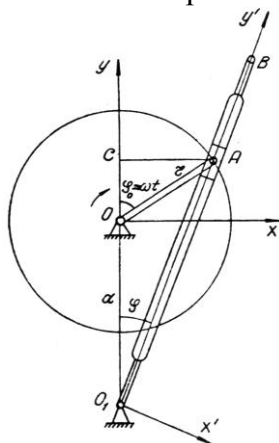
$$T = \frac{O_1C}{v} = \frac{8}{200} = 0,04 \text{ san.}$$

Onda cismin rəqs hərəkətinin tənliyi belə ifadə olunur:

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T} t = 2,5 \sin \frac{2\pi}{0,04} t = 2,5 \sin 50\pi t.$$

Məsələ 13.2

Yonucu dəzgahın sürətləndirmə mexanizmi iki paralel O və O_1 valından, OA çarxqolundan və O_1B kulisindən ibarətdir. OA çarxqolunun ucu sürüngəclə oynaq vasitəsilə birləşdirilmişdir. Sürüngəc O_1B kulisindəki yarıq boyunca sürüşür. Uzunluğu r olan OA çarxqolunun sabit ω bucaq sürətilə fırlanmasını nəzərdə tutaraq, sürüngəcin kulis yarığındakı nisbi hərəkət tənliyini və kulisin özünün fırlanma hərəkətinin tənliyini tapmalı, valların oxları arasındakı məsafə $OO_1 = a$ (Şək. 13.3).



Şəkil 13.3

Həlli.

Başlanğıcı O nöqtəsində yerləşən tərpənməz Oxy koordinat sistemini qəbul edirik. Sonra başlanğıcı O' nöqtəsində yerləşən və $O'B$ kulisi ilə əlaqədar olan $O'x'y'$ sistemini elə götürək ki, y' oxu kulisin $O'B$ oxu boyunca yönəlsin.

Şəkildən əvvəlcə sürüngəcin tərpənməz Oxy və tərpənən $O'x'y'$ koordinat sistemlərindəki x , y və x' , y' koordinatlarını (hərəkət tənliklərini) tapırıq:

$$x = r \sin \varphi_0, y = r \cos \varphi_0,$$

$$x' = 0, y' = \sqrt{O_1 O^2 + OA^2 + 2O_1 O \cdot OA \cos \varphi_0} = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos \omega t} = O_1 A.$$

Sonra A nöqtəsindən y oxuna AC perpendikulyarı endirib, şəkindən tapırıq:

$$\sin \varphi = \frac{AC}{O_1 A} = \frac{r \sin \omega t}{O_1 A}, \cos \varphi = \frac{a + r \cos \omega t}{O_1 A}.$$

Bu ifadələri tərəf-tərəfə bölüb φ bucağının tangensini

tapırıq:
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r \sin \omega t}{a + r \cos \omega t}.$$

13.2. Nöqtənin mürəkkəb hərəkətdəki sürət və təcilinin tapılması

Nöqtənin nisbi hərəkətdəki sürət və təcilinə onun nisbi sürət və nisbi təcili deyilir.

Nöqtənin köçürmə sürət və köçürmə təcili tərpənən $O'x'y'z'$ sistemi ilə əlaqədar olan elə bir nöqtənin sürət və təcilinə deyilir ki, hərəkət edən M nöqtəsi baxdığımız anda bu nöqtə üzərinə düşsün.

Nöqtənin mütləq hərəkətdəki sürət və təcilinə onun mütləq sürət və mütləq təcili deyilir.

Nöqtənin mütləq sürəti onun köçürmə və nisbi sürətlərinin həndəsi cəminə bərabərdir, yəni

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \quad (13.1)$$

Burada $\bar{v}_a$ – nöqtənin mütləq sürəti, $\bar{v}_e$ və $\bar{v}_r$ – isə onun köçürmə və nisbi sürətləridir.

Nöqtənin mütləq təcili onun köçürmə, nisbi və Koriolis (əlavə) təcillərinin həndəsi cəminə bərabərdir, yəni

$$\bar{w}_a = \bar{w}_e + \bar{w}_r + \bar{w}_k. \quad (13.2)$$

Burada $\bar{w}_a$ – nöqtənin mütləq təcili; $\bar{w}_e$ və $\bar{w}_r$ – onun köçürmə və nisbi təcilləridir; $\bar{w}_k$ – isə nöqtənin Koriolis təcili adlanır və belə tapılır:

$$\bar{w}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r). \quad (13.3)$$

Burada $\bar{\omega}_e$ tərpənən $O'x'y'z'$ sisteminin fırlanma bucaq sürətidir.

Xüsusi halda tərpənən sistem irəliləmə hərəkəti edirsə, Koriolis təcili sıfıra bərabər olur. Bu halda nöqtənin mütləq təcili onun köçürmə və nisbi təcillərinin həndəsi cəminə bərabər olur.

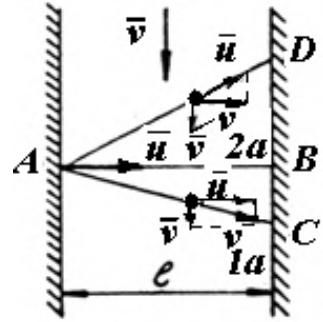
Məsələ 13.3

Çayın sahilləri paraleldir. Qayıq A nöqtəsindən çıxıb sahillərə perpendikulyar istiqamətdə hərəkət edir və hərəkətə başladığı andan 10 dəqiqə keçdikdən sonra qarşıdakı sahilə C nöqtəsində çatır (Şək. 13.4). C nöqtəsi çayın axını üzrə A nöqtəsindən 120 m aşağıdadır. Qayıq sahillərə perpendikulyar olan AB xətti üzərində A nöqtəsindən B nöqtəsinə çatmaq üçün axının əksinə AB xətti ilə müəyyən bucaq altında hərəkət etməlidir. Belə halda qayıq qarşıdakı sahilə 12,5 dəqiqədən sonra gəlib

çatır. Çayın ℓ enini, suya nəzərən u nisbi sürətini və çayın v axma sürətini tapmalı.

Həlli.

Məlumdur ki, qayığın çayla hərəkəti mürəkkəb hərəkətdir. O suya nəzərən nisbi hərəkət və çayla birlikdə köçürmə hərəkəti edir. (13.1) ifadəsinə əsasən qayığın $\bar{v}_a$ mütləq sürəti onun $\bar{v}$ köçürmə və $\bar{u}$ nisbi sürətlərinin həndəsi cəminə bərabərdir:



Şəkil 13.4

$$\bar{v}_a = \bar{v} + \bar{u}.$$

Birinci halda qayıq $t_1 = 10$ dəq ərzində çayın sahillərinə perpendikulyar olan AB istiqamətində $\bar{u}$ nisbi sürətilə hərəkət edir və bu zaman fasiləsində o çayla birlikdə $\bar{v}$ sürətilə suyun axını istiqamətində BC məsafəsi qədər yol gedir. Bu hal üçün qayığın mütləq sürətini $\bar{v}_{1a}$ ilə işarə edək. Şəkildən çayın $\bar{v}$ axma sürətini və qayığın $\bar{u}$ nisbi sürətini tapırıq:

$$v = \frac{BC}{t_1} = \frac{120}{10} = 12 \text{ m/dəq}, \quad u = \frac{AB}{t_1} = \frac{l}{10} \text{ m/dəq} \quad (13.5)$$

İkinci halda qayıq $t_2 = 12,5$ dəq zamanı ərzində $\bar{u}$ nisbi sürətilə AD xətti istiqamətində hərəkət edir və bu zaman fasiləsində o çayla birlikdə $\bar{v}$ sürətilə DB məsafəsi qədər yol gedir. Bu hal üçün qayığın mütləq sürətini $\bar{v}_{2a}$ ilə işarə edək. Şəkildən tapırıq:

$$v_{2a} = \frac{AB}{t_2} = \frac{l}{t_2} = \frac{l}{12,5} m/dəq \quad (13.6)$$

Qeyd edək ki, hər iki hal üçün qayığın $\bar{v}$ köçürmə sürəti qiymət və istiqamətcə dəyişmir, $\bar{u}$ nisbi sürəti isə yalnız istiqamətcə dəyişir. Ona görə də onun $\bar{v}_a$ mütləq sürəti şəkildən görüldüyü kimi həm istiqamətcə, həm də qiymətcə dəyişir.

Şəkildən ikinci hal üçün yazı bilərik:

$$v_{2a}^2 = u^2 + v^2. \quad (13.7)$$

(13.5) və (13.6) ifadələrini (13.7)-də yerinə yazıb alırıq:

$$\frac{l^2}{12,5^2} = \frac{l^2}{10^2} - 12^2.$$

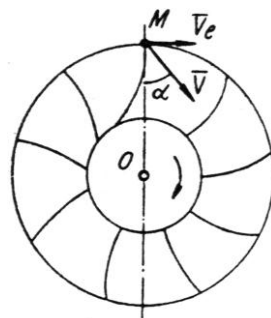
Buradan çayın ℓ eini tapırıq: $l = 200m$.

Nəhayət, qayığın $\bar{u}$ nisbi sürətini (11.6) ifadəsindən tapırıq:

$$u = \frac{l}{10} = \frac{200}{10} = 20 m/dəq.$$

Məsələ 13.4

Hidravlik turbində su, istiqamətvə-rici aparatdan çıxdıqda fırlanan işlək çarxa daxil olur. Bu çarxın kürəkləri elə qoyulmuşdur ki, suyun $\bar{v}_r$ nisbi sürəti kürəklərə



Şəkil 13.5

toxunan istiqamət alır (belə olduqda su, işlək çarxa zərbə ilə daxil olmur). Suyun giriş anında mütləq sürəti $v=15$ m/san olarsa, onun hissəciyinin çarxın xarici çənbərindəki həmin andakı nisbi sürətini tapmalı, mütləq sürət ilə radius arasındakı bucaq $\alpha=60^\circ$, giriş radiusu $R=2$ m, çarxın bucaq sürəti π rad/san-yə bərabərdir (Şək. 13.5).

Həlli.

Su işlək çarxa daxil olduqdan sonra çarxla birlikdə ω bucaq sürət ilə fırlanır və eyni zamanda çarxın kürəkləri arasındakı kanalda hərəkət edir. Suyun çarxla birlikdə fırlanma hərəkəti köçürmə hərəkətidir. Onun kürəklər arasındakı kanaldakı hərəkəti isə nisbi hərəkətdir. Odur ki, (13.1) ifadəsinə əsasən suyun çarxa giriş andakı (M nöqtəsindəki) $\bar{v}_a$ mütləq sürəti onun $\bar{v}_e$ köçürmə və $\bar{v}_r$ nisbi sürətlərinin həndəsi cəminə bərabərdir; yəni

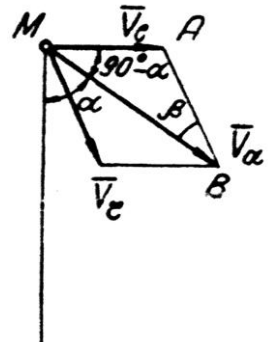
$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

Suyun M nöqtəsindəki köçürmə sürəti qiymət və istiqamətcə həmin nöqtənin çarxla birlikdə fırlanma hərəkətindəki sürətinə bərabərdir və belə tapılır:

$$v_e = R\omega = 2\pi m/san.$$

Bu sürət çarxın çevrəsinə M nöqtəsində toxunan istiqamətdə yönəlir (Şək. 13.5).

Suyun nisbi sürəti onun çarxın kürəkləri arasındakı kanalda axma sürətinə bərabərdir. Bu sürəti tapmaq



Şəkil 13.6

üçün suyun verilmiş mütləq $\bar{v}_a = \bar{v}$ sürət vektorunu paraleloqram üsulu ilə məlum $\bar{v}_e$ və naməlum $\bar{v}_r$ toplanan sürətlərə ayırırıq (Şək. 13.6). Şəkildən MAB üçbucağından kosinuslar teoreminə əsasən suyun nisbi $\bar{v}_r$ sürətinin qiymətini tapırıq:

$$\begin{aligned} v_r &= \sqrt{v_e^2 + v_a^2 - 2v_e v_a \cos(90^\circ - \alpha)} = \\ &= \sqrt{4\pi^2 + 15^2 - 2 \cdot 2\pi \cdot 15 \cos 30^\circ} = 10,06 \text{ m/san} \end{aligned}$$

Bu sürətin istiqamətini tapmaq üçün həmin MAB üçbucağından sinuslar teoreminə əsasən yazırıq:

$$\frac{v_e}{\sin \beta} = \frac{v_r}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{v_r}{\cos \alpha}.$$

Buradan naməlum β bucağını tapırıq:

$$\sin \beta = \frac{v_e}{v_r} \cos \alpha = \frac{2\pi}{10,06} \cos 60^\circ = 0,5415; \beta = 18^\circ 10'$$

Onda suyun v_r nisbi sürətinin işçi çarxın radiusu ilə əmələ gətirdiyi bucaq belə olar:

$$\alpha - \beta = 60^\circ - 18^\circ 10' = 41^\circ 50'.$$

Məsələ 13.5

Üfüq ilə 45° bucaq əmələ gətirən AB maili müstəvisi Ox oxuna paralel olaraq $0,1 \text{ m/san}^2$ təcili ilə düzxətli hərəkət edir. Bu müstəvi üzərində P cismi $0,1 \cdot \sqrt{2} \text{ m/san}^2$ sabit nisbi təcili ilə enir (Şək. 13.7). Müstəvinin və cismin başlanğıc sürəti sıfıra bərabərdir. Cismin başlanğıc

vəziyyəti $x=0$, $y=h$ koordinatları ilə müəyyən edilir. Cismnin mütləq hərəkətinin trayektoriyasını, sürət və təcilini tapmalı.

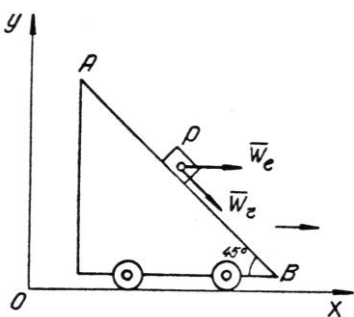
Həlli.

Burada P cisminin hərəkəti mürəkkəb hərəkətdir. Cismnin AB müstəvisi üzərindəki hərəkəti nisbi hərəkətdir.

Müstəvinin x oxu istiqamətindəki hərəkəti isə köçürmə hərəkətidir. Odur ki, P cisminin müstəvi üzərində hərəkətindəki təcili nisbi təcildir. Bu təcil qiymətcə $0,1 \cdot \sqrt{2} \text{ m/san}^2$ bərabər olub, istiqamətcə AB xətti boyunca cismnin hərəkət istiqamətində yönəlir. AB müstəvisinin P cismilə birlikdə x oxu istiqamətindəki hərəkəti köçürmə hərəkətidir. Bu hərəkətin $\bar{w}_e$ köçürmə təcili qiymətcə $0,1 \text{ m/san}^2$ bərabər olub, x oxu istiqamətində yönəlir. Köçürmə hərəkəti irəliləmə hərəkəti olduğu üçün P cisminin $\bar{w}_a$ mütləq təcii onun $\bar{w}_e$ köçürmə və $\bar{w}_r$ nisbi təcillərinin həndəsi cəminə bərabərdir, yəni

$$\bar{w}_a = \bar{w}_e + \bar{w}_r.$$

Bu vektorial ifadəni x və y oxları üzərinə proyeksiyalayaq:



Şəkil 13.7

$$w_{ax} = w_e + w_r \cos 45^0 = 0,1 + 0,1\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,2 \text{ m/san}^2,$$

$$w_{ay} = -w_r \cos 45^0 = -0,1\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,1 \text{ m/san}^2.$$

Digər tərəfdən, (9.17) ifadələrinə əsasən (IX fəsil) yazırıq:

$$w_{ax} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0,2; w_{ay} = \frac{d^2y}{dt^2} = -0,1. \quad (13.8)$$

Əvvəlcə bu diferensial tənliklərdən birincisini həll edək. Bunun üçün həmin tənliyi bu şəkildə yazırıq:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 0,2.$$

Buradan $dv_x = 0,2dt$. Bu tənliyi inteqrallayıb alırıq:

$$v_x = v_{0x} + 0,2t.$$

Burada v_{0x} cismin $t=0$ olan başlanğıc andakı sürətinin x oxu üzərindəki proyeksiyasıdır. Məsələnin şərtinə görə bu sürət sıfıra bərabərdir, yəni $v_{0x} = 0$. Onda

$$v_x = 0,2t = \frac{dx}{dt}.$$

$$\text{Buradan tapırıq: } dx = 0,2t dt \text{ və } x = x_0 + 0,2 \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Burada x_0 – cismin başlanğıc vəziyyətdəki absisidir.

Şərtə görə $x_0 = 0$. Onda

$$x = 0,1t^2. \quad (13.9)$$

İndi (13.8) ifadəsindəki ikinci diferensial tənliyi həll edək. Həmin tənliyi bu şəkildə yazaq:

$$w_{ay} = \frac{dv_y}{dt} = -0,1$$

Bu diferensial tənliyi yuxarıda göstərilən qayda ilə həll edək:

$$v_y = v_{0y} - 0,1t.$$

Burada v_{0y} cismin başlanğıc andakı (vəziyyətdəki) sürətinin y oxu üzərindəki proyeksiyasıdır. Şərtə görə $v_{0y} = 0$. Onda $v_y = \frac{dy}{dt} = -0,1t$ və $dy = -0,1tdt$.

Bu diferensial tənliyi integrallayaq:

$$y = y_0 - 0,1 \cdot \frac{t^2}{2}$$

Burada y_0 – cismin başlanğıc vəziyyətdəki ordinatıdır. Şərtə görə $y_0 = h$. Onda

$$y = h - 0,1 \cdot \frac{t^2}{2} \quad (13.10)$$

Beləliklə, P cisminin mütləq hərəkətinin tənlikləri (13.9) və (13.10) tənliklərindən ibarət olur:

$$x = 0,1t^2; y = h - \frac{0,1t^2}{2}.$$

Bu tənliklərin birincisindən t zamanını tapıb, ikincisində yerinə yazıb, P cisminin mütləq hərəkətindəki trayektoriya tənliyini alırıq:

$$t^2 = \frac{x}{0,1}; y = h - \frac{x}{2}.$$

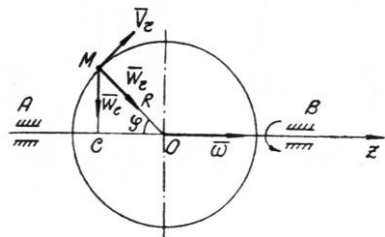
Sonra IX fəslin (9.16) və (9.18) ifadələrinə əsasən P cisminin mütləq hərəkətindəki sürət və təcilini tapırıq:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(0,2t)^2 + (-0,1t)^2} = 0,1\sqrt{5}t \text{ m/san},$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{(0,2)^2 + (-0,1)^2} = 0,1\sqrt{5} \text{ m/san}^2.$$

Məsələ 13.6

Öz diametri ətrafında sabit ω bucaq sürəti ilə fırlanan R radiuslu diskın çənbəri üzrə M nöqtəsi qiymətcə sabit v sürətilə hərəkət edir. M nöqtəsinin mütləq təcilini onun radius-vektoru ilə fırlanan oxu arasındakı bucağından asılı olaraq tapmalı (Şək. 13.8).



Şəkil 13.8

Həlli.

Diskin çənbəri üzrə hərəkət edən M nöqtəsi eyni zamanda diskin müstəvisi üzərində yerləşən z oxu ətrafında fırlanır. Odur ki, M nöqtəsi mürəkkəb hərəkət edir. Diskin bu fırlanma hərəkəti köçürmə hərəkətidir. M nöqtəsinin diskin çənbəri üzərindəki hərəkəti isə nisbi hərəkətdir. Köçürmə hərəkəti fırlanma olduğu üçün (13.2) ifadəsinə əsasən hərəkətdə olan M nöqtəsinin $\overline{w}_a$ mütləq təcili onun köçürmə, nisbi və Koriolis təcillərinin həndəsi cəminə bərabər olacaqdır, yəni

$$\overline{w}_a = \overline{w}_e + \overline{w}_r + \overline{w}_k.$$

Həmin M nöqtəsinin köçürmə təcili verilmiş anda diskin bu nöqtə üzərinə düşən nöqtəsinin təcilinə bərabərdir. Disk z oxu ətrafında müntəzəm fırlandığı üçün bu təcil diskin qeyd etdiyimiz nöqtəsinin həmin ox ətrafında fırlanma hərəkətindəki normal təcilinə bərabər olur:

$$w_e = CM \cdot \omega^2$$

Burada CM –fırlanma radiusudur və onu şəkildən tapırıq:

$$CM = R \sin \varphi.$$

Onda $w_e = R\omega^2 \sin \varphi$.

Bu təcil vektoru CM fırlanma radiusu üzrə C fırlanma mərkəzinə tərəf yönəlir. M nöqtəsinin diskin çevrəsi üzrə nisbi hərəkətindəki $\overline{v}_r$ sürəti qiymətcə sabit olduğu üçün həmin $\overline{w}_r$ nisbi təcili onun O mərkəzi ətrafında fırlanma

hərəkətindəki $\overline{w}_r^n$ normal təcilinə bərabər olacaqdır. Odur ki, bu təcil belə tapılır:

$$w_r = w_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{v^2}{R}.$$

Bu təcil vektoru M nöqtəsinin OM fırlanma radiusu üzrə O mərkəzinə tərəfə yönəlir (Şək. 13.8). Köçürmə hərəkəti fırlanma olduğu üçün M nöqtəsinin $\overline{w}_k$ Koriolis təcili vardır. Bu təcilin qiymət və istiqamətini (13.3) ifadəsindən tapırıq:

$$\overline{w}_k = 2(\overline{\omega} \times \overline{v}_r).$$

Buradan Koriolis təcilin qiymətini şəkildən tapırıq:

$$w_k = 2\omega v_r \sin(\overline{\omega}, \overline{v}_r) = 2\omega v_r \sin(90^\circ - \varphi) = 2\omega v \cos \varphi.$$

Şəkildən göründüyü kimi $\overline{w}_k$ təcil vektoru diskin müstəvisinə perpendikulyar istiqamətdə şəkildən bizə tərəf yönəlir. Aydınır ki, $\overline{w}_e$ və $\overline{w}_r$ təcil vektorlarının əvəzləyicisi diskin müstəvisi üzərində yerləşir və $\overline{w}_k$ təcil vektoruna perpendikulyar olur. Odur ki, hərəkətdə olan M nöqtəsinin $\overline{w}_a$ mütləq təcili qiymətcə belə tapılır:

$$w_a = \sqrt{w_e^2 + w_r^2 + 2w_e w_r \cos(90^\circ - \varphi) + w_k^2}.$$

Köçürmə $\overline{w}_e$, nisbi $\overline{w}_r$ və Koriolis $\overline{w}_k$ təcillərinin qiymətlərini burada yerinə yazıb M nöqtəsinin mütləq təcilini tapırıq:

$$w_a = \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + \omega^4 R^2 \sin^2 \varphi + 2\omega^2 v^2 (1 + \cos^2 \varphi)}.$$

Məsələ 13.7

M nöqtəsi, oxu OA olan dairəvi konusun doğurunu üzərində təpədən oturacağa doğru sabit nisbi $\bar{v}_r$ sürəti ilə hərəkət edir. $\angle MOA = \alpha$, $t = 0$ anında $OM_0 = a$ (Şək. 13.9).

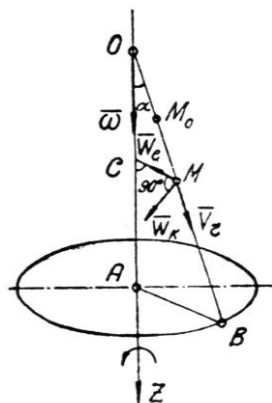
Konus öz oxu ətrafında ω bucaq sürəti ilə müntəzəm fırlanır. M nöqtəsinin mütləq təcilini tapmalı.

Həlli.

Konusun OB doğurunu üzrə hərəkət edən M nöqtəsi eyni zamanda konusla birlikdə OA oxu ətrafında fırlanır. Odur ki, M nöqtəsinin hərəkəti bu hərəkətlərin cəmindən ibarət olan mürəkkəb hərəkətdir. Konusun öz oxu ətrafında fırlanma hərəkəti köçürmə, M nöqtəsinin konusun doğurunu üzərindəki hərəkəti isə nisbi hərəkətdir. Köçürmə hərəkəti fırlanma hərəkəti olduğu üçün M nöqtəsinin $\bar{w}_a$ mütləq təcili onun $\bar{w}_e$ köçürmə, $\bar{w}_r$ nisbi və $\bar{w}_k$ Koriolis təcillərinin həndəsi cəminə bərabər olacaqdır:

$$\bar{w}_a = \bar{w}_e + \bar{w}_r + \bar{w}_k.$$

İndi bu toplanan təcilləri tapaq. Hərəkətdə olan M nöqtəsinin köçürmə təcili verilmiş anda bu nöqtə üzərinə düşən konusun M nöqtəsinin təcilinə bərabərdir. Konus müntəzəm fırlandığı üçün həmin təcil qiymətcə onun M nöqtəsinin z oxu ətrafında fırlanma hərəkətindəki normal təcilə bərabər olacaqdır, yəni



Şəkil 13.9

$$w_e = w_e^n = CM \cdot \omega^2 \quad (13.11)$$

Burada CM konusun M nöqtəsinin z oxu ətrafında fırlanma radiusudur. Şəkildən onu tapırıq: $CM = OM \sin \alpha$. Burada OM hərəkət edən M nöqtəsinin O təpəsindən olan məsafəsidir. Bu məsafəni M nöqtəsinin müntəzəm hərəkətinin tənliyindən tapırıq:

$$OM = OM_0 + M_0 M = a + v_r t.$$

Onda $CM = (a + v_r t) \omega^2 \sin \alpha$.

Bu ifadəni (13.11)-də yerinə yazıb M nöqtəsinin köçürmə təcilinin qiymətini tapırıq:

$$w_e = (a + v_r t) \omega^2 \sin \alpha.$$

Bu təcil vektoru CM fırlanma radiusu üzrə M nöqtəsindən C fırlanma mərkəzinə tərəf yönəlir. Konusun doğuranı üzrə sabit $\bar{v}_r$ sürəti ilə hərəkət edən M nöqtəsinin nisbi təcili sıfıra bərabərdir, yəni $\bar{w}_r = 0$. Nəhayət, M nöqtəsinin $\bar{w}_k$ Koriolis təcilini (13.3) ifadəsindən tapırıq:

$$\bar{w}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r).$$

Koriolis təcilinin qiymətini Şək. 13.9-dan tapırıq:

$$w_k = 2\omega v_r \sin(\bar{\omega}, \bar{v}_r) = 2\omega v_r \sin \alpha.$$

Bu təcil istiqamətcə OAB üçbucaq müstəvisinə perpendikulyar olub, şəkildən bizə tərəf yönəlir. Şəkildən aydındır ki, $\bar{w}_e$ və $\bar{w}_k$ təcil vektorları bir-birinə perpendikulyardır. Odur ki, M nöqtəsinin $\bar{w}_a$ mütləq təcilinin qiymətini Pifaqor teoreminə əsasən tapırıq:

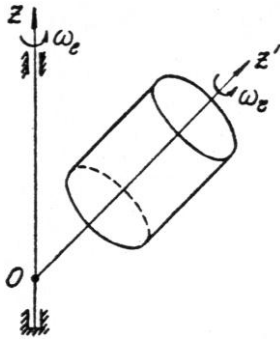
$$w_a = \sqrt{w_e^2 + w_k^2} = \sqrt{(a + v_r t)^2 \omega^4 \sin^2 \alpha + 4\omega^2 v_r^2 \sin^2 \alpha}.$$

XIV Fəsil. Bərk cismin mürəkkəb hərəkəti

14.1. Cismin iki kəsişən ox ətrafında fırlanma

hərəkəti

Bərk cisim eyni zamanda iki hərəkətdə iştirak edərsə, onun belə hərəkətinə mürəkkəb hərəkət deyilir.



Şəkil 14.1

Bərk cisim tərpənən z' oxu ətrafında nisbi $\overline{\omega}_r$ bucaq sürəti ilə fırlanır. Bu ox özü də onunla O nöqtəsində kəsişən tərpənməz z oxu ətrafında köçürmə $\overline{\omega}_e$ bucaq sürəti ilə fırlanır. Bu hərəkətlərin toplanması nəticəsində cisim həmin tərpənməz O nöqtəsindən keçən ani P oxu ətrafında mütləq $\overline{\omega}_a$ bucaq sürəti ilə fırlanır (Şək. 14.1). $\overline{\omega}_a$ bucaq sürəti $\overline{\omega}_e$ və $\overline{\omega}_r$ vektorlarının həndəsi cəminə bərabərdir:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r. \quad (14.1)$$

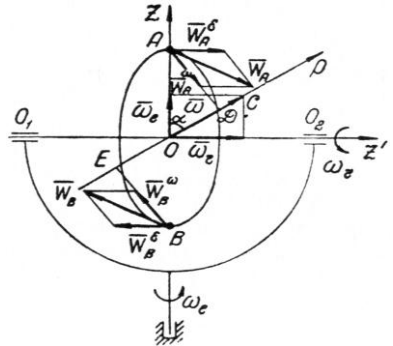
Onda cismin istənilən M nöqtəsinin sürəti onun ani P oxu ətrafında $\overline{\omega}_a$ bucaq sürəti ilə fırlanma hərəkətindəki sürət kimi belə tapılır:

$$\vec{v}_M = \overline{\omega}_a \times \vec{r}.$$

Burada $\vec{r}$ cismin M nöqtəsinin O mərkəzinə nəzərən radius vektorudur.

Məsələ 14.1

Radiusu R olan disk ω_r sabit bucaq sürəti ilə O_1O_2 üfüqi oxu ətrafında fırlanır. O_1O_2 oxu isə şaquli ox ətrafında sabit ω_e bucaq sürəti ilə fırlanır. Diskin şaquli diametrinin uclarında yerləşən A və B nöqtələrinin sürət və təcillərini tapmalı.



Şəkil 14.2

Həlli.

Disk O_1O_2 (z') oxu ətrafında ω_r bucaq sürəti ilə fırlanma hərəkəti nisbi fırlanmadır. Onun z' oxu ilə birlikdə şaquli z oxu ətrafında ω_e bucaq sürəti ilə fırlanma hərəkəti isə köçürmə fırlanma hərəkətidir. Odur ki, $\bar{\omega}_r$ vektorunu z' oxu boyunca, $\bar{\omega}_e$ vektorunu isə z oxu boyunca yönəldirik (Şək. 14.2). Yuxarıdakı (14.1) ifadəsinə əsasən disk $\bar{\omega}$ mütləq fırlanma bucaq sürəti vektoru $\bar{\omega}_r$ və $\bar{\omega}_e$ bucaq sürəti vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın diaqonalı ilə ifadə olunur, yəni

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r.$$

Bu vektor z və z' oxlarının kəsişdiyi O nöqtəsində tətbiq olunur. Disk baxdığımız anda $\bar{\omega}_a$ bucaq sürəti vektoru istiqamətində yönəlmiş ani P oxu ətrafında həmin bucaq sürətilə fırlanacaqdır. Odur ki, disk $hər hansı bir nöqtəsinin ani ox ətrafında fırlanma hərəkətindəki $\bar{v}_a$ mütləq sürəti onun köçürmə və nisbi fırlanma$

hərəkətlərindəki $\bar{v}_e$ və $\bar{v}_r$ sürətlərinin həndəsi cəminə bərabər olacaqdır:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$$

Əvvəlcə diskin A və B nöqtələrinin sürətlərini tapaq. Şəkildən aydındır ki, diskin A və B nöqtələri z oxu üzərində yerləşdiyi üçün onların bu ox ətrafında köçürmə fırlanma hərəkətlərindəki sürətləri sıfıra bərabər olacaqdır, yəni

$$\bar{v}_{Ae} = 0, \bar{v}_{Be} = 0.$$

Onda A və B nöqtələrinin mütləq sürətləri onların z' oxu ətrafında ω_r bucaq sürəti ilə fırlanma hərəkətlərindəki nisbi sürətlərə bərabər olacaqdır, yəni

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{Ar}, \bar{v}_B = \bar{v}_{Br}.$$

Bu sürətlərin qiymətini şəkildən tapırıq:

$$v_A = v_{Ar} = OA \cdot \omega_r = R\omega_r, v_B = v_{Br} = OB \cdot \omega_r = R\omega_r.$$

Şəkildən göründüyü kimi $\bar{v}_A$ və $\bar{v}_B$ sürət vektorları şəkil müstəvisinə perpendikulyar olub, uyğun olaraq şəkildən bizə tərəf və əks tərəfə yönəlirlər.

İndi diskin A və B nöqtələrinin təcillərini tapaq. Bunun üçün əvvəlcə diskin ani P oxu ətrafında ε fırlanma bucaq təcilini tapmaq lazımdır.

Şəkildən aydındır ki, $\bar{\omega}$ ani fırlanma bucaq sürəti z oxu ətrafında $\bar{\omega}_e$ bucaq sürətilə fırlanır. Odur ki, bu bucaq sürəti vektorunun son C nöqtəsinin həmin fırlanma

hərəkətindəki sürəti qiymətcə $\bar{\varepsilon}$ bucaq təcili vektorunun moduluna bərabər olacaqdır. Buna əsasən şəkildən tapırıq:

$$\varepsilon = \omega_e \omega \sin \alpha = \omega_e \omega.$$

Ayındır ki, $\bar{\varepsilon}$ vektoru şəkil müstəvisinə perpendikulyar olub, bizdən şəkilə tərəf yönələcəkdir.

Diskin A nöqtəsinin təcili XII fəslin (12.7) ifadəsinə əsasən onun ani P oxu ətrafında $\bar{w}_A^\varepsilon$ fırlanma və $\bar{w}_A^\omega$ oxa doğru yönəlmə təcillərinin həndəsi cəminə bərabərdir:

$$\bar{w}_A = \bar{w}_A^\varepsilon + \bar{w}_A^\omega = \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} + \bar{\omega} \times \bar{v}_A.$$

İndi bu toplanan təcillərin qiymət və istiqamətini tapırıq:

$$w_A^\varepsilon = \varepsilon \cdot OA \sin(\bar{\varepsilon}, \overline{OA}) = \omega_e \omega_r R \sin 90^\circ = R \omega_e \omega_r \quad (14.2)$$

Bu təcil vektoru A nöqtəsində tətbiq olunmaqla, z' oxu istiqamətində yönəlir (Şək. 14.2).

$$w_A^\omega = \omega v_A \sin(\bar{\omega}, \bar{v}_A) = \omega^2 h_\omega = \omega^2 AD.$$

Burada $h_\omega = AD$ disk A nöqtəsindən ani P oxuna endirilmiş perpendikulyarın uzunluğudur, yəni həmin nöqtənin ani fırlanma radiusudur.

Şəkildən tapırıq:

$$AD = OA \sin \alpha = R \cdot \frac{\omega_r}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2}.$$

Onda

$$w_A^\omega = \omega \omega_r R = R \omega_r \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2}. \quad (14.3)$$

Bu təcil vektoru da A nöqtəsindən AD xətti üzrə D nöqtəsinə tərəf yönəlir.

Aydındır ki, $\overline{w}_A^\varepsilon$ və $\overline{w}_A^\omega$ təcil vektorları şəkil müstəvisi üzərində yerləşirlər və onların arasında qalan bucaq α -ya bərabərdir. Odur ki, bu təcil vektorlarının əvəzləyicisini kosinuslar teoreminə əsasən tapırıq:

$$w_A = \sqrt{(w_A^\varepsilon)^2 + (w_A^\omega)^2 + 2w_A^\varepsilon w_A^\omega \cos \alpha}.$$

Burada (14.2) və (14.3) ifadələrini yerinə yazıb, $\cos \alpha = \frac{\omega_e}{\omega}$ olduğunu nəzərdə tutub diskin A nöqtəsinin təcilinin qiymətini tapırıq:

$$w_A = R \omega_r \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_r^2}.$$

Eyni qayda ilə diskin B nöqtəsinin təcilini tapırıq:

$$\overline{w}_B = \overline{w}_B^\varepsilon + \overline{w}_B^\omega = \overline{\varepsilon} \times \overline{OB} + \overline{\omega} \times \overline{v}_B.$$

İndi bu toplanan təcilləri tapanq:

$$w_B^\varepsilon = \varepsilon \cdot OB \sin(\overline{\varepsilon}, \overline{OB}) = \omega_e \omega_r R \sin 90^\circ = R \omega_e \omega_r \quad (14.4)$$

Bu təcil vektoru B nöqtəsində tətbiq olunmaqla, z' oxunun əksi istiqamətində yönəlir.

$$w_B^\omega = \omega v_B \sin(\overline{\omega}, \overline{v}_B) = \omega^2 BE = \omega^2 R \sin \alpha = R \omega_r \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2}. \quad (14.5)$$

$\overline{w}_B^\omega$ vektoru B nöqtəsindən onun ani ox ətrafında BE fırlanma radiusu üzrə bu oxa doğru yönəlir. Yuxarıda toplanan $\overline{w}_B^\varepsilon$ və $\overline{w}_B^\omega$ təcil vektorları arasında qalan bucaq da α -ya bərabərdir. Odur ki, bu təcil vektorlarını paraleloqram üsulu ilə toplayıb kosnuslar teoreminə əsasən yazırıq:

$$w_B = \sqrt{(w_B^\varepsilon)^2 + (w_B^\omega)^2 + 2w_B^\varepsilon w_B^\omega \cos \alpha}.$$

Burada (14.4) və (14.5) ifadələrini yerinə yazıb diskin B nöqtəsinin təcilini tapırıq:

$$w_B = R\omega_r \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_r^2}.$$

Buradan görürük ki, diskin A və B nöqtələrinin $\overline{w}_A$ və $\overline{w}_B$ təcil vektorları qiymətcə bir-birinə bərabərdir, istiqamətcə paralel olub, əks tərəflərə yönəliirlər.

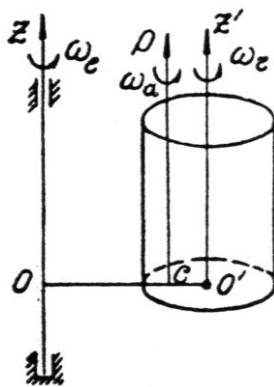
14.2. Cismin iki paralel ox ətrafında fırlanma

hərəkəti

Fərz edək ki, bərk cisim z' oxu ətrafında $\overline{\omega}_r$ bucaq sürəti ilə fırlanır (Şək. 14.3). Bu ox özü də ona paralel olan tərpənməz z oxu ətrafında $\overline{\omega}_e$ bucaq sürətilə fırlanır. Həmin köçürmə və nisbi fırlanma hərəkətlərinin toplanması nə-ticəsində cisim müəyyən bir C nöqtəsindən keçən ani P oxu ətrafında $\overline{\omega}_a$ mütləq bucaq sürəti ilə fırlanır. Burada iki hal vardır:

1. Cisim göstərilən z' və z oxları ətrafında eyni istiqamətdə fırlanır.

Onda cismin ani ox ətrafında əvəzləyici fırlanma hərəkətinin $\bar{\omega}_a$ bucaq sürətinin qiyməti toplanan $\bar{\omega}_e$ köçürmə və $\bar{\omega}_r$ nisbi fırlanma bucaq sürətlərinin qiymətlərinin cəminə bərabər olur. Istiqamətcə onlara paralel olub eyni tərəfə yönəlir. Ani fırlanma oxu köçürmə və nisbi fırlanma hərəkətlərinin oxları arasındakı məsafəni daxilən onların bucaq sürətlərinə tərs proporsional hissələrə bölür, yəni:



Şəkil 14.3

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r, \frac{OC}{CO'} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \quad (14.6)$$

2. Cisim həmin z' və z oxları ətrafında müxtəlif istiqamətlərdə fırlanır. Onda cismin ani ox ətrafında əvəzləyici fırlanma hərəkətinin mütləq $\bar{\omega}_a$ ucaq sürəti qiyməti $\bar{\omega}_r$ nisbi və $\bar{\omega}_e$ köçürmə fırlanma bucaq sürətlərinin qiymətlərinin fərqinə bərabər olur, istiqaməti onlara paralel olub böyük bucaq sürəti tərəfə yönəlir. Ani fırlanma oxu toplanan köçürmə və nisbi fırlanma oxları arasındakı məsafəni xaricən onların bucaq sürətlərinə tərs proporsional hissələrə bölür, yəni:

$$\omega_a = \omega_e - \omega_r, \frac{OC}{CO'} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \quad (14.7)$$

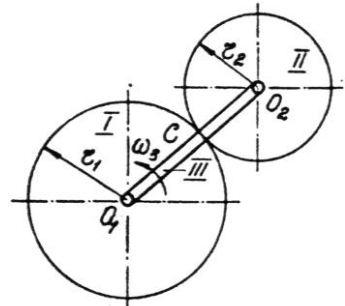
Cismin hər hansı bir M nöqtəsinin sürəti onun ani P oxu ətrafında ω_a bucaq sürətilə fırlanma hərəkətindəki sürət kimi belə tapılır:

$$\bar{v}_M = \bar{\omega}_a \times \bar{r}.$$

Burada $\bar{r}$ - cismin M nöqtəsinin ani ox üzərində yerləşən C nöqtəsinə nəzərən radius-vektorudur.

Məsələ 14.2

III çarxqolu, iki I və II dişli çarxlarının O_1 və O_2 oxlarını birləşdirir, belə ki, ilişmə göstərildiyi kimi xarici və daxili ola bilər. I çarx tərpənməz qalır, III çarxqolu isə O_1 oxu ətrafında ω_3 bucaq sürəti ilə fırlanır. Çarxların r_1 və r_2 radiuslarını bilərək II çarxın mütləq bucaq sürətini və onun çarxqoluna nəzərən ω_{23} nisbi bucaq sürətini hesablamalı (Şək. 14.4).



Şəkil 14.4

Həlli.

Ayındır ki, II çarxın III çarxqolu ilə birlikdə fırlanma hərəkəti köçürmə, II çarxın III çarxqoluna nəzərən hərəkəti isə nisbi fırlanma hərəkətidir. II çarxın ani P oxu ətrafında fırlanma hərəkəti isə mütləq fırlanma hərəkətidir.

$$\omega_e = \omega_3, \omega_r = \omega_{23}, \omega_a = \omega_2.$$

I çarx tərpənməz qaldığı üçün I və II çarxların C kontakt nöqtəsinin sürəti sıfıra bərabərdir və anı P oxu həmin nöqtədən keçir. (14.6) ifadəsindən tapırıq:

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r \text{ və ya } \omega_2 = \omega_3 + \omega_{23}. \quad (14.8)$$

$$\frac{O_1C}{CO_2} = \frac{\omega_r}{\omega_e} \text{ və ya } \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_{23}}{\omega_3}.$$

Buradan II çarxın III çarxqoluna nəzərən nisbi bucaq sürətini tapırıq:

$$\omega_{23} = \frac{r_1}{r_2} \omega_3.$$

Bu qiyməti (14.8) ifadəsində yerinə yazıb, II çarxın mütləq fırlanma bucaq sürətini tapırıq:

$$\omega_2 = \omega_3 + \frac{r_1}{r_2} \omega_3 = \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) \omega_3.$$

Aydındır ki, daxili ilişmədə II çarx iki paralel O_1 və O_2 oxları ətrafında əks istiqamətlərdə fırlanır. Odur ki, daxili ilişmədə II çarxın ω_2 mütləq bucaq sürətini (14.7) ifadəsinə əsasən tapırıq:

$$\omega_2 = \omega_{23} - \omega_3 = \frac{r_1}{r_2} \omega_3 - \omega_3 = \left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right) \omega_3.$$

D İ N A M İ K A

Dinamika bölməsində maddi cisimlərin hərəkəti onlara təsir edən qüvvələrdən asılı olaraq öyrənilir.

Metodiki nöqtəyi-nəzərdən dinamika iki hissəyə bölünür: Maddi nöqtə dinamikası və maddi nöqtələr sisteminin dinamikası.

Maddi nöqtə verilmiş şəraitdə ölçüləri nəzərə alınmayan cismə deyilir. Qeyd edək ki, irəliləmə hərəkəti edən cismə kütləsi bu cismin kütləsinə bərabər olan maddi nöqtə kimi baxmaq olar.

Bir-biri ilə əlaqədar olan maddi nöqtələrin yığınınə maddi nöqtələr sistemi deyilir. Sistemə təsir edən qüvvələr iki yerə bölünür: daxili qüvvələr, xarici qüvvələr. Sistemi təşkil edən nöqtələrin bir-birinə etdiyi təsir qüvvələrinə daxili qüvvələr, kənar cisimlərin sistemin nöqtələrinə etdiyi təsir qüvvələrinə isə xarici qüvvələr deyilir. Daxili qüvvələrin əvəzləyicisi 0-a bərabərdir.

Dinamikanın iki əsas məsələsi vardır: Birinci əsas məsələdə cismin hərəkət tənlikləri verilir, onlara təsir edən qüvvələr tapılır, ikinci əsas məsələdə isə cismə təsir edən qüvvələr verilir və bu cismin hərəkəti öyrənilir.

Dinamikada baxılan məsələlər aşağıdakı 4 qanun əsasında həll edilir.

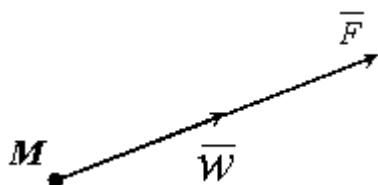
XV Fəsil. Maddi nöqtə dinamikası

15.1. Dinamikanın qanunları

Dinamikanın qanunları ilk dəfə sistematik olaraq İ. Nyutonun “Natural fəlsəfənin riyazi əsasları” (1687) əsərində şərh edilmişdir. Qeyd edək ki, burada Nyuton cisim dedikdə maddi nöqtəni nəzərdə tutmuşdur.

1-ci Qanun. Maddi nöqtəyə heç bir qüvvə təsir etməzsə, o, ya sükunətdə qalar ya da düzxətli bərabərsürətli hərəkət edir.

2-ci Qanun. Maddi nöqtənin kütləsi ilə təcilinin vurma hasilı ona təsir edən qüvvəyə bərabərdir.

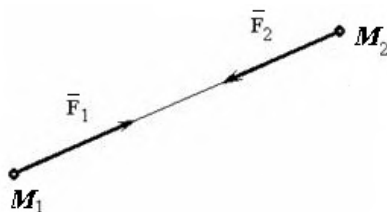


Şəkil 15.1

Maddi M nöqtəsinin kütləsini m , təcilini w və ona təsir edən qüvvələrin əvəzləyicisini $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ ilə işarə etsək (Şəkil 15.1), 2-ci qanunu riyazi olaraq aşağıdakı kimi ifadə edə bilərik

$$m\vec{w} = \vec{F}$$

3-cü Qanun. İki maddi nöqtənin qarşılıqlı təsir qüvvələri qiymətcə bir-birinə bərabər olub, istiqamətcə bu nöqtələri birləşdirən düz xətt boyunca əks tərəflərə yönəliirlər.



Şəkil 15.2

Şəkil 15.2-də göstərilən nöqtələrin qarşılıqlı təsir qüvvələrini F_1 və F_2 ilə işarə etsək, yaza bilərik:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad F_1 = F_2$$

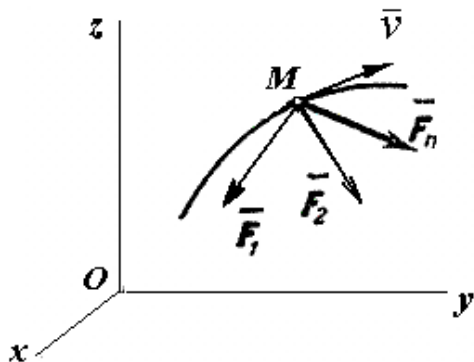
Qeyd edək ki, bu qüvvələr müxtəlif cisimlərə təsir etdikləri üçün onlar müvazinətdə deyillər. Üçüncü qanuna bəzən təsirin əks təsirə bərabərlik prinsipi də deyilir.

4-cü Qanun. Bir neçə qüvvənin təsiri altında maddi nöqtənin aldığı təcil həmin qüvvələrin ayrılıqda təsiri zamanı nöqtənin aldığı təcillərin həndəsi cəminə bərabərdir. 4-cü qanunun riyazi ifadəsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$\vec{w} = \sum \vec{w}_i$$

15.2. Maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənlikləri

Şəkil 15.3-də göstərilən F_1, F_2, F_3 və s. qüvvələrinin təsiri altında kütləsi m olan maddi M nöqtəsi v sürəti ilə hərəkət edir. Dinamikanın 2-ci qanununa əsasən yazırıq:



Şəkil 15.3

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum \vec{F}_i \quad (15.1)$$

Bu ifadəni koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq, alarıq:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{ix}, \quad m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{iy}, \\ m \frac{dv_z}{dt} &= m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{iz} \end{aligned} \quad (15.2)$$

Burada x, y, z maddi nöqtənin zamandan asılı dəyişən koordinatları, F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} nöqtəyə təsir edən F_i qüvvəsinin uyğun koordinat oxları üzərindəki proyeksiyalarıdır.

(15.2) tənliklərinə dekart koordinat sistemində maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənlikləri deyilir.

Təcilin məlum ifadələrini nəzərə alaraq (15.1) vektorial ifadəsini τ, n, b təbii koordinat oxları üzərinə proyeksiyalayaq.

$$m \frac{dv_\tau}{dt} = \sum F_{i\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{in}, \quad 0 = \sum F_{ib}. \quad (15.3)$$

Burada v - sürətin qiyməti, V_τ -nöqtənin sürətinin trayektoriyaya toxunan τ oxu üzərində proyeksiyası, ρ - nöqtənin verilmiş anda trayektoriyasının əyrilik radiusu, $F_{i\tau}, F_{in}, F_{ib}$ -nöqtəyə təsir edən $\bar{F}_i$ qüvvəsinin τ, n, b təbii oxlar üzərindəki proyeksiyalarıdır.

(15.3) tənliklərinə təbii koordinat sistemində maddi nöqtənin hərəkətinin təbii formadakı diferensial tənlikləri deyilir.

15.3. Dinamika məsələlərinin həlli ardıcılığı

- Dinamikanın birinci məsələsinin həllində aşağıdakı ardıcılığı gözləmək lazımdır:

1. Məsələnin şərtinə uyğun koordinat sistemi seçilir. Koordinat sisteminin uğurlu seçilməsi məsələnin həllini xeyli sadələşdirir.

2. Maddi nöqtənin verilmiş cari vəziyyətində ona təsir edən aktiv qüvvələr və sərbəstləşdirmə prinsipindən istifadə edərək rabitələrin reaksiya qüvvələri göstərilir.

3. Maddi nöqtənin verilmiş hərəkət qanununa əsasən onun təcili və bu təcilin proyeksiyaları tapılır.

4. Qəbul edilmiş koordinat sisteminə uyğun olaraq maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənlikləri yazılır.

5. Bu tənliklərdən maddi nöqtəyə təsir edən qüvvənin proyeksiyaları və tam qiyməti tapılır.

- Dinamikanın ikinci məsələsinin həllində aşağıdakı ardıcılığı gözləmək lazımdır:

1. Məsələnin şərtinə uyğun koordinat sistemi seçilir. Koordinat sisteminin uğurlu seçilməsi məsələnin həllini xeyli sadələşdirir.

2. Maddi nöqtənin verilmiş cari vəziyyətində ona təsir edən aktiv qüvvələr və sərbəstləşdirmə prinsipindən istifadə edərək rabitələrin reaksiya qüvvələri göstərilir.

3. Qəbul edilmiş koordinat sisteminə uyğun olaraq maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənlikləri yazılır.

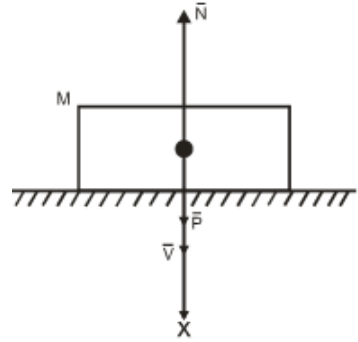
4. Nöqtənin hərəkətinin başlanğıc şərtləri yazılır.

5. Tərtib edilmiş diferensial tənliklər sistemi başlanğıc şərtlər nəzərə alınaraq həll edilir və nöqtənin hərəkət tənlikləri çıxarılır.

6. Nöqtənin hərəkət tənliklərindən istifadə edərək tələb olunan kəmiyyətlər tapılır.

Məsələ 15.1

Üzərində 1,02 kq kütləli yük olan platforma 4 m/s^2 təcili ilə şaquli olaraq aşağı enir. Yük platforma ilə birlikdə enərkən onun platformaya etdiyi təzyiqi tapmalı.



Şəkil 15.4

Həlli.

Platforma ilə birlikdə hərəkət edən M yükünə P ağırlıq qüvvəsi və platformanın N normal reaksiya qüvvəsi təsir edir (Şək. 4). Şəkildə x oxunu hərəkət istiqamətində şaquli olaraq aşağıya doğru yönəldək. Dinamikanın ikinci qanununun (15.1) ifadəsinə əsasən yazırıq:

$$m\bar{w} = \bar{P} + \bar{N}.$$

Burada $\bar{w}$ - yükün təcildir və qiyməti 4 m/s^2 - dir.

Bu ifadəni x oxu üzərinə proyeksiyalayaq:

$$mw = P - N = mg - N$$

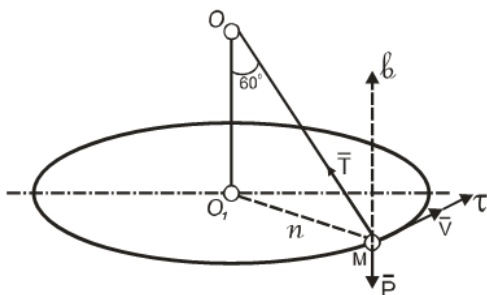
Buradan

$$N = mg - mw = m(g - w) = 1,02(9,81 - 4) = 5,92 \text{ N}.$$

Qeyd edək ki yükün platformaya etiyi təzyiq qüvvəsinin qiyməti tapdığımız N reaksiya qüvvəsinin qiymətinə bərabər olub, istiqamətcə onun əksinə, yəni şaquli olaraq aşağıya doğru yönəlir.

Məsələ 15.2

Uzunluğu 30 sm olan sap vasitəsilə tərpənməz O nöqtəsindən asılmış kütləsi 0,102 kq olan M yükü konsvari rəqqas əmələ gətirir, yəni üfqi müstəvi üzərində çevrə cızır və bu vaxt sap şaquli xətlə 60° bucaq təşkil edir. Yükün v sürətini və sapın T gərilməsini tapmalı (Şəkil 15.5).



Şəkil 15. 5

Həlli.

Şəkində M yükünə təsir edən P ağırlıq qüvvəsini və sapın T gərilmə qüvvəsini göstərək. Yükün kütləsini m , təcilini $\bar{w}$ ilə işarə edib, dinamikanın ikinci qanununa əsasən yazırıq:

$$m\bar{w} = \bar{P} + \bar{T}.$$

Bu ifadəni şəkildə göstərilən τ, n, b təbii koordinat oxları üzərinə proyeksiyalayaq (maddi nöqtənin hərəkətinin təbii formadakı (15.3) diferensial tənlikləri):

$$\begin{aligned}mw_{\tau} &= 0 \\mw_n &= T \cos 30^0 \\mw_b &= -P + T \cos 60^0\end{aligned}\tag{15.4}$$

Kinematikadan məlumdur ki,

$$w_{\tau} = \frac{dv}{dt}, w_n = \frac{v^2}{\rho}, w_b = 0. \tag{15.5}$$

Şəkildən yükün hərəkət etdiyi əyrinin (çevrənin) ρ əyrilik radiusunu tapırıq:

$$\rho = O_1M = OM \cdot \sin 60^0 = l \sin 60^0 = 30.0,86 = 25,8 \text{ sm}.$$

(15.4) ifadəsinin birincisindən göründüyü kimi verilmiş şərt daxilində hərəkət edən yükün sürəti $v =$ sabit olur. (15.5) ifadələrini (15.4)-nin ikinci və üçüncü tənliklərində nəzərə alırıq:

$$\begin{aligned}m \frac{v^2}{l \sin 60^0} &= T \cos 30^0 \\0 &= -P + T \cos 60^0\end{aligned}$$

Buradan sapın T gərilmə qüvvəsini və yükün v sürətini tapırıq:

$$T = \frac{P}{\cos 60^0} = 2P = 2mg = 2 \cdot 0,102 \cdot 9,81 = 2N$$

$$v = \sqrt{\frac{T \cos 30^0 l \sin 60^0}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,86 \cdot 0,3 \cdot 0,86}{0,102}} = 2,1 \text{ m/s}$$

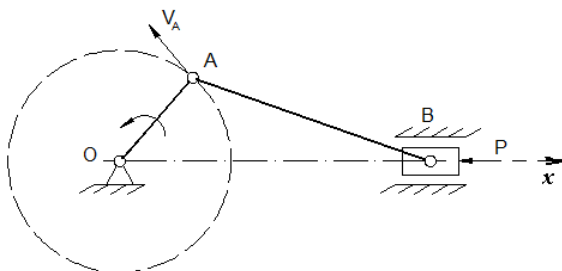
Məsələ 15.3

Daxiliyanma mühərrikinin pistonu

$$x = r(\cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2\omega t) \text{ sm qanunu üzrə üfqi rəqsi}$$

hərəkət edir, burada r - çarxqolunun uzunluğu, l - sürgüqolunun uzunluğu, ω - valın sabit qiymətli bucaq sürətidir.

Pistonun
kütləsini M
qəbul edib, ona
təsir edən
qüvvənin ən
böyük
qiymətini
tapmalı (Şəkil 15.6).



Şəkil 15.6

Həlli.

Üfqi x oxu istiqamətində hərəkət edən pistonu həmin istiqamətdə təsir edən P qüvvəsinin qiymətini hərəkətin diferensial tənliklərinin köməyi ilə aşağıdakı ifadədən tapırıq:

$$P = M \frac{d^2 x}{dt^2} = Mr(\cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2\omega t)'' =$$

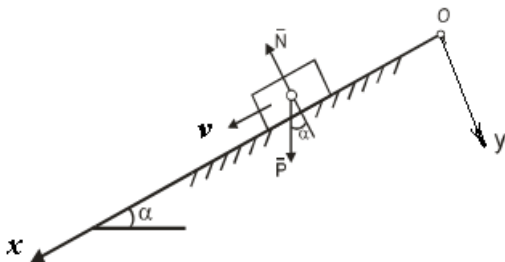
$$= Mr(-\omega^2 \cos \omega t - \frac{r\omega^2}{l} \cos 2\omega t)$$

İfadədən göründüyü kimi $t = 0$ anında $\cos \omega t = \cos 2\omega t = 1$ olur və bu halda P qüvvəsi özünün ən böyük qiymətini alır:

$$P_{\max} = \left| -Mr\omega^2 \left(1 + \frac{r}{l}\right) \right| = Mr\omega^2 \left(1 + \frac{r}{l}\right).$$

Məsələ 15.4

Ağır cisim, üfqlə 30° bucaq əmələ gətirən mail müstəvi üzərində enir. Cismin başlanğıc andakı sürəti 2 m/s-yə bərabərdir; onun 9,6 m yolu nə kimi zaman ərzində getdiyini tapmalı (Şəkil 15.7).



Şəkil 15.7

Həlli.

Şəkində Ox oxunu mail müstəvi üzrə hərəkət istiqamətində aşağıya doğru yönəldirik. Cismə təsir edən qüvvələr aşağıdakılardır: P - ağırlıq qüvvəsi, N - səthin normal reaksiya qüvvəsi.

Qeyd edək ki, uyğun tərəfləri perpendikulyar olduğu üçün N ilə P qüvvəsinin təsir xətləri arasındakı bucaq səthin üfüqlə əmələ gətirdiyi α bucağına bərabərdir.

(15.2) ifadələrinə əsasən maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənliyini yazırıq:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{ix} = mg \sin \alpha \quad (15.6)$$

Kinematikadan məlumdur ki, $v_x = \frac{dx}{dt}$. Odur ki, (15.6) ifadəsini aşağıdakı kimi yazırıq:

$$\frac{dv_x}{dt} = g \sin \alpha \quad \text{və ya} \quad dv_x = g \sin \alpha \cdot dt.$$

Bu ifadəni inteqrallayaq:

$$v_x = g \sin \alpha \cdot t + C_1 \quad (15.7)$$

$v_x = \frac{dx}{dt}$ -ni (2)-də yerinə yazaq:

$$\frac{dx}{dt} = g \sin \alpha \cdot t + C_1 \quad \text{və ya} \quad dx = g \sin \alpha \cdot t dt + C_1 dt$$

Bu ifadəni inteqrallayaq:

$$x = g \sin \alpha \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \quad (15.8)$$

Burada C_1 və C_2 inteqral sabitləridir.

C_1 və C_2 integral sabitlərini aşağıdakı başlanğıc şərtlərdən tapırıq:

$$t=0, x=x_0=0, v_x=v_0=2\text{m/s}.$$

Bu başlanğıc şərtləri (15.7) və (15.8) ifadələrində yerinə yazaq:

$$C_1=v_0, C_2=0.$$

İntegral sabitlərini (15.8)-də yerinə yazaq:

$$x = g \sin \alpha \frac{t^2}{2} + v_0 t \quad (15.9)$$

Şərtə görə cismin t_1 zaman anında $x_1=9,6\text{m}$ yol gedir. Odur ki, (15.9) ifadəsindən tapırıq:

$$9,6 = 9,8 \cdot \sin 30^\circ \frac{t_1^2}{2} + 2t_1$$

Buradan tapırıq: $t_1=2,61$; $t_2=-2,41$.

Burada mənfi işarəli zamanın əhəmiyyəti olmadığı üçün məsələnin şərtinə əsasən cavab $t_1=2,61$ saniyə olur.

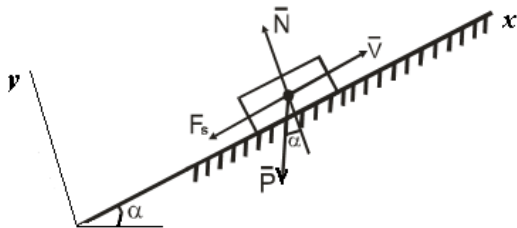
Məsələ 15.5

Ağır M nöqtəsi üfüqlə $\alpha = 30^\circ$ bucaq əmələ gətirən qeyri hamar mail müstəvi üzəri ilə qalxır. Nöqtənin başlanğıc anda sürəti $v_0=15$ m/s. Sürtünmə əmsalı $f=0,1$ -dir. Nöqtə dayananadək nə qədər yol getmiş olacaq və bu yolu getmək üçün nə qədər zaman sərf edəcəkdir?

Həlli.

Şəkil 15.8-də Oxy koordinat sistemini elə qəbul edək ki, Ox oxu M nöqtəsinin hərəkət etdiyi səth boyunca hərəkət istiqamətində yuxarıya doğru yönəlsin. M nöqtəsinə təsir edən qüvvələr aşağıdakılardır:

P - ağırlıq qüvvəsi, N - səthin normal reaksiya qüvvəsi, F_s – səthin sürtünmə qüvvəsi.



Şəkil 15.8

Uyğun tərəfləri perpendiklyar olan bucaqlar bir-birinə bərabərdir. Odur ki, N qüvvəsi ilə şaquli P qüvvəsi arasındakı bucaq səth ilə üfqi ox arasında qalan α bucağına bərabər olur.

M nöqtəsinin hərəkətinin x oxu istiqamətində diferensial tənliyini yazırıq:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{ix} = -P \sin \alpha - F_s \quad (15.10)$$

Burada $P=mg$ və $v_x = \frac{dx}{dt}$ olduğunu nəzərə alaq. Digər tərəfdən Amonton-Kulon qanununa əsasən $F_s=fN$. Şəkildə göstərilən qüvvələri y oxu üzərində proyeksiyalayaq:

$$P \cos \alpha - N = 0 . \text{ Buradan } N = P \cos \alpha = mg \cos \alpha .$$

Deyilənləri (15.10) ifadəsində nəzərə alıb bəzi çevirmələr apararaq:

$$\frac{dv_x}{dt} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

$$\text{və ya } dv_x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)dt$$

Bu tənliyi integrallayaq:

$$v_x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + C_1 \quad (15.11)$$

v_x -in ifadəsini yerinə yazaq:

$$\frac{dx}{dt} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + C_1$$

$$\text{və ya } dx = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)tdt + C_1dt$$

Bu ifadəni integrallayaq:

$$x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2 \quad (15.12)$$

Burada C_1 və C_2 integral sabitləridir.

Həmin sabitləri aşağıdakı başlanğıc şərtin köməyi ilə tapırıq:

$$t=0, x=0, v_x=v_0=15\text{m/s.}$$

Başlanğıc şərti (15.11) və (15.12) ifadələrində yerinə yazıb tapırıq: $C_1=v_0$, $C_2=0$.

C_1 və C_2 integral sabitlərinin tapılan qiymətlərini (15.11) və (15.12)-də yerinə yazaq:

$$\begin{aligned} v_x &= -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + v_0, \\ x &= -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)\frac{t^2}{2} + v_0 t \end{aligned} \quad (15.13)$$

Nöqtənin dayananadək ($v_I=0$) getdiyi T zamanını və s yolunu (15.13) ifadələrinin köməyi ilə tapırıq:

$$\begin{aligned} 0 &= -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)T + v_0, \\ s &= -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)\frac{T^2}{2} + v_0 T \end{aligned}$$

Buradan $\alpha=30^0$, $v_0=15$ m/s və $f=0,1$ olduğunu nəzərə alıb T və s naməlum kəmiyyətlərini tapırıq:

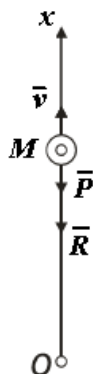
$$\begin{aligned} T &= \frac{v_0}{g(f \cos 30^0 + \sin 30^0)} = \frac{15}{9,81(0,1 \cdot 0,86 + 0,5)} = 2,61s \\ s &= -9,81(\sin 30^0 + 0,1 \cos 30^0) \frac{2,61^2}{2} + 15 \cdot 2,61 = 19,57m \end{aligned}$$

Məsələ 15.6

Kütləsi 2 kq olan cisim 20 m/s sürəti ilə şaquli olaraq yuxarı atıldıqda havanın müqavimətinə rast gəlir. Bu müqavimət $R=0,4v$ -ə bərabərdir (burada R qüvvəsi N-la, v sürəti isə m/s ilə ölçülür). Cismin ən yuxarı vəziyyətə neçə saniyədən sonra çatdığını tapmalı (Şəkil 15.9).

Həlli.

Şəkildə Ox koordinat oxunu cismin hərəkəti istiqamətində şaquli olaraq yuxarıya doğru yönəldək. Cismə onun $P=mg$ ağırlıq qüvvəsi və havanın $\bar{R} = -0,4\bar{v}$ müqavimət qüvvəsi təsir edir. Cismin hərəkətinin x oxu istiqamətində diferensial tənliyini yazaq:



Şəkil 15.9

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = P_x + R_x = -mg - 0,4v_x$$

Burada $m=2\text{kg}$ və $w_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}$ nəzərə alaraq ifadəni dəyişənlərinə ayıraq:

$$\frac{dv_x}{dt} = -g - 0,2v_x \text{ və ya } \frac{dv_x}{v_x + 5g} = -0,2dt$$

Bu ifadəni inteqrallayaq:

$$\ln(v_x + 5g) = -0,2t + \ln C \quad (15.14)$$

Məsələnin başlanğıc şərtinə əsasən: $t=0$, $v_x=v_0=20\text{m/s}$.

(15.14) ifadəsini aşağıdakı şəkildə çevirək:

$$v_x = Ce^{-0,2t} - 5g \quad (15.15)$$

Başlanğıc şərti burada nəzərə alıb C integral sabitini tapırıq: $C=v_0+5g$.

Tapdığımız C sabitini (15.15)-də yerinə yazırıq:

$$v_x = (v_0 + 5g)e^{-0,2t} - 5g \quad (15.16)$$

Məsələnin şərtinə görə cisim ən yuxarı nöqtəyə çatdıqda $v_x=0$ olur. Bu qiyməti (15.16) ifadəsində yerinə yazaq:

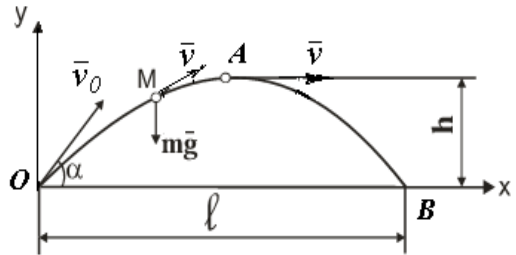
$$0 = (v_0 + 5g)e^{-0,2t} - 5g$$

Buradan cismin ən yuxarı vəziyyətə çatanadək keçən T zamanını tapırıq:

$$T = -5 \ln \frac{5g}{v_0 + 5g} = 5 \ln \frac{5 \cdot 9,81 + 20}{5 \cdot 9,81} = 1,71s .$$

Məsələ 15.7

Dəniz topu 18 kq ağırlığında mərmینی $v_0=700$ m/s sürəti ilə atır, mərmnin havadakı həqiqi trayektoriyası aşağıdakı iki hal üçün şəkildə göstərilmişdir:



Şəkil 15.10

1) topun oxunun üföqlə əmələ gətirdiyi bucaq 45^0 -dir, 2) həmin bucaq 75^0 -dir. Hər iki hal üçün havanın mərmiyə olan müqaviməti nəzərə alınmadıqda həm uçuş hündürlüyünün, həm də uçuş uzaqlığının neçə kilometr artacağını tapmalı (Şəkil 15.10).

Həlli.

Məsələni aşağıdakı ardıcılıqla həll edirik:

- 1) Əvvəlcə Oxy koordinat sistemini qəbul edək. Koordinat sisteminin düzgün seçilməsi məsələnin həllini xeyli sadələşdirir.
- 2) Mərmini ixtiyari M nöqtəsində göstərək. Bu zaman çalışmaq lazımdır ki, onun koordinatları göstərilən sistemdə müsbət olsunlar.
- 3) Nöqtəyə təsir edən qüvvələri göstərək. Bu halda mərmiyə yalnız onun $P=mg$ ağırlıq qüvvəsi təsir edir.
- 4) Mərminin hərəkətinin diferensial tənliklərini tərtib edək.
- 5) Bu diferensial tənlikləri həll edib oradan mərminin hərəkət tənliklərini tapırıq.
- 6) Hərəkət tənliklərindən istifadə edib mərminin uçuş hündürlüyünü və uçuş uzaqlığını tapırıq.

Şəkildə göstərilən mərminin hərəkətini Oxy tərpənməz koordinat sisteminə nəzərən araşdıraraq. Havanın müqaviməti nəzərə alınmadıqda mərmiyə yalnız onun $P=mg$ ağırlıq qüvvəsi təsir edir.

Mərminin hərəkətinin diferensial tənliklərini yazırıq:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{ix} = 0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{iy} = -g$$

Burada $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ olduğunu nəzərə alaq:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g$$

Bu təlikləri inteqrallayaq:

$$v_x = C_1, \quad \frac{dx}{dt} = C_1, \quad dx = C_1 dt, \quad x = C_1 t + C_2 \quad (15.17)$$

$$\begin{aligned} v_y &= -gt + C_3, & \frac{dy}{dt} &= -gt + C_3, & dy &= -gdt + C_3, \\ y &= 0,5gt^2 + C_3t + C_4 \end{aligned} \quad (15.18)$$

Burada C_1, C_2, C_3, C_4 – inteqral sabitləridir.

Həmin inteqral sabitlərini tapmaq üçün aşağıdakı başlanğıc şərtləri yazırıq:

$$t=0 \text{ olduqda, } x=0, \quad y=0, \quad v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha. \quad (15.19)$$

(15.19) başlanğıc şərtlərini (15.17) və (15.18) ifadələrində nəzərə alaraq, C_1, C_2, C_3, C_4 sabitlərini tapırıq:

$$C_1=v_0\cos\alpha, C_2=0, C_3=v_0\sin\alpha, C_4=0.$$

Tapılan integral sabitlərini (15.17) və (15.18) ifadələrində yerinə yazaraq:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha \\ x &= v_0 t \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (15.20)$$

$$\left. \begin{aligned} v_y &= -gt + v_0 \sin \alpha \\ y &= -g \frac{t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

Əvvəlcə bu ifadələrdən istifadə edib mərmnin H uçuş hündürlüyünü tapırıq. Şəkildən göründüyü kimi mərm

özünün ən yüksək A nöqtəsinə çatdıqda $v_y = \frac{dy}{dt} = 0$ və $y=H$ olur. Bu qiymətləri (15.21)-də nəzərə alaq:

$$v_y = -gt + v_0 \sin \alpha = 0 \quad \text{və} \quad t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad \text{Onda alırıq:}$$

$$y = H = -g \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2} + v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Burada $\alpha = 45^\circ$ və $\alpha = 75^\circ$ yazıb uçuş hündürlüyünü tapırıq: $\alpha = 45^\circ$ olduqda $H=7,5$ km olur və $\alpha = 75^\circ$ olduqda $H=12$ km olur.

İndi mərminin uçuş uzaqlığını tapaq. Şəkildən göründüyü kimi mərmə yerə düşdükdə $y=0$ və uyğun olaraq $x=L$ olur. Bu qiymətləri (15.21) ifadəsində yerinə yazaq:

$$0 = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha, \quad t_1=0 \text{ və } t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

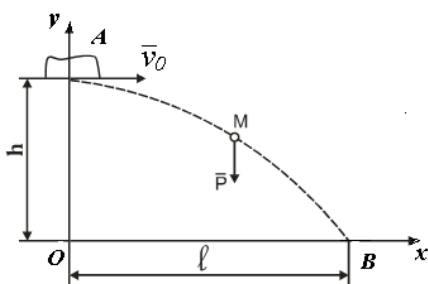
t_2 -nin bu qiymətini (15.20)-də yerinə yazıb L -i tapırıq:

$$L = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Burada $\alpha = 45^\circ$ və $\alpha = 75^\circ$ yazıb uçuş uzaqlığını tapırıq: $\alpha = 45^\circ$ olduqda $L=36,5$ km olur və $\alpha = 75^\circ$ olduqda $L=16,7$ km olur.

Məsələ 15.8

A təyyarəsi yerdən 4000m hündürlüyündə 140 m/s sürəti ilə uçar. Təyyarədən hər hansı yükü, B nöqtəsindən üfqə düz xətt üzrə ölçülən nə kimi x məsafəsində başlanğıc nisbi sürətsiz atmaq lazımdır ki, o, verilmiş B nöqtəsinə düşsün. Havanın müqaviməti nəzərə alınmır (Şəkil 15.11).



Şəkil 15.11

Həlli.

Şəkildə Oxy koordinat sistemini elə seçək ki, Ox oxu yer üzərində üfiqi istiqamətdə yönəlib B nöqtəsindən keçsin, Oy oxu isə şaquli olaraq A nöqtəsindən keçsin. Havanın müqavimətini nəzərə almadıqda təyyarədən atılan M qükünə yalnız onun P ağırlıq qüvvəsi təsir edir. Yükün hərəkətinin diferensial tənliklərini yazırıq:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{ix} = 0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{iy} = -g$$

27.39 məsələsində olduğu kimi bu tənlikləri iki dəfə inteqrallayıb alırıq:

$$v_x = C_1, \quad x = C_1 t + C_2$$

$$v_y = -gt + C_3, \quad y = 0,5gt^2 + C_3 t + C_4 \quad (15.22)$$

Bu ifadələrə daxil olan C_1, C_2, C_3, C_4 inteqral sabitlərini tapmaq üçün məsələnin başlanğıc şərtlərindən istifadə edirik. Şəkildən başlanğıc şərtə əsasən yazırıq:

$$t=0 \text{ olduqda, } x=0, y=h=4000\text{m, } v_x=v_0=140\text{m/s, } v_y=0 \text{ olur.}$$

Bu şərtləri (15.22) ifadələrində yerinə yazıb tapırıq:

$$C_1=v_0=140\text{m/s, } C_2=0, C_3=0, C_4=h=4000\text{m.}$$

Tapılan inteqral sabitlərini (15.22) ifadələrində yerinə yazırıq:

$$x = v_0 t,$$

$$y = -g \frac{t^2}{2} + h \quad (15.23)$$

Şəkildən göründüyü kimi $t=t_1$ anında yük B nöqtəsinə düşür, bu zaman $y=0$ və $x=l$ olur. Bu qiymətləri (15.23) ifadəsində nəzərə alırıq:

$$l = v_0 t_1,$$

$$0 = -g \frac{t_1^2}{2} + h$$

Buradan alırıq:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4000}{9,81}} = 20\sqrt{2} \text{ san}$$

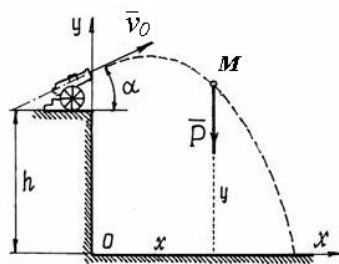
Zamanın bu qiymətini yerinə yazıb yükün üfqi xətt üzrə yerə düşmə l məsafəsini tapırıq:

$$l = v_0 t_1 = 140 \cdot 20\sqrt{2} = 4000$$

m .

Məsələ 15.9

H hündürlüyündəki təcrid quruluşu üzərindən α bucağı altında atəş açılmışdır. Mərminin topun lüləsindən çıxan anda başlanğıc sürəti v_0 olmuşdur.



Şəkil 15.12

Mərminin hərəkət tənliyini tapmalı (Şəkil 15.12).

Havanın müqaviməti nəzərə alınmır.

Həlli.

Məsələn 27.39 məsələsində göstərilən ardıcılıqla həll edək. Şəkildə Oxy koordinat sistemini qəbul edək və mərmini ixtiyari M nöqtəsində göstərək. Bu halda mərmiyə yalnız onun $P=mg$ ağırlıq qüvvəsi təsir edir.

Qəbul etdiyimiz koordinat sisteminə əsasən mərminin hərəkətinin diferensial tənliklərini yazırıq:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{ix} = 0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{iy} = -g$$

Burada $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ olduğunu nəzərə alaq:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \quad (15.24)$$

Bu tənlikləri inteqrallayaq:

$$v_x = C_1, \quad \frac{dx}{dt} = C_1, \quad dx = C_1 dt, \quad x = C_1 t + C_2$$

$$v_y = -gt + C_3, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + C_3, \quad dy = -gtdt + C_3, \\ y = 0,5gt^2 + C_3t + C_4 \quad (15.25)$$

Burada C_1, C_2, C_3, C_4 – inteqral sabitləridir.

Həmin inteqral sabitlərini tapmaq üçün aşağıdakı başlanğıc şərtləri yazırıq:

$$t=0 \text{ olduqda, } x=0, y=h, v_x = v_0 \cos \alpha, v_y = v_0 \sin \alpha.$$

Başlanğıc şərtləri (15.24) və (15.25) ifadələrində nəzərə alaraq, C_1, C_2, C_3, C_4 sabitlərini tapırıq:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, C_2 = 0, C_3 = v_0 \sin \alpha, C_4 = h.$$

Tapılan inteqral sabitlərini (15.24) və (15.25) ifadələrində yerinə yazıb mərminin hərəkət tənliklərini tapırıq:

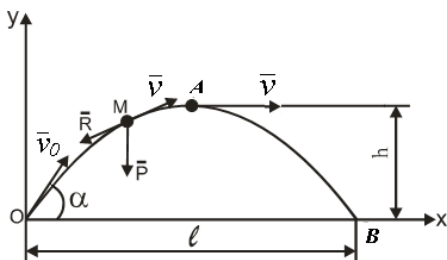
$$x = v_0 t \cos \alpha, y = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha + h$$

Kinematikadan məlumdur ki, bu hərəkət tənliklərindən istifadə edərək mərminin trayektoriyasını, sürət və təcilini tapa bilərik.

Məsələ 15.10 (27.49, 27.50, 27.51)

Ağırlığı P olan cisim üfüqlə α bucağı altında v_0 başlanğıc sürəti ilə atılmışdır, bu cisim hərəkət vaxtı ağırlıq qüvvəsi və havanın R müqaviməti təsiri altında olur. Havanın müqavimətinin sürətin birinci dərəcəsinə mütənasib olduğunu ($R=kPv$) bilərək, cismin hərəkət

tənliklərini, başlanğıc vəziyyət səviyyəsindən nə kimi ən böyük h yüksəkliyinə qalxdığını və üfqi olaraq nə kimi s məsafəsində ən yüksək vəziyyət ala biləcəyini tapmalı.



Şəkil 15.13

Həlli.

Cismin hərəkətini Oxy tərpənməz koordinat sisteminə nəzərən araşdıraraq (Şəkil 15.13). Burada cismə onun $P=mg$ ağırlıq qüvvəsi və havanın $R=kPv$ müqavimət qüvvəsi təsir edir. Cismin hərəkətinin diferensial tənliklərini yazırıq.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{ix} = -R \cos \alpha = -kPv_x$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{iy} = -R \sin \alpha - P = -kPv_y - P$$

Burada $v_x = \frac{dx}{dt}$ və $v_y = \frac{dy}{dt}$ olduğunu nəzərə alaq:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kPv_x,$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -kPv_y - P$$

İfadələrin hər tərəfini m -ə ixtisar edək və dəyişənlərinə ayıraq:

$$\frac{dv_x}{v_x} = -k g dt,$$

$$\frac{dv_y}{v_y + \frac{1}{k}} = -k g dt.$$

Bu tənlikləri inteqrallayaq:

$$\ln v_x = -k g t + \ln C_1,$$

$$\ln\left(v_y + \frac{1}{k}\right) = -k g t + \ln C_2.$$

Buradan v_x və v_y -i tapırıq:

$$v_x = C_1 e^{-k g t},$$

$$v_y = C_2 e^{-k g t} - \frac{1}{k} \quad (15.26)$$

Burada $v_x = \frac{dx}{dt}$ və $v_y = \frac{dy}{dt}$ olduğunu nəzərə alaq və tənliyi dəyişənlərinə ayıraq:

$$dx = C_1 e^{-k g t} dt,$$

$$dy = \left(C_2 e^{-k g t} - \frac{1}{k}\right) dt.$$

Bu tənlikləri inteqrallayaq:

$$\begin{aligned}
 x &= -\frac{C_1}{kg} e^{-kgt} + C_3, \\
 y &= -\frac{C_2}{kg} e^{-kgt} - \frac{1}{k}t + C_4.
 \end{aligned}
 \tag{15.27}$$

Burada C_1, C_2, C_3, C_4 inteqral sabitləridir və aşağıdakı başlanğıc şərtlərin köməyi ilə tapılır:

$$t=0 \text{ olduqda, } x=0, y=0, v_x=v_0 \cos \alpha, v_y=v_0 \sin \alpha.$$

Başlanğıc şərtləri (15.26) və (15.27) ifadələrində nəzərə alaraq, C_1, C_2, C_3, C_4 inteqral sabitlərini tapırıq:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, C_2 = v_0 \sin \alpha + 1/k, C_3 = v_0 \cos \alpha / kg, C_4 = v_0 \sin \alpha / kg.$$

Tapılan inteqral sabitlərini (15.26) və (15.27) ifadələrində yerinə yazaq:

$$\begin{aligned}
 v_x &= v_0 \cos \alpha \cdot e^{-kgt}, \\
 v_y &= (v_0 \sin \alpha + \frac{1}{k})e^{-kgt} - \frac{1}{k}
 \end{aligned}
 \tag{15.28}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kgt}), \\
 y &= \frac{1}{kg} (v_0 \sin \alpha + \frac{1}{k})(1 - e^{-kgt}) - \frac{1}{k}t.
 \end{aligned}
 \tag{15.29}$$

İndi cismin başlanğıc vəziyyət səviyyəsindən qalxdığı ən böyük h yüksəkliyini tapaq. Şəkildən görüldüyü kimi cisim özünün ən yüksək A nöqtəsinə t_1 zaman anında

çatdıqda $v_y = \frac{dy}{dt} = 0$ və $y=h$ olur. (15.28) ifadəsindən tapırıq:

$$v_y = (v_0 \sin \alpha + \frac{1}{k})e^{-kgt_1} - \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow$$

$$t_1 = -\frac{1}{kg} \ln \frac{1}{v_0 k \sin \alpha + 1}.$$

Tapdığımız t_1 zamanını (15.29) ifadəsində yerinə yazıb $y=h$ hündürlüyünü tapırıq.

$$h = \frac{v_0 \sin \alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2} \ln(1 + kv_0 \sin \alpha).$$

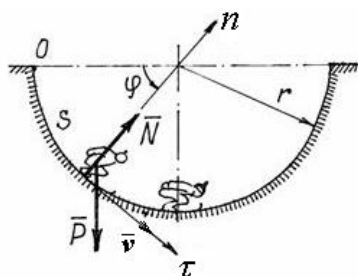
Cismin üfqi istiqamətdə nə kimi s məsafəsində ən yüksək vəziyyət ala biləcəyini tapaq. Şəkildən görüldüyü kimi $v_y = \frac{dy}{dt} = 0$ anda $x=s$ olur. Odur ki, yuxarıda tapdığımız t_1 zamanını x -in (15.29) ifadəsində yerinə yazıb s -i tapırıq:

$$\begin{aligned} s &= \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-\frac{\ln \frac{1}{v_0 k \sin \alpha + 1}}{v_0 k \sin \alpha + 1}}) = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} (1 - \frac{1}{v_0 \sin \alpha + 1}) = \\ &= \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2kg(v_0 k \sin \alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Məsələ 15.11

Xizəkçi radiusu r olan silindrik səth üzrə başlanğıc sürəti olmadan aşağıya doğru hərəkət edir. Müqaviməti nəzərə

almadan ən aşağı vəziyyətdə xizəkçiyə təsir edən səthin təzyiq qüvvəsini tapmalı (Şəkil 15.14).



Şəkil 15.14

Həlli.

Əvvəlcə təbii koordinat sisteminin τ və n oxlarını şəkildə göstərək.

Xizəkçiyə onun P ağırlıq qüvvəsi və səthin N normal qüvvəsi təsir edir. (15.3) ifadələrinə əsasən xizəkçinin hərəkətinin təbii formada diferensial tənliklərini aşağıdakı kimi yazırıq:

$$\frac{P}{g} \ddot{s} = P \cos \varphi, \quad \frac{P}{g} \frac{v^2}{r} = N - P \sin \varphi \quad (15.30)$$

Burada v - xizəkçinin sürəti, s və φ - onun qövs koordinatı və dönmə bucağıdır. Birinci tənliyin həllinə baxaq. Göründüyü kimi bu qeyri- xətti diferensial tənlikdir. Bu tənliyi bir dəfə integrallamaq olar. Onun ikinci integrallını yalnız təqribi tapmaq olar. Birinci tənliyi aşağıdakı kimi yazaq:

$$\ddot{s} = g \cos \varphi$$

Şəkildən yazırıq: $s = r\varphi$. Onda alırıq:

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{r} \cos \varphi \quad (15.31)$$

Aşağıdakı çevirməni aparaq:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}$$

Bunu (15.31) ifadəsində yerinə yazaq.

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi} = \frac{g}{r} \cos \varphi$$

Bu diferensial tənliyi dəyişənlərinə ayıraq:

$$d\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{r} \cos \varphi \cdot d\varphi$$

Bu ifadəni inteqrallasaq alırıq:

$$\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{r} \sin \varphi + C_1.$$

Burada C_1 inteqral sabitidir. Bu sabiti tapmaq üçün məsələnin başlanğıc şərtini yazaq:

$$t=0: \quad \varphi = 0 \quad \text{və} \quad \dot{\varphi} = \omega_0 = 0, \quad \text{onda } S_1=0 \quad \text{və}$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2 \frac{g}{r} \sin \varphi}, \quad \text{xizəkçinin sürəti isə } \dot{s} = r \dot{\varphi} = \sqrt{2gr \sin \varphi}.$$

olur.

Ən aşağı vəziyyətdə $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olduqda xizəkçinin sürəti

$$v = \dot{s} = \sqrt{2gr}$$

olur.

(15.30) ifadələrindəki ikinci tənlikdən $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olduqda ən aşağı vəziyyətdə səthin xizəkçiyə etdiyi N təzyiq qüvvəsini tapırıq:

$$N = P + \frac{P}{g} \frac{v^2}{r} = P + \frac{P}{g} \frac{2gr}{r} = 3P$$

Deməli xizəkçiyə təsir edən N reaksiya qüvvəsi onun P ağırlıq qüvvəsindən 3 dəfə böyük olur.

XVI Fəsil. Maddi nöqtə və sistem dinamikasının ümumi teoremləri

16.1. Dinamikanın bəzi əsas anlayışları

Dinamika məsələlərinin həlli zamanı dinamikanın ümumi teoremlərindən istifadə etmək daha əlverişlidir. Bu teoremlərin məsələlərə tətbiqi zamanı dinamik xarakteristikalar arasında əyani əlaqələr yaranır.

Maddi nöqtənin hərəkət miqdarı və kinetik enerjisi nöqtənin hərəkətinin əsas dinamik xarakteristikalarıdır.

Nöqtənin hərəkət miqdarı vektorial kəmiyyət olub, onun kütləsi ilə sürətinin vurma hasilinə bərabərdir ($m\vec{v}$).

Nöqtənin kinetik enerjisi skalyar kəmiyyət olub onun kütləsi ilə sürətinin kvadratının vurma hasilinin yarısına bərabərdir ($\frac{mv^2}{2}$).

Qüvvənin impulsu və işi nöqtəyə tətbiq olunmuş qüvvənin təsirini xarakterizə edən kəmiyyətlərdir.

Qüvvənin elementar impulsu $d\vec{S}$ qüvvə vektoru ilə elementar zamanın vurma hasilinə bərabərdir:

$$d\vec{S} = \vec{F}dt$$

Qüvvənin t_1 zaman anındakı tam impulsu onun elementar impulsunun integral cəminə bərabərdir:

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F}dt$$

BS sistemində impulsun vahidi *N.san*-dir.

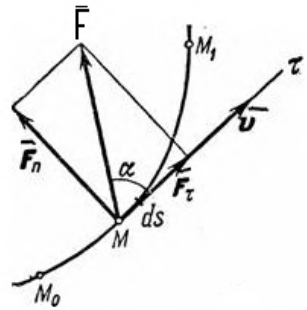
Qüvvənin elementar işi bu qüvvə ilə onun tətbiq olunduğu nöqtənin tərpənməz mərkəzə nəzərən radius-vektorunun $d\vec{r}$ diferensialının skalyar hasilinə bərabərdir.

$$dA = \vec{F} d\vec{r} \quad (16.1)$$

Bu ifadəni proyeksiya formasında aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (16.2)$$

Elementar işin başqa ifadəsini yazaq. Fərz edək ki, M nöqtəsi F qüvvəsinin təsiri altında trayektoriyaya toxunan istiqamətdə elementar ds qədər yol gedir (Şəkil 16.1). Qüvvənin elementar işi bu qüvvənin toxunan ox üzərindəki proyeksiyası ilə elementar ds yerdəyişməsinin vurma hasilinə bərabərdir.



Şəkil 16.1

$$dA = F_t ds \quad (16.3)$$

Qüvvənin tam işini tapmaq üçün (16.1), (16.2) və (16.3) ifadələrini nöqtənin $M_0 M_1$ yerdəyişməsi boyunca integrallamaq lazımdır.

$$A_{01} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_r d\vec{r}$$

$$A_{01} = \int_{M_1}^{M_2} F_{\tau} ds$$

$$A_{01} = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Güc. Qüvvənin gücü onun vahid zamanda gördüyü işdir.

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{F_{\tau} ds}{dt} = F_{\tau} V$$

Deməli güc qüvvənin toxunan üzərindəki proyeksiyası ilə onun təsiri altında hərəkət edən nöqtənin sürətinin vurma hasilinə bərabərdir.

İşin vahidi BS sistemində Coul (C), gücün vahidi isə Vattdır ($1Vt=1C/s$).

Praktikada faydalı iş əmsalı (f.i.ə.) anlayışından geniş istifadə edilir. F.i.ə. qüvvənin gördüyü faydalı işin tam işə olan nisbətinə bərabərdir.

$$\eta = \frac{A_f}{A_T}$$

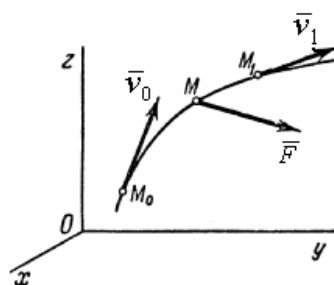
Burada A_f - faydalı iş, A_T - tam işdir. Qüvvənin tam işinin bir hissəsi sürtünmə qüvvələrinin dəf olunmasına sərf olunduğu üçün həmişə $A_f < A_T$. Odur ki, $\eta < 1$.

16.2. Madi nöqtənin və sistemin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teorem

Madi nöqtənin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teorem. Maddi nöqtənin müəyyən zaman fasiləsində yerdəyişməsi zamanı onun hərəkət miqdarının dəyişməsi həmin zaman müddətində ona təsir edən qüvvənin impulsuna bərabərdir.

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \int_0^t \bar{F} dt \quad (16.4)$$

Burada m - nöqtənin kütləsi, $\bar{v}_0$ və $\bar{v}_1$ - nöqtənin başlanğıc və son sürəti, $m\bar{v}_0$ və $m\bar{v}_1$ - nöqtənin başlanğıc və son hərəkət miqdarı, $\bar{F}dt$ - qüvvənin elementar impulsu, $\int \bar{F}dt$ - qüvvənin tam impulsudur (Şəkil 16.2).



Şəkil 16.2

(16.4) ifadəsini koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq, alırıq:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \int_0^t F_x dt$$

$$mv_{1y} - mv_{0y} = \int_0^t F_y dy$$

$$mv_{1z} - mv_{0z} = \int_0^t F_z dz$$

Düzxətli hərəkət zamanı bu ifadələrin birincisindən istifadə olunur.

Maddi nöqtələr sisteminin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teoremin riyazi ifadəsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{R}^e$$

Burada $\bar{R}^e = \sum \bar{F}_i^e$ - sistemə təsir edən xarici qüvvələrin həndəsi cəminə bərabər olub xarici qüvvələrin baş vektorudur, $\bar{K} = \sum m_i \bar{v}_i$ - sistemin nöqtələrinin hərəkət miqdarlarının həndəsi cəminə bərabər olan sistemin hərəkət miqdarıdır. Sistemin hərəkət miqdarı aşağıdakı kimi tapılır:

$$\bar{K} = \sum m_i \bar{v}_i = M \bar{v}_C$$

Burada $M = \sum m_i$ - sistemin kütləsi, v_C - sistemin C kütlələr mərkəzinin sürətidir.

Sistemin kütlələr mərkəzinin hərəkəti haqqında teoremin riyazi ifadəsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$M \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \bar{R}^e \text{ və ya } M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = \bar{R}^e$$

Burada $\bar{r}_C$ - sistemin C kütlələr mərkəzinin tərpənməz O nöqtəsinə nəzərən radius-vektorudur. Bu radius-vektor aşağıdakı kimi tapılır:

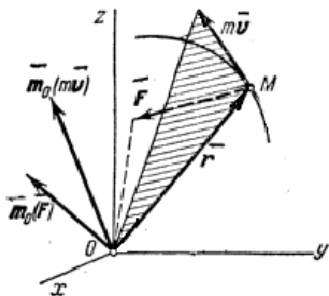
$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{M}$$

Burada m_i – sistemin nöqtələrinin kütləsi, r_i – həmin nöqtələrin tərpənməz O mərkəzinə nəzərən radius-vektorlarıdır.

16.3. Maddi nöqtənin və sistemin hərəkət miqdarı momentinin dəyişməsi haqqında teorem

Maddi nöqtənin hərəkət miqdarı momentinin dəyişməsi haqqında teorem.

Maddi nöqtənin hərəkət miqdarının verilmiş mərkəzə nəzərən momentindən zamana görə alınmış törəmə bu nöqtəyə təsir edən qüvvənin həmin mərkəzə nəzərən momentinə bərabərdir (Şəkil 16.3).



Şəkil 16.3

$$\frac{d}{dt}[\bar{m}_O(m\vec{v})] = \bar{m}_O(\vec{F})$$

Bu teoremin hər hansı z oxuna nəzərən riyazi ifadəsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$\frac{d}{dt}[m_Z(m\vec{v})] = m_Z(\vec{F})$$

Maddi nöqtənin O mərkəzinə nəzərən hərəkət miqdarı momenti və ya kinetik momenti $\bar{m}_O(m\vec{v})$ mexanikanın əsas anlayışlarından biridir.

Maddi nöqtələr sisteminin kinetik momentinin dəyişməsi haqqında teoremin riyazi ifadəsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O^e$$

Burada $\bar{L}_O = \sum \bar{m}_O(m\vec{v}_i)$ - sistemin nöqtələrinin hərəkət miqdarlarının verilmiş O mərkəzinə nəzərən momentlərinin həndəsi cəminə bərabər olan sistemin

kinetik momentidir, $\overline{M}_O^e$ - sistemə təsir edən xarici qüvvələrin həmin O mərkəzinə nəzərən baş momentidir.

16.4. Maddi nöqtənin və sistemin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teorem

Maddi nöqtənin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teorem. Maddi nöqtənin müəyyən yerdəyişməsi zamanı onun kinetik enerjisinin dəyişməsi bu nöqtəyə təsir edən qüvvənin həmin yerdəyişmə zamanı gördüyü tam işə bərabərdir.

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{01}$$

Burada $\frac{mv_0^2}{2}$ və $\frac{mv_1^2}{2}$ nöqtənin başlanğıc və son kinetik enerjisi, A_{01} - nöqtəyə təsir edən qüvvənin tam işidir.

Maddi nöqtələr sisteminin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teorem aşağıdakı kimi yazılır:

$$T_1 - T_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^j$$

Burada T_0 və T_1 sistemin başlanğıc və son kinetik enerjisi, $\sum A_i^j$ və $\sum A_i^e$ - sistemə təsir edən daxili və xarici qüvvələrin sistemin yerdəyişməsi zamanı gördüyü işlərin cəmidir.

Məsələnin şərtinə maddi nöqtənin hərəkət zamanı daxil olarsa və ya zamanın tapılması tələb olunarsa bu halda hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teoremdən istifadə etmək olar. Maddi nöqtənin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teoremin tətbiq olunduğu məsələlər aşağıdakı ardıcılıqla həll edilir:

- 1) Maddi nöqtəyə təsir edən bütün qüvvələri ona tətbiq etməli,
- 2) Koordinat sistemini qəbul etməli,
- 3) Maddi nöqtənin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teoremin ifadəsini yazmalı,
- 4) Bu ifadədən naməlum kəmiyyəti tapmalı.

Məsələnin şərtinə maddi nöqtənin getdiyi yol daxil olarsa və ya yolun tapılması tələb olunarsa bu halda kinetik enerjinin dəyişməsi haqqında teoremdən istifadə etmək olar. Maddi nöqtənin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teoremin tətbiq olunduğu məsələlər aşağıdakı ardıcılıqla həll edilir:

- 1) Maddi nöqtəyə təsir edən bütün qüvvələri ona tətbiq etməli,
- 2) Koordinat sistemini qəbul etməli,
- 3) Maddi nöqtənin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teoremin ifadəsini yazmalı,
- 4) Bu ifadədən naməlum kəmiyyəti tapmalı.

Maddi nöqtə üçün Dəlamber Prinsipi

Qeyri-sərbəst maddi nöqtəyə təsir edən verilmiş qüvvə və rabitənin reaksiya qüvvəsinə həmin nöqtənin inersiya qüvvəsini əlavə etsək müvazinətdə olan qüvvələr sistemi alınır, yəni

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{F}^{in} = 0$$

Burada $\vec{F}$ - maddi nöqtəyə təsir edən verilmiş qüvvə, $\vec{N}$ - rabitənin reaksiya qüvvəsi və $\vec{F}^{in}$ - maddi nöqtənin inersiya qüvvəsidir. İnersiya qüvvəsi maddi nöqtənin kütləsi ilə təcilin əks işarə ilə vurma hasilinə bərabər olub, təcilin əksinə yönəlir.

$$\vec{F}^{in} = -m\vec{w}$$

Burada m – nöqtənin kütləsi, $\vec{w}$ - onun təcildir.

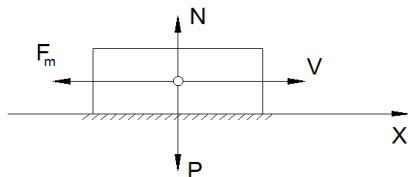
Burada maddi nöqtə dinamikasının teoremlərinə aid aşağıdakı məsələlərə baxılır.

Məsələ 16.1

Dəmiryol qatarı yolun üfqi və düzxətli məntəqəsində hərəkət edir. Qatarı tormozladıqda onun ağırlığının 0,1 hissəsinə bərabər olan müqavimət qüvvəsi yaranır. Tormozlamaya başlanan anda qatarın sürəti 20m/s olmuşdur. Tormozlama müddətini və tormozlama yolunu tapmalı.

Həlli.

Əvvəlcə t tormozlama müddətini tapaq. Qatara təsir edən qüvvələri Şəkil 16.4 - də göstərək: P -ağırlıq qüvvəsi, N -yolun normal reaksiya qüvvəsi, F_m - müqavimət qüvvəsi (burada $F_m=0,1mg$).



Şəkil 16.4

Şəkində koordinat sistemini elə seçək ki, x üfqi absis oxu hərəkət istiqamətində yönəlsin.

Qatarın hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teoremin x oxuna nəzərən proyeksiyasını yazaq:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \int_0^t F_x dt = F_x t \quad (16.5)$$

Burada v_{0x} və v_{1x} - cismın başlanğıc və son sürətlərinin x oxu üzərindəki proyeksiyalarıdır, $F_x = \sum F_{ix}$ - qatara təsir edən qüvvələrin x oxu üzərindəki proyeksiyalarının cəmidir. Şəkindən tapırıq:

$$F_x = -F_m = 0,1mg$$

Məsələnin şərtinə əsasən qatarın üfqi düzxətli hərəkəti zamanı başlanğıc sürətinin x oxu üzərindəki proyeksiyası $v_{0x} = v_0 = 20 \text{ m/s}$ və tormozlandıqdan sonra son sürəti $v_{1x} = v_1 = 0$. Bunları (16.5) ifadəsində nəzərə alaq:

$-mv_0 = F_x t$. Buradan tormozlama zamanını tapırıq:

$$t = mv_0 / F_x = mv_0 / 0,1mg = v_0 / 0,1g = 20 / 0,1 \cdot 9,8 = 20,4 \text{ san}$$

İndi tormozlama yolunu tapaq. Bunun üçün maddi nöqənin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teoremdən istifadə edək:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{01} \quad (16.6)$$

Burada A_{01} - qatara təsir edən qüvvələrin onun s tormozlama yolunda gördüyü işlərin cəmidir. Qeyd edək

ki, qatara təsir edən P ağırlıq qüvvəsi və N normal reaksiya qüvvəsi yerdəyişməyə perpendikulyar olduqları üçün onların yerdəyişmə zamanı gördükləri işlər 0-a bərabər olur. Odur ki, burada yalnız sürtünmə qüvvəsi iş görür:

$$A_{01} = -F_m \cdot s = -0,1mgs$$

Bunları (16.6) ifadəsində nəzərə alaq:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -0,1mgs$$

Buradan tapırıq:

$$s = \frac{v_0^2}{2 \cdot 0,1g} = \frac{400}{2 \cdot 0,1 \cdot 9,8} = 204 \text{ m.}$$

İndi s -i tapmaq üçün başqa üsuldən istifadə edək. Qeyd edək ki, məsələnin şərtinə əsasən qatarın hərəkəti bərabəryavaşayan olduğu üçün s tormozlama yolunu kinematikadan bildiyimiz aşağıdakı ifadədən də tapa bilərik:

$$s = v_0 t - \frac{wt^2}{2}, v_1 = v_0 - wt \quad (16.7)$$

Burada $v_1 = 0$ olduğundan $w = v_0/t$. Odur ki, (16.7) ifadəsindən tapırıq:

$$s = v_0 t - v_0/t \cdot t^2/2 = v_0 t/2 = 20 \cdot 20,4/2 = 204 \text{ m}$$

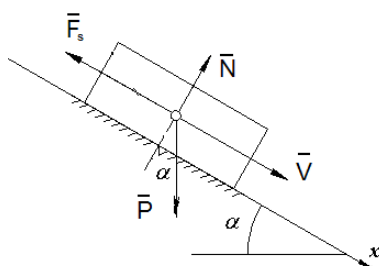
Məsələ 16.2

Üfüqlə $\alpha = 30^\circ$ bucaq təşkil edən kələ-kötür mail səth üzəri ilə ağır bir cisim başlanğıc sürəti olmadan enir. Sürtünmə əmsalı $f=0,2$; cisim $l=39,2\text{m}$ uzunluqda yolu hansı t zamanı ərzində gedir.

Həlli.

Cismə təsir edən qüvvələri Şəkil 16.5-də göstərək: $P=mg$ -ağırlıq qüvvəsi, N - səthin normal reaksiya qüvvəsi, F_s -səthin sürtünmə qüvvəsi. Amonton-Kulon qanununa (sürtünmə qanununa) əsasən $F_s=fN$ (burada f sürtünmə əmsalıdır).

Şəkildə koordinat sistemini elə seçək ki, x absis oxu hərəkət istiqamətində aşağıya doğru yönəlsin.



Şəkil 16.5

Cismin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teoremin x oxuna nəzərən proyeksiyasını yazaq:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \int_0^t F_x dt = F_x t \quad (16.8)$$

Burada v_{0x} və v_{1x} - cismin başlanğıc və son sürətlərinin x oxu üzərindəki proyeksiyalarıdır, $F_x = \sum F_{ix}$ - qatara təsir edən qüvvələrin x oxu üzərindəki proyeksiyalarının cəmidir. Şəkildən tapırıq:

$F_x = P \sin \alpha - F_s = P \sin \alpha - fN$ və $N = P \cos \alpha$. Odur ki, $F_x = P \sin \alpha - f P \cos \alpha = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)$. Şərtə əsasən $v_0 = 0$. Onda $v_{1x} = v_1$ olduğunu nəzərə alaraq (16.8) ifadəsindən alırıq:

$$mv_1 = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)t.$$

Buradan tapırıq:

$$t = v_1 / g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \quad (16.9)$$

İndi cismin son v_1 sürətini onun kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqındakı teoremə əsasən tapırıq:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{01} \quad (16.10)$$

Burada A_{01} - cismə təsir edən qüvvələrin onun s yolunda gördüyü işlərin cəmidir. Qeyd edək ki, cismə təsir edən N normal reaksiya qüvvəsi yerdəyişməyə perpendikulyar olduğu üçün onun bu yerdəyişmə zamanı gördüyü iş 0-a bərabər olur. Odur ki,

$$A_{01} = P \sin \alpha \cdot s - F_s \cdot l = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)l$$

Bunları və eyni zamanda $v_0 = 0$ olduğunu (16.10) ifadəsində nəzərə alaq:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)l$$

Buradan tapırıq:

$$v_1 = \sqrt{2gl(\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

Bu ifadəni (16.9)-da yerinə yazıb t zamanını tapırıq:

$$t = v_1 / g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 39,2}{9,2(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ)}} = 5 \text{ san.}$$

İndi v_1 -i tapmaq üçün başqa üsuldən istifadə edək. Qeyd edək ki, məsələnin şərtinə əsasən cismin hərəkəti bərabərartan (müntəzəm dəyişən) olduğu üçün v_1 sürətini kinematikadan bildiyimiz aşağıdakı ifadədən də tapa bilərik:

$$l = v_0 t + \frac{wt^2}{2}, v_1 = v_0 + wt$$

Şərtə əsasən $v_0 = 0$. Odur ki, buradan alırıq: $w = 2l/t^2$ və $v_1 = 2l/t$.

Bu ifadəni yerinə yazaq:

$$t = v_1 / g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = 2l / gt(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Buradan t zamanını tapırıq:

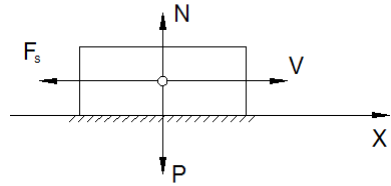
$$t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 39,2}{9,2(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ)}} = 5 \text{ san.}$$

Məsələ 16.3

20 m/s sürəti ilə gedən avtomobil tormozlandıqdan 6 san sonra dayanmış olarsa, tormozlanmış maşının çarxları ilə yol arasında nə kimi sürtünmə əmsalı olmalıdır? (Şəkil 16.6).

Həlli.

Avtomobilə təsir edən qüvvələri Şəkil 16.5-da göstərək: $P=mg$ -ağırlıq qüvvəsi, N - yolun normal reaksiya qüvvəsi, F_s -maşının çarxı ilə yol arasındakı sürtünmə qüvvəsi.



Şəkil 16.6

Amonton-Kulon qanununa (sürtünmə qanununa) əsasən $F_s=fN$. Üfqi yolda $N=P=mg$ olduğu üçün $F_s=fmg$.

Maddi nöqtənin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teoremin x oxuna nəzərən proyeksiyasını avtomobilin hərəkətinə tətbiq edək:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \int_0^t F_x dt = F_x t$$

Tormozlanma zamanının $t=6$ san olduğunu bilərək buradan sürtünmə əmsalını tapırıq:

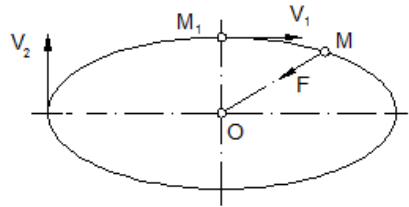
$$f = \frac{v_0}{gt} = \frac{20}{9,8 \cdot 6} = 0,34$$

Məsələ 16.4

M nöqtəsi tərpənməz mərkəz ətrafında, bu mərkəzə cəzbedici qüvvə təsiri altında hərəkət edir. Trayektoriyanın mərkəzdən ən çox uzaqda olan nöqtəsinin v_2 sürətini tapmalı. Trayektoriyanın mərkəzdən ən yaxında olan nöqtəsinin sürəti $v_1=30\text{sm/s}$, r_2 parçası r_1 -dən beş dəfə böyükdür (Şəkil 16.7).

Həlli.

Şəkilə M nöqtəsinə təsir edən F mərkəzi qüvvəsini göstərək, bu qüvvə həmişə trayektoriyanın O mərkəzinə doğru yönəlir. Maddi nöqtənin O mərkəzinə nəzərən hərəkət miqdarı momentinin dəyişməsi haqqında teoremə əsasən yazırıq:



Şəkil 16.7

$$\frac{d[m_O(m\bar{v})]}{dt} = m_O(\bar{F}) \quad (16.11)$$

Şəkildən göründüyü kimi F qüvvəsinin təsir xətti O nöqtəsindən keçdiyi üçün $m_O(F)=0$. Onda (16.11) ifadəsindən alırıq: $m_O(mv)=const$. Başqa sözlə nöqtənin istənilən vəziyyətində onun O mərkəzinə nəzərən hərəkət miqdarı momenti bir-birinə bərabərdir, yəni

$m_O(mv_1) = m_O(mv_2)$ və ya $mv_1r_1 = mv_2r_2$. Buradan alırıq:

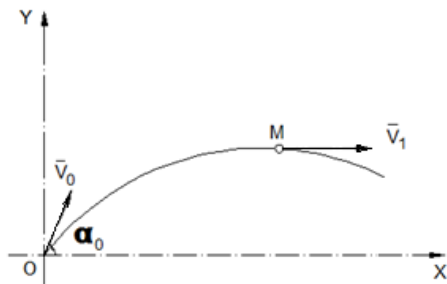
$$v_2 = \frac{v_1 r_1}{r_2}$$

Şərtə görə $r_2 = 5r_1$ olduğundan buradan v_2 sürətini tapırıq:

$$v_2 = \frac{30 \cdot r_1}{5r_1} = 6 \text{ sm/s}.$$

Məsələ 16.5

Mərmnin başlanğıc O vəziyyətindən ən yüksək M vəziyyətinə keçdiyi müddət üçün ona təsir edən bütün qüvvələrin əvəzləyicisinin impulsunu tapmalı. Verilir: $v_0=500\text{m/s}$, $\alpha_0=60^\circ$, $v_1=200\text{m/s}$. Mərmnin kütləsi 100kg -dır (Şəkil 16.8).



Şəkil 16.8

Həlli.

Mərmiyə təsir edən qüvvələrin əvəzləyicisinin impulsunun verilmiş x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını aşağıdakı ifadələrdən tapırıq:

$$S_x = mv_{1x} - mv_{0x} = m(v_{1x} - v_{0x})$$

$$S_y = mv_{1y} - mv_{0y} = m(v_{1y} - v_{0y}) \quad (16.12)$$

Şəkildən mərmnin başlanğıc O və son M vəziyyətlərindəki sürətinin proyeksiyalarını tapırıq:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0, \quad v_{1x} = v_1, \quad v_{1y} = 0.$$

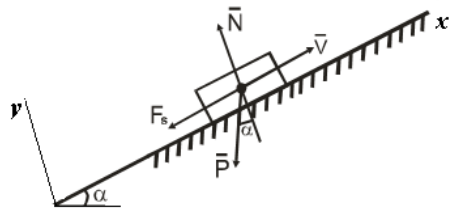
Bu qiymətləri (16.12) ifadələrində yerinə yazıb əvəzləyici impulsun proyeksiyalarını tapırıq:

$$S_x = m(v_{1x} - v_{0x}) = 100(200 - 500 \cos 60^\circ) = -5000 \text{ N.s}$$

$$S_y = m(v_{1y} - v_{0y}) = 100(0 - 500 \sin 60^\circ) = -43300 \text{ N.s}$$

Məsələ 16.6

Kütləsi 2t olan yükü, üfqlə 30^0 bucaq əmələ gətirən mail müstəvi üzərində hərəkət etdirərək 5m qaldırmaq üçün sərf edilən ən kiçik işi tapmalı.
Sürtünmə əmsalı 0,5-dir.



Şəkil 16.9

Həlli.

Şəkil 16.9-da yükə təsir edən qüvvələri göstərək: P - ağırlıq qüvvəsi, N - müstəvinin normal reaksiya qüvvəsi, F_s - sürtünmə qüvvəsi. Sürtünmə qüvvəsinin qiyməti məlum olduğu kimi belə tapılır:

$$F_s = fN = fP \cos 30^0.$$

Bu qüvvələrin gördüyü işlərin cəmini tapaq:

$$A_{01} = A(P) + A(N) + A(F_s) = -mgh - F_s h / \sin 30^0$$

Qeyd edək ki, müstəvinin N normal reaksiya qüvvəsi yerdəyişməyə perpendikulyar olduğu üçün onun işi 0-a bərabərdir. Şərtə görə $m = 2t = 2000\text{kg}$ və $h = 5\text{m}$ olduğundan A_{01} tam işi tapırıq:

$$A_{01} = -mgh - F_s h / \sin 30^0 = -mgh(1 + f/0,5) =$$

$$-2000 \cdot 9,8 \cdot 5(1 + 0,5/0,5) = -183\text{kC}$$

Deməli yükü verilmiş hündürlüyə qaldırmaq üçün ən azı 183 kC iş sərf edilməlidir.

Məsələ 16.7

Kütləsi 200kg olan çəkisi dəqiqədə 84 dəfə 0,75m hündürlüyünə qaldıran maşının gücü, kilovat və at qüvvəsi ilə nə qədər olar? Maşının faydalı iş əmsalı 0,7-dir.

Həlli.

Maşın çəkici 1 dəqiqədə $n=84$ dəfə $h=0,75\text{m}$ hündürlüyünə qaldırır. Odur ki, ümumi halda çəkicin qaldırıldığı hündürlük $H=nh=84\cdot 0,75=63\text{m}$ olur. Kütləsi $m=200\text{kg}$ olan çəkicin bu hündürlüyə qaldırılması üçün görülən işi tapaq:

$$A_{\text{fay}}=mgH=200\cdot 9,8\cdot 63=126000\text{ N}\cdot\text{m}=126\text{kJ}$$

Maşının f.i.ə. $\eta =0,7$ olduğu üçün görülən tam iş aşağıdakı kimi tapılır:

$$A_{\text{tam}}=A_{\text{fay}}/\eta =126000/0,7=180000\text{ N}\cdot\text{m}=180\text{kJ}$$

Bu işi $t=1\text{dəq}=60\text{san}$ -də görmək üçün maşının gücünü tapırıq:

$$W=A_{\text{tam}}/t=180000/60=3000\text{J/s}=3\text{a.q.}=2,94\text{kVt}$$

Burada $1\text{a.q.}=750\text{ Vt}=750\text{ C/s}$ olduğu nəzərə alınmışdır.

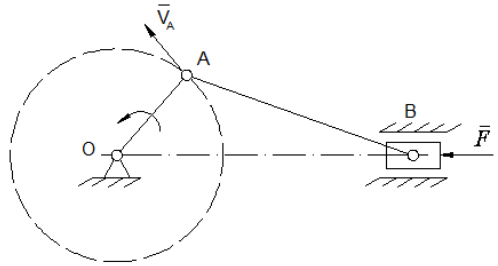
Məsələ 16.8

Daxiliyanma mühərrikinin gücünü at qüvvəsi və kilovatla hesablayın. Pistonun bütün gedişində onun 1sm^2 sahəsinə düşən orta təzyiq $P = 49\text{N}$, pistonun gedişinin uzunluğu $l = 40\text{sm}$, pistonun sahəsi $S = 300\text{ sm}^2$, bir

dəqiqədəki işçi gedişlərin sayı 120 və faydalı iş əmsalı $\eta = 0,9$ -a bərabərdir.

Həlli.

Pistona düşən təzyiq $P=49 \text{ N/sm}^2$ olduğu üçün ona təsir edən tam qüvvə $F = P.S = 49.300=14700 \text{ N}$ olacaqdır. Şərtə görə işçi gedişlərin tezliyi $n = 120/60 = 2 \text{ gediş/san}$ olur (Şəkil 16.10).



Şəkil 16.10

Piston gedişinin uzunluğu $l=40 \text{ sm}=0,4 \text{ m}$ olduğundan daxiliyanma mühərrikinin tam gücünü tapırıq:

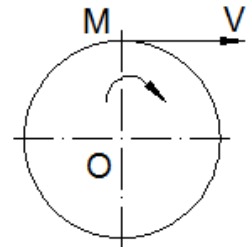
$$W_{\text{tam}} = Fln = 14700 \cdot 0,4 \cdot 2 = 11760 \text{ C} = 11,76 \text{ kVt}.$$

Məlumdur ki, f.i.ə. η aşağıdakı kimi tapılır:

$$\eta = W_{\text{fay}}/W_{\text{tam}}. \text{ Buradan faydalı gücü tapırıq: } W_{\text{fay}} = \eta W_{\text{tam}} = 0,9 \cdot 11,76 = 10,6 \text{ kVt}$$

Məsələ 16.9

Diametri 0,6m olan pardaxlayıcı daş bir dəqiqədə 120dövr/dəq edir və bunun üçün 1,2kVt güc tələb olunur. Pardaxlayıcı daşla detal arasındakı sürtünmə əmsalı 0,2-yə bərabərdir. Pardaxlayıcı daş pardaxlanan hissəni hansı qüvvə ilə sıxır (Şəkil 16.11).



Şəkil 16.11

Həlli.

Əvvəlcə pardaxlayıcı daşın ω bucaq sürətini tapaq:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{120 \cdot 3,14}{30} = 12,56 \text{ rad/s}$$

Pardaxlayıcı daşın çevrəsinin nöqtəsinin sürətini tapaq:

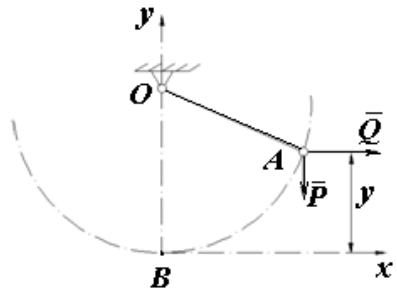
$$v = \omega d/2 = 12,56 \cdot 0,6/2 = 3,768 \text{ m/s}$$

Pardaxlayıcı daşın pardaxlanan hissəni sıxdığı qüvvəni N ilə işarə etsək, kontakt nöqtəsindəki sürtünmə qüvvəsi $F_s = fN$ olar. Onda pardaxlayıcı daşın gücü $W = F_s \cdot v = fNv$. Buradan pardaxlayıcı daşla pardaxlanan hissə arasındakı N sıxıcı qüvvəni tapırıq:

$$N = W/fv = 1,2 \cdot 1000 / 0,2 \cdot 3,768 = 1591,5 \text{ N}.$$

Məsələ 16.10

Uzuluğu l , ağırlığı P olan OA riyazi rəqqası üfqi $Q = Px/l$ qüvvəsi təsiri altında y hündürlüyünə qalxmışdır. Rəqqasın potensial enerjisini iki üsulla hesablamalı: 1) ağırlıq qüvvəsinin işi kimi, 2) Px/l qüvvəsinin gördüyü iş kimi; göstərmək lazımdır ki, nə kimi şərtlər daxilində hər iki üsul eyni nəticə verir (Şəkil 16.12).



Şəkil 16.12

Həlli.

Şəkində Bxy koordinat sistemini qəbul edək.

- 1) Əvvəlcə rəqqasın V potensial enerjisini onun ağırlıq qüvvəsinin işi kimi tapaq:

$$V = - \int_0^y F_y dy. \text{ Şəkindən } F_y = -P. \text{ Onda}$$

$$V = Py$$

- 2) İndi rəqqasın V potensial enerjisini ona təsir edən üfqi $F_x = Q = Px/l$ qüvvəsinin gördüyü iş kimi tapaq:

$$V = - \int_0^x F_x dx = - \frac{1}{2} \frac{Px^2}{l}. \text{ Potensial enerjinin qiymətini}$$

alırıq:

$$V = \frac{1}{2} \frac{Px^2}{l}$$

Hər iki üsulla alınan nəticələrin eyni olması şərtini tapaq:

$$V = Py = \frac{1}{2} \frac{Px^2}{l}, \text{ buradan alırıq:}$$

$$x^2 - 2ly = 0 \quad (16.13)$$

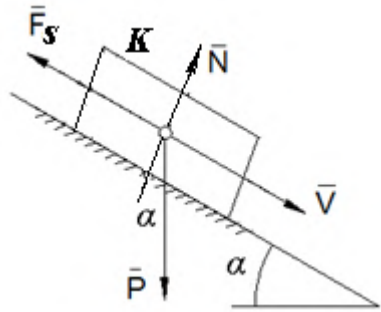
Şəkindən yazı bilərik: $x^2 + (l-y)^2 = l^2$ və ya $x^2 + l^2 - 2ly + y^2 = l^2$. Buradan alırıq:

$$x^2 - 2ly + y^2 = 0 \quad (16.14)$$

(16.13) və (16.14) ifadələrini müqayisə edərək görürük ki, (16.13) şərtinin ödənməsi üçün $y^2=0$ olmalıdır. Başqa sözlə y^2 -ni nəzərə almasaq potensial enerjinin hər iki üsulla alınan qiymətləri bir-birinə bərabər olar.

Məsələ 16.11

K cismi qeyri-hamar mail müstəvi üzərində sükunətdədir. Müstəvinin üfqə meyl bucağı α -dır və $f_0 > tg\alpha$, burada f_0 – sükunətdəki sürtünmə əmsalıdır. Müəyyən bir zamanda cismə müstəvi üzrə aşağı yönəlmiş v_0 başlanğıc sürəti verilmişdir. Hərəkətdəki sürtünmə əmsalı f - ə bərabər isə, cismin dayanana qədər getdiyi s yolunu tapmalı (Şəkil 16.13).



Şəkil 16.13

Həlli.

Verilmiş maili müstəvi üzərində hərəkət edən cismə təsir edən $P=mg$ -ağırlıq qüvvəsi, N - səthin normal reaksiya qüvvəsi, F_s - səthin sürtünmə qüvvəsini şəkildə göstərək. Amonton-Kulon qanununa (sürtünmə qanununa) əsasən $F_s=fN$ (burada f sürtünmə əmsalıdır). Şəkildən tapırıq: $N=P\cos\alpha$, onda $F_s=fN=fmg\cos\alpha$.

Şəkildə koordinat sistemini elə seçək ki, x absis oxu hərəkət istiqamətində aşağıya doğru yönəlsin.

Cismin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teoremə əsasən yazırıq:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{01} \quad (16.15)$$

Burada v_0 və v_1 - cismin başlanğıc və son sürətləridir, A_{01} - cismə təsir edən qüvvələrin onun s yerdəyişməsi zamanı gördüyü işlərin cəmidir.

Şəkildən P , N və F_s qüvvələrinin işini tapıb cəmləyək. Qeyd edək ki, N qüvvəsi cismin yerdəyişməsinə perpendikulyar olduğu üçün onun gördüyü iş 0-a bərabərdir. Odur ki,

$$A_{01} = mgh - F_s \cdot s$$

Burada $h = s \cdot \sin \alpha$ - cismin başlanğıc və son vəziyyətləri arasında hərəkəti zamanı düşdüyü hündürlükdür, s -cismin getdiyi yoldur.

Odur ki, alırıq:

$$A_{01} = mg \cdot s \cdot \sin \alpha - fmg \cos \alpha \cdot s = mgs(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Bu ifadəni (16.15)-də yerinə yazaq:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgs(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Buradan $v_1 = 0$ olduğunu nəzərə alaraq cismin dayanana qədər getdiyi s yolunu tapırıq:

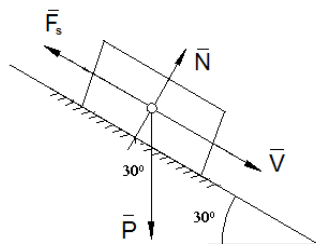
$$s = \frac{v_0^2}{2g(f \cos \alpha - \sin \alpha)}.$$

Məsələ 16.12

Üfüqlə 30° bucaq əmələ gətirən mail müstəvi üzərində başlanğıc sürəti olmayan bir ağır cisim enir. Sürtünmə əmsalı 0,1-ə bərabərdir. Hərəkətin başlanğıcından $s=2\text{m}$ yol getdikdən sonra cismin sürəti nəyə bərabər olar?

Həlli.

Verilmiş maili müstəvi üzərində hərəkət edən cismə təsir edən qüvvələri göstərək: $P=mg$ - ağırlıq qüvvəsi, N - səthin normal reaksiya qüvvəsi, F_s - səthin sürtünmə qüvvəsi (Şəkil 16.14).



Şəkil 16.14

Amonton-Kulon qanununa (sürtünmə qanununa) əsasən $F_s=fN$ (burada f sürtünmə əmsalıdır).

Şəkildə koordinat sistemini elə seçək ki, x absis oxu hərəkət istiqamətində aşağıya doğru yönəlsin.

Cismin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teoremə əsasən yazırıq:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{01} \quad (16.16)$$

Burada v_0 və v_1 - cismin başlanğıc və son sürətləridir, A_{01} - cismə təsir edən qüvvələrin onun s yerdəyişməsi zamanı gördüyü işlərin cəmidir.

Şəkildən P , N və F_s qüvvələrinin işini tapıb cəmləyək. Qeyd edək ki, N qüvvəsi cismin yerdəyişməsinə

perpendikulyar olduğu üçün onun gördüyü iş 0-a bərabərdir. Odur ki,

$$A_{01} = mgh - F_s \cdot s$$

Burada $h = s \cdot \sin 30^\circ$ - cismin başlanğıc və son vəziyyətləri arasında hərəkəti zamanı düşdüyü hündürlükdür, s -cismin getdiyi yoldur.

Şəkildən tapırıq: $N = P \cos 30^\circ$, onda $F_s = fN = fmg \cos 30^\circ$.
Odur ki, alırıq:

$$A_{01} = mg s \cdot \sin 30^\circ - fmg \cos 30^\circ \cdot s = mgs(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ)$$

$v_0 = 0$ olduğunu nəzərə alaraq bu ifadəni (16.16)-da yerinə yazaq:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgs(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ)$$

Buradan cismin son sürətini tapırıq:

$$v_1 = \sqrt{2gs(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ)} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 2(\sin 30^\circ - 0,1 \cos 30^\circ)} = 4,02 \text{ m/s}$$

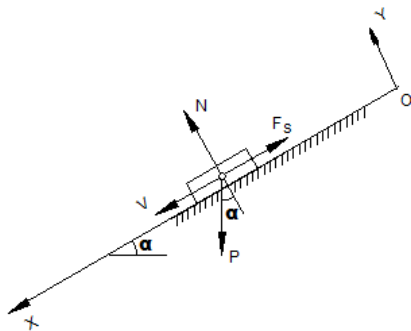
Məsələ 16.13

Qatar, stansiya yaxınlaşarkən maillik bucağı $\alpha = 0,008$ radian olan yolda 10 m/s sürəti ilə hərəkət edir. Müəyyən bir anda maşinist qatarı tormozlamağa başlayır. Tormozlama və sürtünmə nəticəsində oxlarda yaranan müqavimət, qatarın ağırlığının 0,1 hissəsini təşkil edir. $\sin \alpha = \alpha$ qəbul edərək, qatarın tormozlanmaya başladığı andan etibarən nə qədər zamandan sonra və hansı məsafədə dayandığını tapmalı.

Həlli.

Verilmiş maili yolda hərəkət edən qatarla təsir edən qüvvələri Şəkil 16.15-də göstərək: $P=mg$ - ağırlıq qüvvəsi, N - yolun normal reaksiya qüvvəsi, $F_m=0,1mg$ - qatarla təsir edən müqavimət qüvvəsi.

Şəkilə koordinat sistemini elə seçək ki, x oxu hərəkət istiqamətində aşağıya doğru yönəlsin.



Şəkil 16.15

Əvvəlcə qatarın tormozlanmaya başladığı andan etibarən hansı məsafədə dayandığını tapaq. Qatarın kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teoremə əsasən yazırıq:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{01} \quad (16.17)$$

Burada v_0 və v_1 - qatarın başlanğıc və son sürətləridir, A_{01} - qatarla təsir edən qüvvələrin onun yerdəyişməsi zamanı gördüyü işlərin cəmidir.

Şəkildən P , N və F_m qüvvələrinin işini tapıb cəmləyək. Qeyd edək ki, N qüvvəsi qatarın yerdəyişməsinə perpendikulyar olduğu üçün onun gördüyü iş 0-a bərabərdir. Odur ki,

$$A_{01} = mgh - F_m \cdot s = mgh - 0,1mg \cdot s = mg(h - 0,1s)$$

Burada $h=s \cdot \sin \alpha =s$. α - cismin başlanğıc və son vəziyyətləri arasındakı hündürlükdür, s -cismin getdiyi yoldur.

$v_1=0$ olduğunu nəzərə alaraq A_{01} - i (16.17)-də yerinə yazaq:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = mg(h-0,1s) = mg(s \alpha -0,1s) = mgs(\alpha -0,1)$$

Buradan qatarın dayananadək getdiyi s yolunu tapırıq:

$$s = \frac{v_0^2}{2g(0,1-\alpha)} = \frac{100}{2 \cdot 9,8(0,1-0,008)} = 55,3\text{m}$$

İndi qatarın tormozlanmaya başlandığı andan etibarən nə qədər zamandan sonra dayandığını tapaq. Qatarın hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teoremə əsasən yazırıq:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \int_0^t F_x dt = F_x t$$

Burada v_{0x} və v_{1x} - qatarın başlanğıc və son sürətlərinin x oxu üzərindəki proyeksiyalarıdır, $F_x = \sum F_{ix}$ - qatara təsir edən qüvvələrin x oxu üzərindəki proyeksiyalarının cəmidir. Şəkildən tapırıq: $F_x = mgs \sin \alpha - F_m = mg \alpha - 0,1mg = mg(\alpha - 0,1)$.

Şərtə əsasən $v_0=20\text{m/s}$ və $v_1=0$. Onda () ifadəsindən alırıq:

$$-mv_0 = mg(\alpha - 0,1)t.$$

Buradan qatar dayananaadək keçən t zamanını tapırıq:

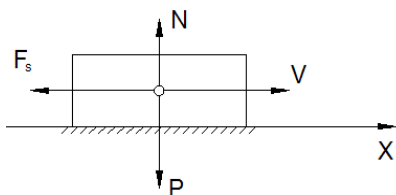
$$t = \frac{v_0}{g(0,1 - \alpha)} = \frac{10}{9,8(0,1 - 0,008)} = 11,8s$$

Məsələ 16.14

Tir qeyri-hamar üfiqi müstəvi üzrə v_0 başlanğıc sürətilə hərəkətə başlayır və dayanana qədər s məsafəsini gedir. Sürtünmə qüvvəsinin normal təzyiq ilə mütənəşib olduğunu hesab edərək, sürüşmə sürtünmə əmsalını tapmalı.

Həlli.

Verilmiş üfiqi müstəvi üzərində hərəkət edən tirə təsir edən qüvvələri şəkildə göstərək: $P=mg$ -ağırlıq qüvvəsi, N -müstəvinin normal reaksiya qüvvəsi, F_s -səthin sürtünmə qüvvəsi.



Şəkil 16.15

Amonton-Kulon qanununa (sürtünmə qanununa) əsasən $F_s=fN$ (burada f sürtünmə əmsalıdır). Şəkildən tapırıq: $N=P$, onda $F_s=fN=fmg$.

Şəkildə koordinat sistemini elə seçək ki, x absis oxu hərəkət istiqamətində yönəlsin.

Cismin (tirin) kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teoremə əsasən yazırıq:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{01} \quad (16.18)$$

Burada v_0 və v_1 - tirin başlanğıc və son sürətləridir, A_{01} - tirə təsir edən qüvvələrin onun yerdəyişməsi zamanı gördüyü işlərin cəmidir.

Şəkildən P , N və F_s qüvvələrinin işini tapıb cəmləyək. Qeyd edək ki, P və N qüvvələri tirin yerdəyişməsinə perpendikulyar olduğu üçün onların gördüyü iş 0-a bərabərdir. Odur ki,

$$A_{01} = -F_s \cdot s = -fmg s$$

Tir dayananda $v_1=0$ olduğunu nəzərə alaraq bu ifadəni (16.18)-də yerinə yazaq:

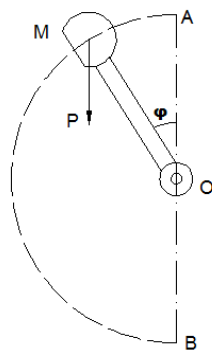
$$-\frac{mv_0^2}{2} = -fmg s$$

Buradan müstsvinin f sürüşmə sürtünmə əmsalını tapırıq:

$$f = \frac{v_0^2}{2gs}.$$

Məsələ 16.15

Materialları zərərə yoxlamaq üçün müəyyən cihazdan istifadə olunur. Bu cihazın əsas hissəsini, çubuğa bərkidilmiş M ağır polad tökməsi təşkil edir. Çubuq tərpənməz O oxu ətrafında sürtünməsiz fırlanır. Çubuğun kütləsini nəzərə almadan M nöqtəsinə bir maddi nöqtə kimi baxırıq. Bu nöqtənin oxdan olan məsafəsi $OM=0,981\text{m}$ -dir (Şəkil 16.16).



Şəkil 16.16

Nöqtə ən yuxarı A vəziyyətindən olduqca kiçik başlanğıc sürəti ilə düşərsə, onun ən aşağı B vəziyyətindəki v_1 sürətini tapmalı.

Həlli.

Məsələnin şərtinə əsasən M nöqtəsinə (ağır polad tökməsinə) yalnız onun $P=mg$ ağırlıq qüvvəsi təsir edir (burada m - nöqtənin kütləsi, g isə sərbəstdüşmə təcilidir).

Maddi nöqtənin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teoremə əsasən yazırıq:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{01} \quad (16.19)$$

Burada v_0 və v_1 - nöqtənin başlanğıc və son sürətləridir, yəni A və B vəziyyətlərindəki sürətidir, A_{01} - nöqtəyə təsir edən qüvvələrin onun yerdəyişməsi zamanı gördüyü işlərin cəmidir. Şəkildən yazırıq:

$$A_{01} = mg \cdot AB. \text{ Şəkildən } AB = 2 \cdot OM \text{ olduğundan } A_{01} = 2mg \cdot OM.$$

M nöqtəsinin başlanğıc sürətinin $v_0=0$ olduğunu nəzərə alaraq bu ifadəni (16.19)-da yerinə yazaq:

$$\frac{mv_1^2}{2} = 2mg \cdot OM.$$

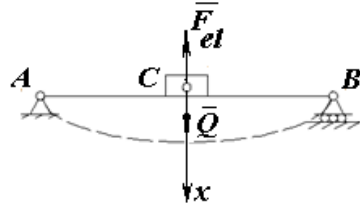
Buradan nöqtənin ən aşağı B vəziyyətindəki v_1 sürətini tapırıq:

$$v_1 = \sqrt{4g \cdot OM} = \sqrt{4 \cdot 9,81 \cdot 0,981} = 6,2 \text{ m/s.}$$

Məsələ 16.16

Ortasında Q yükü qoyulmuş tirin statik əyintisi $x_0 = 2 \text{ mm}$ -dir. Tirin kütləsini nəzərə almadan, onun iki hal üçün ən böyük əyintisini tapmalı: 1) Q yükü əyilməmiş tir üzərinə qoyulur və başlanğıc sürəti olmadan buraxılır; 2) Q yükü başlanğıc sürəti olmadan 10 sm hündürlükdən əyilməmiş tirin ortasına düşür.

Qeyd. Məsələni həll etdikdə nəzərə almaq lazımdır ki, tirin yükə etdiyi təsir qüvvəsi onun əyilməsilə mütənasibdir.



Şəkil 16.17

Həlli.

Şəkil 16.17-də AB tirini və onun üzərində (C ortasında) şaquli istiqamətdə aşağıya doğru hərəkət edən Q yükünü göstərək. Ox koordinat oxunu şaquli istiqamətdə (hərəkət istiqamətində) aşağıya doğru yönəldək (O nöqtəsi şəkildə göstərilməmişdir). Yükə təsir edən $Q=mg$ ağırlıq qüvvəsini və tirin yükə etdiyi F_{el} elastik təsir qüvvəsini qeyd edək.

Tirin əyintisini x ilə işarə etsək, şərtə görə $F_{el}=cx$ olur. Statik müvazinət vəziyyətində $x=x_0=2\text{mm}$ və $Q=F_{el}=cx_0$ olur. Buradan $c=Q/x_0$ alırıq.

Yükün kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teoremə əsasən yazırıq:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{01} \quad (16.20)$$

Burada $m=Q/g$ - yükün kütləsidir (g - sərbəstdüşmə təcilidir), v_0 və v_1 - yükün başlanğıc və son (tirin ən böyük x_{max} əyintisinə uyğun) sürətləridir, A_{01} - yükə təsir edən qüvvələrin onun yerdəyişməsi zamanı gördüyü işlərin cəmidir.

Əvvəlcə birinci hala baxaq. Q yükü əyilməmiş tirin üzərinə qoyulur (C nöqtəsinə) və başlanğıc sürəti olmadan buraxılır. Bu halda məsələnin şərtinə görə $v_0 = 0$ və tirin ən böyük x_{max} əyintisinə uyğun sürəti $v_1 = 0$ olur. Odur ki, (16.20) ifadəsinə əsasən $A_{01}=0$ alırıq. Şəkildən A_{01} -i, yəni Q və F_{el} qüvvələrinin gördüyü işlərin cəmini tapaq:

$$A_{01} = Q \cdot x_{max} - \int_0^{x_{max}} c x dx = Q \cdot x_{max} - \frac{c x_{max}^2}{2} = 0.$$

$c=Q/x_0$ olduğunu nəzərə alsaq, alırıq:

$$A_{01} = Q \cdot x_{max} - \frac{Q x_{max}^2}{2 x_0} \quad (16.21)$$

Bu halda $A_{01}=0$ olduğu üçün

$$Q \cdot x_{max} - \frac{Q x_{max}^2}{2 x_0} = 0, \text{ Buradan } x_{max}=4\text{mm alırıq.}$$

İndi ikinci hala baxaq. Bu halda Q yükü başlanğıc sürəti olmadan $h=10$ sm hündürlükdən əyilməmiş tirin ortasına (C nöqtəsinə) düşür. Əvvəlcə yükün C nöqtəsinə düşən anda onun v_C sürətini tapaq. Yükün bu yolda kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqındakı teoremin (16.20) ifadəsindən istifadə edirik.

Burada $v_0=0$ və $v_1=v_C$ - yükün başlanğıc və tirin ortasındakı C nöqtəsinə düşən andakı son sürətləridir, $A_{01}=mgh$ - yükün Q ağırlıq qüvvəsinin bu yerdəyişmə zamanı gördüyü işdir. Odur ki, (16.20) ifadəsindən alırıq:

$$\frac{mv_C^2}{2} = A_{01} = mgh. \text{ Buradan tapırıq: } v_C = \sqrt{2gh}.$$

İndi yükün tirin üzərinə düşdükdən sonrakı hərəkətinə baxaq. Bu zaman (16.20) ifadəsində $v_0 = v_C = \sqrt{2gh}$ və tirin ən böyük x_{max} əyintisinə uyğun sürəti $v_1 = 0$ olacaqdır. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, bu yolda yükə təsir edən qüvvələrin gördüyü işlərin cəmi (16.21) ifadəsinə əsasən tapılır.

$$\text{Beləliklə, } v_0 = v_C = \sqrt{2gh}, v_1 = 0, A_{01} = Q \cdot x_{max} - \frac{Qx_{max}^2}{2x_0}$$

qiymətlərini (16.20) ifadəsində yerinə yazıb və $h=100\text{mm}$, $x_0 = 2\text{mm}$ olduğunu nəzərə alaraq, yazırıq:

$$-\frac{Q \cdot 2gh}{2g} = Q \cdot x_{max} - \frac{Qx_{max}^2}{2x_0} \text{ və ya } x_{max}^2 - 4x_{max} - 400 = 0.$$

Buradan alırıq:

$x_{max} = 2 \pm 20,1$. Beləliklə tirin ikinci hal üçün ən böyük əyintisini tapırıq:

$$x_{max} = 22,1\text{mm}$$

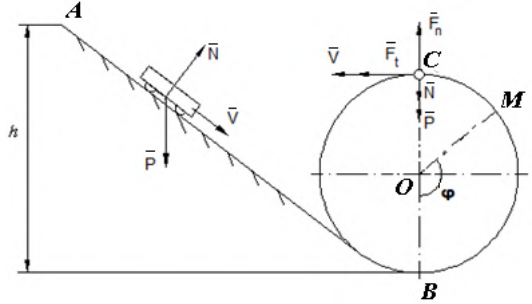
Məsələ 16.17

AB yolunun, sonra da a radiuslu BC dairəvi halqa şəklində olan ilgəyin relsləri üzərində kütləsi m olan arabacıq hərəkət edir. Arabacıq başlanğıc sürəti olmadan

hansı h yüksəkliyindən buraxılmalıdır ki, o halqadan ayrılmayaraq onun bütün çevrəsini keçə bilsin. Arabacığın M nöqtəsində divara etdiyi N təzyiqini də tapmalı. Bu nöqtə üçün $\angle MOB = \varphi$.

Həlli.

Arabacığa təsir edən onun $P=mg$ ağırlıq qüvvəsini və relsin N normal reaksiya qüvvəsini Şəkil 16.18-də göstərək (relslərin sürtünmə qüvvəsi nəzərə alınmır).



Şəkil 16.18

Aydınır ki, arabacığın halqadan ayrılmayaraq onun bütün çevrəsini keçə bilməsi üçün o, halqanın ən yüksək nöqtəsi olan C nöqtəsində hərəkət etməlidir.

Arabacığın AC yolunda hərəkəti zamanı kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teoremə əsasən yazırıq:

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A_{AC} \quad (16.22)$$

Burada $v_A = 0$ və v_C arabacığın A və C nöqtələrindəki sürətləridir, A_{AC} arabacığa təsir edən P və N qüvvələrinin AC yolunda gördüyü işlərin cəmidir. Məlumdur ki, N qüvvəsi yerdəyişməyə perpendikulyar olduğu üçün onun gördüyü iş 0-a bərabərdir. Şəkildən P ağırlıq qüvvəsinin işini tapırıq:

$$A_{AC} = P \cdot h_1 = mgh_1,$$

Burada h_1 arabacığın A başlanğıc və C son vəziyyətləri (səviyyələri) arasındakı hündürlükdür. Şəkildən yazırıq:

$$h_1 = h - 2a.$$

Bu deyilənləri (16.22) ifadəsində nəzərə alaq:

$$\frac{mv_C^2}{2} = A_{AC} = mg(h - 2a).$$

Buradan arabacığın v_C sürətinin h -dan asılı ifadəsini alırıq:

$$v_C^2 = 2g(h - 2a) \quad (16.23)$$

Arabacığın BC dairəvi halqa şəklində olan ilgəyin (buna bəzən «ölüm ilgəyi» də deyilir) bütün çevrəsini keçə bilməsi şərtini çıxaraq. Bunun üçün C nöqtəsində hərəkət edən arabacığa həmin nöqtədə təsir edən N_C reaksiya qüvvəsi 0-dan böyük olmalıdır, yəni $N_C \geq 0$ olmalıdır. Başqa sözlə hərəkət zamanı arabacıqla ilgəyin relsləri arasında qarşılıqlı təsir qüvvələri mövcud olmalıdır. İlgəyin C nöqtəsində arabacığa təsir edən aktiv P və N_C qüvvələrini və onun normal F_{Cn}^{in} və toxunan F_{Ct}^{in} inersiya qüvvələrini göstərək. Dalamber prinsipinə əsasən bu qüvvələr müvazinətdədirlər, yəni

$$\overline{P} + \overline{N}_C + \overline{F}_{Cn}^{in} + \overline{F}_{Ct}^{in} = 0$$

Bu ifadəni şəkildə göstərilən çevrənin C nöqtəsindəki normal oxu üzərinə proyeksiyalayaq:

$$P + N_C - F_{Cn}^{in} = 0 \quad (16.24)$$

Məlumdur ki, arabacığın C nöqtəsində normal inersiya qüvvəsinin qiyməti aşağıdakı kimi tapılır:

$$F_{Cn}^{in} = \frac{mv_C^2}{a}$$

(16.24) ifadəsindən N_C -ni tapırıq:

$$N_C = F_n^{in} - P = \frac{mv_C^2}{a} - mg .$$

Digər tərəfdən $N_C \geq 0$ şərtinə əsasən yazırıq:

$$\frac{mv_C^2}{a} - mg \geq 0 \text{ və ya } v_C^2 - ag \geq 0 \quad (16.25)$$

(16.23) ifadəsini (16.25)-də nəzərə alaq:

$$2g(h - 2a) - ag = 2gh - 5ag \geq 0 .$$

Buradan arabacığın hərəkətə başladığı h yüksəkliyini tapırıq: $h \geq 2,5a$.

İndi arabacığın ilgəyin M nöqtəsində divara etdiyi N təzyiqini tapaq. Dəlambert prinsipinə əsasən M nöqtəsində arabacığa təsir edən aktiv P ağırlıq qüvvəsi və N_M normal reaksiya qüvvəsi, onun normal F_{Mn}^{in} və toxunan F_{Mt}^{in} inersiya qüvvələri müvazinətdədirlər, yəni

$$\overline{P} + \overline{N}_M + \overline{F}_{Mn}^{in} + \overline{F}_{Mt}^{in} = 0$$

Bu ifadəni şəkildə göstərilən çevrənin M nöqtəsindəki normal oxu üzərinə proyeksiyalayaq:

$$-P \cos \varphi + N_M - F_{Mn}^{in} = 0 \quad (16.26)$$

Məlumdur ki, arabacığın M nöqtəsində normal inersiya qüvvəsinin qiyməti aşağıdakı kimi tapılır:

$$F_{Mn}^{in} = \frac{mv_M^2}{a}$$

(16.26) ifadəsindən N_M reaksiya qüvvəsini tapaq:

$$N_M = P \cos \varphi + F_{Mn}^{in} = P \cos \varphi + \frac{mv_M^2}{a} \quad (16.27)$$

Arabacığın v_M sürətini tapmaq üçün onun AM yolunda onun kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqındakı teoremdən istifadə edirik:

$$\frac{mv_M^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A_{AM} \quad (16.28)$$

Burada A_{AM} arabacığa təsir edən P və N qüvvələrinin AM yolunda gördüyü işlərin cəmidir. Məlumdur ki, N qüvvəsi yerdəyişməyə perpendikulyar olduğu üçün onun gördüyü iş 0-a bərabərdir. Şəkildən P ağırlıq qüvvəsinin AM yolunda gördüyü işini tapırıq:

$$A_{AM} = P \cdot h_2 = mgh_2,$$

Burada h_2 arabacığın A başlanğıc və M son vəziyyətləri (səviyyələri) arasındakı hündürlükdür. Şəkildən yazırıq:

$$h_2 = h - (a - a \cos \varphi).$$

Bu deyilənləri və $v_A = 0$ olduğunu (16.28) ifadəsində nəzərə alaq:

$$\frac{mv_M^2}{2} = A_{AM} = mg(h - a + a \cos \varphi).$$

Buradan arabacığın v_M sürətini tapırıq:

$$v_M^2 = 2g(h - a + a \cos \varphi)$$

Bu ifadəni (16.27)-də yerinə yazıb relsin N_M normal reaksiya qüvvəsini tapırıq:

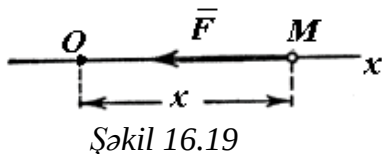
$$N_M = mg\left(\frac{2h}{a} - 2 + 3 \cos \varphi\right)$$

Təsirin əks təsirə bərabərlik prinsipinə əsasən arabacığın divara etdiyi N təzyiq qüvvəsi relsin ona göstərdiyi N_M reaksiya qüvvəsinə bərabərdir, yəni

$$N = mg\left(\frac{2h}{a} - 2 + 3 \cos \varphi\right).$$

16.5. Maddi nöqtənin rəqs hərəkəti

Praktikada maşın və mexanizmlərin ayrı-ayrı hissələrinin mexaniki rəqslərinə geniş təsadüf edilir. Maddi nöqtənin rəqs hərəkəti bərpəedici qüvvənin təsiri altında baş verir. Bərpəedici qüvvənin təsiri altında müvazinət vəziyyətindən çıxarılan maddi nöqtə yenidən həmin nöqtəyə qayıtmağa cəhd edir (Şəkil 16.19).



Bərpəedici F qüvvəsi nöqtənin müvazinət vəziyyətinə doğru yönəlir və qiməti həmin müvəzinət vəziyyətindən olan x məsafəsi ilə düz mütənasib olur. Bu qüvvənin proyeksiyası aşağıdakı kimi tapılır:

$$F_x = -cx$$

Burada c - mütənasiblik əmsalı və ya elastiklik elementin sərtlilik əmsalıdır.

Bərpəedici qüvvəyə misal olaraq elastiklik qüvvəsini göstərmək olar.

Maddi nöqtənin sərbəst rəqslərinin hərəkət tənliyi:

$$x = a \sin(kt + \alpha)$$

Burada a -rəqsin amplitudu, $(kt + \alpha)$ – rəqsin fazı, α - rəqsin başlanğıc fazı, k - rəqsin dövrü tezliyidir.

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Burada m -nöqtənin kütləsidir.

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{v_0}$$

Burada x_0 – nöqtənin başlanğıc koordinatı, v_0 -nöqtənin başlanğıc sürətidir.

Rəqsin periodu:

$$T = 2\pi/k.$$

Qeyd edək ki, $1/T$ kəmiyyətinə rəqsin tezliyi, $k=2\pi/T$ kəmiyyətinə isə rəqsin dövrü tezliyi deyilir.

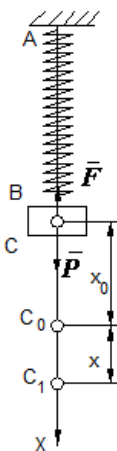
Maddi nöqtənin sərbəst rəqs hərəkətinə aid aşağıdakı məsələlərə baxaq.

Məsələ 16.18

Bir ucu A nöqtəsində bərkidilmiş AB yayını 1 m uzatmaq üçün onun B nöqtəsinə statik yük kimi $19,6\text{ N}$ qüvvə tətbiq etmək lazımdır. Müəyyən anda gərilməmiş bu yayın aşağıdakı B ucuna kütləsi $0,1\text{ kq}$ olan C daşı bağlayıb başlanğıc sürətsiz buraxırlar. Yayın kütləsini nəzərə almadan daşın sonrakı hərəkət tənliyini tapmalı; daşın hərəkətini statik müvazinət vəziyyətindən şaquli istiqamətdə aşağı yönəldilmiş oxa görə nəzərdə tutmalı.

Həlli.

Şəkil 16.20-də yayın ucuna bağlanmış C daşına təsir edən $P=mg$ ağırlıq qüvvəsini və yayın F elastiklik qüvvəsini göstərək ($F_x = -cx$). Şərtə görə yayı 1 m uzatmaq üçün onun B ucuna statik yük kimi $19,6\text{ N}$ qüvvə tətbiq etmək lazımdır, yəni $19,6 = c \cdot 1$. Oodur ki, yayın sərtlilik əmsalı $c=19,6\text{ N/m}$ olur.



Şəkil 16.20

Şəkildə koordinat başlanğıcını yükün C_0 statik müvazinət vəziyyətində qəbul edək və x oxunu aşağıya doğru yönəldək. Bu nöqtədə $x=x_0$ və $P=F$ olur, yəni $mg=cx_0$. Buradan yayın gərilməmiş vəziyyətindən statik müvazinət vəziyyətinədək olan x_0 məsafəsini tapırıq:

$$x_0 = mg/c = 0,1 \cdot 9,81 / 19,6 = 0,05\text{ m}.$$

İndi C daşının cari x məsafəsində yerləşən C_1 vəziyyəti üçün hərəkətin diferensial tənliyini yazaq:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = P_x + F_x = mg - c(x_0 + x)$$

Burada $mg = cx_0$ olduğunu nəzərə alsaq, alarıq:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx$$

Bu tənliyi aşağıdakı kimi yazaq:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0 \quad (16.29)$$

Burada $k^2 = c/m$ işarə edilmişdir.

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{19,6}{0,1}} = 14 \frac{1}{\text{san}}$$

(16.29) tənliyinə maddi nöqtənin sərbəst rəqs hərəkətinin diferensial tənliyi deyilir. Bu ikinci tərtib, sabit əmsallı, xətti bircins diferensial tənlikdir. Bu tənliyi həll etmək üçün ona uyğun xarakteristik tənliyi yazırıq:

$$r^2 + k^2 = 0.$$

Buradan tapırıq: $r = \pm ki$ (burada i - xəyali ədəddir). Xarakteristik tənliyin bu köklərinə əsasən (16.29) diferensial tənliyinin həllini aşağıdakı kimi yazırıq:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (16.30)$$

Burada C_1 və C_2 integral sabitləridir. Bu sabitlər məsələnin başlanğıc şərtlərinə əsasən tapılır.

Başlanğıc şərt: $t=0$ olduqda $x=-x_0$ və $v_x=v_0=0$ olur.

Başlanğıc şərtədən istifadə etmək üçün (16.30) ifadəsindən törəmə alaq:

$$v_x = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \quad (16.31)$$

Başlanğıc şərti (16.30) və (16.31) ifadələrində yerinə yazıb integral sabitlərini tapırıq:

$$C_1 = -x_0 \text{ və } C_2 = 0.$$

Tapdığımız integral sabitlərini (16.30) ifadəsində yerinə yazıb nöqtənin sərbəst rəqs hərəkətinin tənliyini tapırıq:

$$x = -x_0 \cos kt = -0,05 \cos 14t.$$

Buradan rəqsin amplitudu tapırıq:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} = |x_0| = 0,05m$$

Rəqsin periodu tapırıq:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{14} 0,45san.$$

XVII Fəsil. Zərbə nəzəriyyəsi

Zərbə nəzəriyyəsi nəzəri mexanikanın əsas bölmələrindən biri olub, texniki qurğuların hesablanması və quraşdırılması, həmçinin hərbi texnika üçün böyük əhəmiyyətə malikdir.

Zərbə hadisəsinə texniki praktikada geniş rast gəlinir. Məsələn, zindan üzərinə qoyulmuş metal məmulatına çəkicin vurduğu zərbə, binaların özülünü bərkitmək üçün işlədilən döyəcin payaya vurduğu zərbə, artilleriya silahlarından atılan atəş zamanı yaranan zərbə və s.

Zərbə nəzəriyyəsini dərinlən öyrənmək üçün məsələ həllinin xüsusi əhəmiyyəti vardır.

Bu fəsildə zərbə hadisələrinə aid əsas nəzəri materiallar və bir çox səciyyəvi məsələlərin həlli metodları şərh edilmişdir. Fəsilin əvvəlində həmin məsələlərin həllində istifadə edilən teoremlər və formullar verilmişdir. Məsələlər əsasən İ.V. Meşşerskinin 1984-cü ildə Azərbaycan türkcəsində çapdan çıxmış “Nəzəri mexanika məsələləri” adlı kitabından götürülmüşdür. Burada professor N.B. Qədirovun redaktəsi ilə 1994-cü ildə nəşr olunan “Zərbə nəzəriyyəsinin həllinə aid metodik göstəriş” adlı kitabdan [11] istifadə edilmişdir. Odur ki, məsələlərin həllində qəbul edilən metodik üslub və işarələr həmin işdə olduğu kimi saxlanılmışdır.

Zərbə nəzəriyyəsinə aid məsələlərin həllində istifadə olunan əsas teoremlər və formullar

1. Zərbə zamanı maddi nöqtənin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teorem.

Bu teorem vektorial formada belə ifadə edilir:

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \int_0^\tau \bar{F} dt = \bar{S} \quad (17.1)$$

Burada, v və u kütləsi m olan maddi nöqtənin zərbədən əvvəl və zərbədən sonrakı sürətləridir. $\bar{F}$ - zərbə zamanı meydana çıxan zərbə qüvvəsidir və $\bar{S}$ bu qüvvənin τ zərbə zaman fasiləsindəki impulsudur.

Deməli, maddi nöqtənin zərbə zamanı hərəkət miqdarının dəyişməsi ona təsir edən zərbə qüvvəsinin həmin zamandakı impulsuna bərabərdir.

Vektorial (17.1) ifadəsini tərpənməz x, y, z dekart koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq zərbə zamanı maddi nöqtənin hərəkət miqdarı teoreminin koordinat formadakı ifadələri alınır:

$$\left. \begin{aligned} mu_x - mv_x &= \int_0^\tau F_x dt = S_x \\ mu_y - mv_y &= \int_0^\tau F_y dt = S_y \\ mu_z - mv_z &= \int_0^\tau F_z dt = S_z \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

Burada, v_x, v_y, v_z və u_x, u_y, u_z maddi nöqtənin zərbədən əvvəlki v və sonrakı u sürətlərinin x, y, z oxları üzərindəki proyeksiyalarıdır, F_x, F_y, F_z və S_x, S_y, S_z isə $\bar{F}$

zərbə qüvvəsinin və onun τ zərbə zamanındakı S impulsunun həmin oxlar üzərindəki proyeksiyalarıdır.

(17.2) ifadələrinə belə tərif verək :

Maddi nöqtənin hərəkət miqdarının verilmiş tərpənməz ox üzərindəki proyeksiyasının zərbə zamanı dəyişməsi həmin nöqtəyə təsir edən zərbə impulsunun bu ox üzərindəki proyeksiyasına bərabərdir.

2. 1. Zərbə zamanı maddi nöqtənin hərəkət miqdarı momentinin dəyişməsi haqqında teorem.

Bu teorem vektorial və koordinat formada belə ifadə olunur:

$$m_o(mu) - m_o(mv) = m_o(S) \quad (17.3)$$

$$\left. \begin{aligned} m_x(mu) - m_x(mv) &= m_x(S) \\ m_y(mu) - m_y(mv) &= m_y(S) \\ m_z(mu) - m_z(mv) &= m_z(S) \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

Həmin teoremə belə tərif verilir:

Maddi nöqtənin zərbə zamanı verilmiş tərpənməz mərkəzə və ya oxa nəzərən hərəkət miqdarı momentinin dəyişməsi həmin nöqtəyə təsir edən zərbə qüvvə impulsunun bu mərkəzə və ya oxa nəzərən momentinə bərabərdir.

3. Kürənin tərpənməz səthə düz zərbəsi:

Tərpənməz səthə v sürətilə düz zərbə vuran kürə u sürətilə səthdən ayrılarsa, $\frac{u}{v}$ nisbətində bərpa olunma əmsalı deyilir və k ilə işarə edilir, yəni

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}$$

Burada h_1 və h_2 kürənin başlanğıc sürətsiz səth üzərinə düşmə və səthdən qalxma hündürlükləridir.

4. Kürənin tərpənməz səthə çəp zərbəsi:

Kürə tərpənməz ideal səthə normal ilə α bucağı altında v sürətilə zərbə vurur, həmin normal ilə β bucağı təşkil edən istiqamətdə u sürətilə səthdən ayrılarsa, u sürəti qiymət və istiqamətcə belə tapılır:

$$u = v \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha \quad (17.5)$$

Əgər kürə yuxarıda qeyd etdiyimiz çəp zərbəni qeyri ideal səthə vurursa, onda zərbə zamanı kürə ilə səth arasındakı zərbə sürtünmə qüvvəsi nəzərə alınarsa (17.5) ifadələri belə bir şəkil alar:

$$u = v \sqrt{(k \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - f(k+1) \cos \alpha)^2} \quad (17.6)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha - f(k+1) \cos \alpha}{k \cos \alpha}$$

Burada f - zərbə sürüşmə sürtünmə əmsalıdır.

5. İki kürənin düz mərkəzi zərbəsi:

Fərz edək ki, kütlələri m_1 və m_2 olan iki kürə onların mərkəzlərindən keçən xətt (mərkəzlər xətti) üzrə yönəlmiş v_1 və v_2 sürətləri ilə bir-birinə düz zərbə vurur. Onda bu kürələrin zərbədən sonrakı u_1 və u_2 sürətlərinin həmin mərkəzlər xətti boyunca yönəlmiş x oxu üzərindəki proyeksiyaları aşağıdakı formuldan tapılır:

$$\begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - (1 + k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}); \\ u_{2x} &= v_{2x} + (1 + k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}) \end{aligned} \quad (17.7)$$

Bu ifadəyə daxil olan k bərpaolunma əmsalı

$$k = \frac{u_{2x} - u_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}} \quad (17.8)$$

İkinci kürəyə təsir edən zərbə impulsunun x oxu üzərindəki proyeksiyası

$$S_x = (1 + k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}) \quad (17.9)$$

İki kürənin (cismnin) düz mərkəzi zərbəsi zamanı itən kinetik enerjisi belə tapılır:

$$T_0 - T_1 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - k^2) (v_{1x} - v_{2x})^2 \quad (17.10)$$

6. Zərbə zamanı sistemin hərəkət miqdarının dyişməsi haqqında teorem vektorial və koordinat formasında belə ifadə olunur:

$$K - K_0 = \sum S_i^e$$

$$\left. \begin{aligned} K_x - K_{ox} &= \sum S_{ix}^e \\ K_y - K_{oy} &= \sum S_{iy}^e \\ K_z - K_{oz} &= \sum S_{iz}^e \end{aligned} \right\} \quad (17.11)$$

Burada, K_o və K sistemin zərbədən əvvəl və zərbədən sonrakı hərəkət miqdarı vektorlarıdır, $\sum S_i^e$ sistemə təsir edən xarici zərbə impulsların həndəsi cəmi və ya baş vektorudur. K_{ox}, K_{oy}, K_{oz} və K_x, K_y, K_z sistemin zərbədən əvvəl və zərbədən sonrakı K_o və K hərəkət miqdarının x, y, z oxları üzərindəki proyeksiyalarıdır. $\sum S_{ix}^e, \sum S_{iy}^e, \sum S_{iz}^e$ sistemə təsir edən xarici zərbə impulslarının həmin oxlar üzərindəki proyeksiyalarının cəbri cəmidir.

Sistemin kütlələr mərkəzinin hərəkəti haqqındakı teoremə əsasən (17.11) ifadələri bu şəkildə yazılır:

$$\left. \begin{aligned} Mu_o - Mv_o &= \sum S_i^e \\ Mu_{ox} - Mv_{ox} &= \sum S_{ix}^e \\ Mu_{oy} - Mv_{oy} &= \sum S_{iy}^e \\ Mu_{oz} - Mv_{oz} &= \sum S_{iz}^e \end{aligned} \right\} \quad (17.12)$$

Burada, v_{ox}, v_{oy}, v_{oz} və u_{ox}, u_{oy}, u_{oz} sistemin kütlələr mərkəzinin zərbədən əvvəl və sonrakı v_o və u_o sürətlərinin x, y, z oxları üzərindəki proyeksiyalarıdır.

7. Zərbə zamanı sistemin kinetik momentinin dəyişməsi haqqında teorem vektorial və koordinat formasında belə ifadə edilir:

$$L_o - L_o^{(o)} = \sum m_o(S_i^e)$$

$$\left. \begin{aligned} L_x - L_x^{(o)} &= \sum m_x(S_i^e) \\ L_y - L_y^{(o)} &= \sum m_y(S_i^e) \\ L_z - L_z^{(o)} &= \sum m_z(S_i^e) \end{aligned} \right\} \quad (17.13)$$

Burada, $L_o^{(o)} = \sum m_o(m_i v_i)$; L_o sistemin zərbədən əvvəl və sonra tərpənməz O mərkəzinə nəzərən kinetik momentidir. $L_x^{(o)}$, $L_y^{(o)}$, $L_z^{(o)}$ və L_x , L_y , L_z sistemin zərbədən əvvəl və sonra x, y, z oxlarına nəzərən kinetik momentləridir.

8. Tərpənməz z oxu ətrafında fırlanan cismin zərbə impulsu təsiri nəticəsində bucaq sürətinin dəyişməsi belə tapılır:

$$\omega - \omega_o = \frac{m_z(S)}{J_z} \quad (17.14)$$

Burada, ω_o və ω cismin zərbədən əvvəl və sonra tərpənməz z oxu ətrafında fırlanma bucaq sürətləridir. J_z cismin həmin oxa nəzərən inersiya momentidir.

Tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin K zərbə mərkəzinin fırlanma oxundan olan məsafəsi belə tapılır:

$$Y_k = \frac{J_z}{MY_c} \quad (17.15)$$

Burada, Y_c cismin c ağırlıq mərkəzinin fırlanma oxundan olan məsafəsidir.

9. Müstəvi hərəkət edən cismin C kütlələr mərkəzini qütb qəbul etsək, S zərbə impulsu təsiri nəticəsində həmin mərkəzin sürətinin və cismin bu mərkəz ətrafında fırlanma bucaq sürətinin dəyişməsi aşağıdakı ifadədən tapılır:

$$M(U_{cx} - V_{cx}) = S_x, \quad M(U_{cy} - V_{cy}) = S_y, \quad J_z(\omega - \omega_o) = m_z(S) \quad (16)$$

Burada, M cismin kütləsidir, V_{cx} , V_{cy} və U_{cx} , U_{cy} cismin C kütlələr mərkəzinin zərbədən əvvəl və zərbədən sonrakı V_c və U_c sürətlərinin x və y oxları üzərində proyeksiyalarıdır, S_x və S_y cismə təsir edən zərbə impulsunun həmin oxlar üzərindəki proyeksiyalarıdır; ω_o və ω cismin hərəkət müstəvisinə (xOy müstəvisinə) perpendikulyar olan ox ətrafında zərbədən əvvəl və zərbədən sonrakı fırlanma bucaq sürətləridir.

Məsələ 17.1

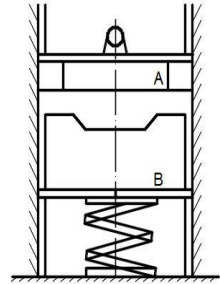
Zərbə vurucu A cismi $h = 4,905 \text{ m}$ hündürlükdən düşür və yay üzərində bərkidilmiş B zindanına zərbə endirir. Zərbə vurucunun kütləsi $m_1 = 10 \text{ kq}$, zindanın kütləsi $m_2 = 5 \text{ kq}$ - dir. Zərbəvurucu zindanla birlikdə hərəkət edərsə, zindanın zərbədən sonra hansı sürətlə hərəkətə başlayacağını tapmalı (Şəkil 17.1).

Həlli.

Zərbəyə məruz qalan sistem zərbə vurucudan və zindandan ibarətdir. Bu sistemin zərbə zamanı hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqındakı teoremə (17.11 ifadəsi) əsasən yazırıq:

$$K - K_o = \sum S_i^e$$

Burada $\sum S_i^e$ sistemə təsir edən xarici zərbə impulslarının cəmidir və sifra bərabər olacaqlar, çünki baxdığımız sistemə xarici zərbə impulsları təsir etmir. Onda sistemin hərəkət miqdarı sabit qalar, yəni :



Şəkil 17.1

$$K = K_o \quad \text{və} \quad \bar{K} = \bar{K}_o \quad (17.17)$$

Sistemin zərbədən əvvəl və zərbədən sonrakı $\bar{K}_o$ və $\bar{K}$ hərəkət miqdarını tapaq: Bunun üçün əvvəlcə zərbə vurucunun zərbədən əvvəlki V_1 sürətini aşağıdakı məlum ifadədən tapırıq:

$$V_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 * 9,81 * 4.905} = 9,81 \text{ m/san}$$

Zərbədən sonra zərbə vurucu sükunətdə olan zindanla birlikdə u sürətilə hərəkət edəcəkdir. Odur ki, baxdığımız sistemin zərbədən əvvəl və zərbədən sonrakı hərəkət miqdarını qiymətcə belə tapırıq:

$$\begin{aligned} K_o &= m_1 V_1 + m_2 V_2 = 10 + 9.81 + 0 \\ &= 98.1 \text{ kq} * \text{m/san} \end{aligned}$$

$$K = m_1 u + m_2 u = 10u + 5u = 15u \text{ kq} * \text{m/san}$$

Bu qiymətləri (17.17) ifadəsində yerinə yazsaq alarıq:

$$15u = 98,1$$

Burada zərbə vuran zindanla birlikdə zərbədən sonrakı hərəkət sürətini tapırıq:

$$u = \frac{98,1}{15} = 6.54 \text{ m/san}$$

Məsələ 17.2

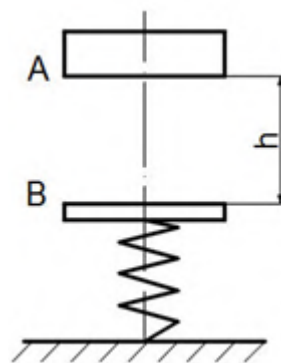
Kütləsi m_1 olan A yükü h hündürlükdən başlanğıc sürətsiz m_2 kütləli B tavası üzərinə düşür. Tava sərtlik əmsalı C olan yaya bərkidilmişdir. Bərpaolunma əmsalının sıfır olduğunu qəbul edərək, yayın zərbədən sonra sıxılmasının qiymətini tapmalı (Şəkil 17.2).

Həlli.

Sistem A yükü və B tavasından ibarətdir. Əvvəlcə A yükünün zərbədən əvvəlki sürətini tapaq:

$$V_1 = \sqrt{2gh}$$

Baxdığımız sistemə zərbə zamanı xarici impulslar təsir etmədiyi üçün onun hərəkət miqdarı sabit qalır. Odurki, sistemin zərbədən əvvəlki K_o hərəkət miqdarı onun zərbədən sonrakı K hərəkət miqdarına bərabər olacaqdır, yəni:



Şəkil 17.2

$$K_o = K$$

Zərbədən əvvəl sistemin A yükü V_1 sürətilə hərəkət edir. B tavaşının sürəti isə sıfıra bərabərdir ($V_B = 0$). Bərpa olunma əmsalı sıfıra bərabər olduğu üçün zərbədən sonra A yükü ilə B tavaşı müəyyən bir U sürətilə hərəkət edəcəklər.

Onda sistemin zərbədən əvvəl və zərbədən sonrakı hərəkət miqdarları qiymətcə belə tapılar:

$$K_o = m_1 V_1, \quad K = (m_1 + m_2)U$$

Bu qiymətləri yuxarıdakı bərabərlikdə yerinə yazsaq alarıq:

$$m_1 V_1 = (m_1 + m_2)U$$

Buradan U sürətini tapırıq:

$$U = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2} \quad (17.18)$$

Bu sürətlə hərəkət edən sistemin yayın S qədər sıxıldığı məsafədəki kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teoremə əsasən yazırıq:

$$0 - \frac{(m_1 + m_2)U^2}{2} = A_1 + A_2 \quad (17.19)$$

Burada A_1 yükünün $m_1 g$ və tavanın $m_2 g$ ağırlıq qüvvələrinin həmin S məsafəsində gördüyü işlərin cəmidir və belə tapılır:

$$A_1 = m_1 g S + m_2 g S$$

A_2 əvvəlcə $m_2 g$ ağırlıq qüvvəsi təsiri altında $S_o = \frac{m_2 g}{c}$ qədər sıxılmış yayın əlavə olaraq S qədər sıxılmasına sərf olunan işdir və belə tapılır:

$$A_2 = \left[\frac{c(S_o + S)}{2} - \frac{cS_o^2}{2} \right] = \left(\frac{cS_o^2}{2} + CS_oS \right) \quad (17.20)$$

Onda (17.18) və (17.20) ifadələrini (17.19) tənliyində yerinə qoysaq alarıq:

$$S^2 - 2 \left(\frac{m_1 + m_2}{c} g - S_o \right) S - \frac{m_1^2 V_1^2}{c(m_1 + m_2)} = 0$$

Burada $S_o = \frac{m_2 g}{c}$ və $V_1 = \sqrt{2gh}$ ifadələrini nəzərdə tutsaq,

$$S^2 - \frac{2m_1 g}{c} S - \frac{2ghm_1^2}{c(m_1 + m_2)} = 0$$

Bu kvadrat tənliyin həlli nəticəsində S məsafəsini tapırıq:

$$S = \frac{m_1 g}{c} + \sqrt{\frac{m_1^2 g^2}{c^2} + 2gh \frac{m_1^2}{c(m_1 + m_2)}}$$

Məsələ 17.3

Kütləsi $m_1 = 12 \text{ t}$ olan buxar çəkici zindan üzərinə $v_1 = 5 \text{ m/san}$ sürətilə düşür. Zindanın döyülən dəmir parçası ilə birlikdə kütləsi $m_2 = 250 \text{ t}$ -dur. Döyülən çəkicin η faydalı iş əmsalını hesablamalı. Zərbə elastik deyildir.

Həlli.

Zərbəyə məruz qalan sistem zərbədən qabaq v_1 sürətilə hərəkət edən çəkicdən və sükunətdə olan dəmir parçası ilə birlikdə zindandan ibarətdir. Odur ki, həmin sistemin zərbədən əvvəlki kinetik enerjisi belə olar ($v_2 = 0$):

$$T_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{12 * 5^2}{2} = 150 \text{ kN.m}$$

Elastik olmayan bu zərbədə baxdığımız sistemin kinetik enerjisinin itkisini (17.10) ifadəsinə əsasən tapırıq :

$$T_0 - T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (V_{1x} - V_{2x})^2$$

Məsələnin şərtinə görə $v_1 = 5 \text{ m/san}$, $v_2 = 0$

Onda

$$T_0 - T = \frac{12 * 250}{2 * (12 + 250)} 5^2 = 143 \text{ kN.m}$$

Bu iş döyülən dəmir parçasına sərf olunur və faydalı iş hesab edilməlidir. Yəni

$$A_1 = 143 \text{ kN.m}$$

Odur ki, bu işin sistemin zərbədən əvvəlki kinetik enerjisinə (həmin işin görülməsinə sərf olunan enerjiyə) olan nisbəti sistemin faydalı iş əmsalı olacaqdır, yəni

$$\eta = \frac{A_1}{T_0} = \frac{143}{150} = 0,95$$

Özülün titrəməsi ilə itən işin miqdarı isə belə tapılır:

$$A_2 = T_0 - A_1 = 150 - 143 = 7 \text{ kN.m}$$

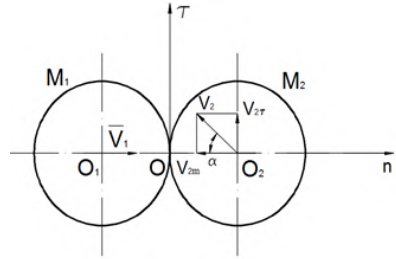
Məsələ 17.4

İki eyni mütləq elastik kürə qiymətcə bərabər olan V sürəti ilə toqquşur. Sol kürənin zərbəyədək $\bar{V}$ sürəti kürələrin mərkəzlərini birləşdirən xətt üzrə sağa yönəlmişdir, sağ kürənin zərbəyədək $\bar{V}_2$ sürəti isə

mərkəzlər xətti ilə α bucağı təşkil edir (Şəkil 17.3).
Kürələrin zərbədən sonrakı sürətlərini tapmalı.

Həlli.

İkinci kürənin $\bar{V}_2$ sürətini O_1 və O_2 mərkəzlər xətti üzrə yönəlmiş On normalı və kürələrin toxunduğu O nöqtəsindəki $O\tau$ toxunan xətt boyunca yönəlmiş iki $\bar{V}_{2n}$ və $V_{2\tau}$ toplananlara ayıraraq. Bu toplanan sürətlər qiymətcə belə tapılar:



Şəkil 17. 3

$$|V_{2n}| = V_2 \cos \alpha = V \cos \alpha; \quad V_{2\tau} = V_2 \sin \alpha = V \sin \alpha.$$

Eyni qayda ilə birinci kürənin $\bar{V}_1$ sürətinin On normalı və $O\tau$ toxunanı üzrə yönəlmiş toplananları qiymətcə belə olar:

$$V_{1n} = V_1 = V; \quad V_{1\tau} = 0$$

Aydındır ki, onda kürələr bir-birinə uyğun olaraq $\bar{V}_1$ və $\bar{V}_{2n}$ sürətləri ilə On normalı üzrə qarşılıqlı düz zərbə vuracaqlar. O_2 kürəsi isə eyni zamanda $O\tau$ toxunanı istiqamətdə $\bar{V}_{2\tau}$ sürəti ilə hərəkət edəcəkdir. Kürələrin zərbədən sonra On normalı üzrə yönəlmiş sürətlərini (17.7) formullarına əsasən tapırıq:

$$U_{1n} = V_{1n} - (1 + k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (V_{1n} - V_{2n}) = V - \frac{2m}{2m} (V + V \cos \alpha) = -V \cos \alpha,$$

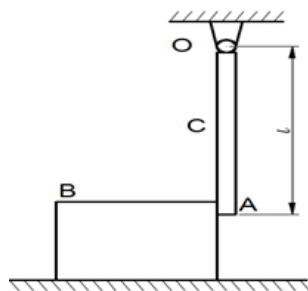
$$\begin{aligned}
 U_{2n} &= V_{2n} + (1 + k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (V_{1n} - V_{2n}) \\
 &= -V \cos \alpha + \frac{2m}{2m} (V + V \cos \alpha) = V
 \end{aligned}$$

Həmin kürələrin zərbədən sonra 0τ toxunai istiqamətində yönəlmiş sürətləri isə qiymətcə belə olacaqdır:

$$U_{1\tau} = 0, \quad U_{2\tau} = V \sin \alpha$$

Məsələ 17.5

Uzunluğu ℓ və kütləsi M olan bircinsli OA çubuğun yuxarı ucu silindrik O oynaqına bərkidilmişdir. Çubuq üfqi vəziyyətdən başlanğıc sürəti olmadan düşür və şaquli vəziyyətə çatdıqda m kütləli B yükünə zərbə ilə dəyərək onu üfqi kələ - kötür müstəvi üzərində hərəkət etməyə məcbur edir (Şəkil 17.4). Sürüşmə srtünmə əmsalı f -dir. Zərbəni qeyri-elastik hesab edərək, yükün getdiyi yolu tapmalı.



Şəkil 17.4

Həlli.

Əvvəlcə OA çubuğunun B yükünə zərbə vuran andakı ω bucaq sürətini tapaq. Bunun üçün tərpənməz ox ətrafında fırlanan bərk cismin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqındakı teoremi tətbiq edək.

$$\frac{J_Z \omega_1^2}{2} - \frac{J_Z \omega_0^2}{2} = A \quad (17.21)$$

Burada A çubuğa təbir edən $M\bar{g}$ ağırlıq qüvvəsinin çubuğun üfüqi vəziyyətindən şaquli vəziyyətinə gələnə qədər gördüyü işdir və belə tapılır:

$$A = Mg * \frac{\ell}{2}$$

Bu qiyməti (17.21) ifadəsində yerinə yazıb, çubuğun başlanğıc andakı bucaq sürətinin sıfıra bərabər olduğunu nəzərdə tutsaq, alırıq:

$$\frac{J_Z \omega_1^2}{2} = Mg * \frac{\ell}{2}$$

Buradan çubuğun zərbə vuran andakı bucaq sürətini tapırıq:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{Mgl}{J_Z}}$$

Onda çubuğun A ucunun B yükünə vurduğu zərbədən əvvəlki sürəti $V_1 = \ell\omega_1$ olar. Zərbə qeyri- elastik olduğu üçün zərbədən sonra həmin yük müəyyən U sürəti ilə hərəkət edəcəkdir. Çubuğun bu sürətə uyğun zərbədən sonrakı bucaq sürəti $\omega_2 = \frac{u}{\ell}$ olacaqdır.

Əgər zərbə zamanı çubuq yükə $\bar{S}$ zərbə impulsu ilə təsir edərsə, onda yük çubuğa (- $\bar{S}$) impulsu ilə əks təsir edəcəkdir. Buna əsasən sistemin zərbə zamanı kinetik momentinin dəyişməsi haqqındakı teoremi çubuğun O

nöqtəsindən keçən z oxu ətrafında fırlanma hərəkətinə tətbiq etsək, alarıq:

$$L_z - L_z^{(0)} = m_z(\overline{-S}) = -lS \quad (17.22)$$

Burada $L_z^{(0)}$ və L_z çubuğun zərbədən əvvəl və zərbədən sonrakı kinetik momentləridir və belə tapılar:

$$L_z^{(0)} = J_z \omega_1 = \sqrt{MglJ_z}, \quad L_z = J_z \omega_2 = J_z * \frac{u}{l}$$

J_z çubuğun O nöqtəsindən keçən z oxuna nəzərən inersiya momentidir və $\frac{ml^2}{3}$ bərabərdir. Bu qiymətləri (17.22) ifadəsində yerinə yazsaq, alarıq:

$$J_z(\omega_2 - \omega_1) = -lS$$

Digər tərəfdən, maddi nöqtənin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqındakı teoremi zərbə zamanı B yükünə tətbiq etsək, alarıq:

$$mu - 0 = S$$

Bu ifadəni (17.22) - də yerinə yazsaq:

$$J_z * \frac{u}{l} - J_z \sqrt{\frac{Mgl}{J_z}} = -l * mu$$

Burada $J_z = \frac{Ml^2}{3}$ qiymətini yerinə yazsaq, yükün zərbədən sonrakı u sürətini tapırıq.

$$u = \frac{\sqrt{3gl} * M}{M + 3m} \quad (17.23)$$

Nəhayət maddi nöqtənin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqındakı teoremi yükün zərbədən sonra S_1 məsafəsindəki hərəkətinə tətbiq etsək, alarıq:

$$\frac{mu^2}{2} - 0 = fmgS_1$$

Buradan (17.23) ifadəsini nəzərə almaqla yükün qeyri-hamar səth üzrə getdiyi S_1 məsafəsini tapırıq:

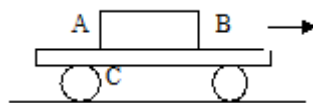
$$S_1 = \frac{u^2}{2fg} = \frac{3l}{2f} * \frac{M^2}{(M + 3m)^2}$$

Məsələ 17.6

Üzərinə prizmatik AB yükü qoyulmuş platforma üfüqi relslər üzrə v sürətilə hərəkət edir (Şəkil 17.5). Platformada yükün B tili yanında bir çıxıntı var. Bu çıxıntı yükü platforma üzərində irəli sürüşməyə qoymur. Onun B tili ətrafında fırlanmasına isə mane olmur. Yükün ağırlıq mərkəzinin platformadan olan h hündürlüyü, yükün B tilinə nəzərən ρ ətalət radiusu verilir. Platforma qəfildən dayanan anda yükün B tili ətrafında fırlanmasının ω bucaq sürətini tapmalı.

Həlli

Platforma qəfildən dayanan zaman anından sonra yükə tilin S zərbə impulsu təsir edəcəkdir və bu andan etibarən yük həmin til ətrafında fırlanacaqdır.



Şəkil 17.5

Platformanın bu fırlanma hərəkəti üçün (17.13) ifadəsini yazaq.

$$L_z - L_z^{(0)} = m_z(S) \quad (17.24)$$

Burada $m_z(S)$ platformanın B tili üzrə yönəlmiş z oxuna nəzərən S zərbə impulsunun momentidir və sıfıra bərabər olacaqdır, çünki həmin impuls oxu kəsir yəni $m_z(S)=0$, $L_z^{(0)}$ və L_z yükün zərbədən əvvəl və zərbədən sonra z oxuna nəzərən kinetik momentləridir və belə tapılır:

$$L_z^{(0)} = Mu_0h, \quad L_z = J_z\omega$$

Burada M yükün kütləsidir, u_c onun C kütlələr mərkəzinin zərbədən əvvəl irəliləmə hərəkətindəki sürətləridir, ω yükün zərbədən sonra z oxu ətrafında fırlanma bucaq sürətidir. $J_z = Mp^2$ yükün həmin oxa nəzərən inersiya momentləridir.

Bu qiymətləri (17.24) tənliyində yerinə yzsaq alarıq:

$$J_z\omega - Mu_ch = 0$$

Buradan yükün zərbədən sonra B tili ətrafında fırlanma bucaq sürətini tapır :

$$\omega = \frac{Mu_ch}{J_z} = \frac{MVh}{Mp^2} = \frac{hV}{p^2}$$

Məsələ 17.7

Elastik kürə h hündürlüyündən üfüqi tava üzərində düşdükdə yuxarı sıçrayır, sonra yenə də tava üzərinə düşür və yenə sıçrayır və bu qayda ilə hərəkət davam edir (Şəkil 17.6). Zərbə vaxtı bərpaulunma əmsalının k

olduğunu bilərək, kürənin dayananadək getdiyi yolu tapın.

Həlli.

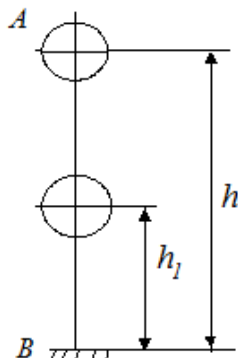
Əvvəlcə ağırlıq qüvvəsinin təsiri altında h hündürlüyündən düşən kürəyə kinetik enerjinin dəyişməsi haqqındakı teoremi tətbiq edərək onun tavaya düşən andakı (zərbədən əvvəlki) sürətinin tapırıq:

$$V = \sqrt{2gh}$$

Sonra həmin teoremə əsasən elastik kürənin zərbədən sonrakı u sürətini tapırıq:

$$u = \sqrt{2gh_1}$$

Burada h_1 kürənin zərbədən sonrakı qalxma hündürlüyüdür.



Şəkil 17.6

Onda k bərpaolunma əmsalı belə tapılır:

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{h_1/h}$$

Buradan

$$h_1 = hk^2$$

Bu qayda ilə kürənin ikinci, üçüncü və s. zərbələrindən sonrakı hərəkəti zamanı $h_2, h_3 \dots$ qalxma hündürlüklərini tapırıq:

$$h_2 = h_1 k^2 = hk^4, \quad h_3 = h_2 k^2 = hk^6, \dots$$

Kürənin birinci zərbədən başqa digər ardıcıl zərbələr zamanı getdiyi yolların (qalxıb düşmə hündürlüklərinin)

uyğun olaraq $2h_1$, $2h_2$, $2h_3$... bərabər olduğunu nəzərə alsaq, onun dayanana qədər getdiyi yol belə tapılır:

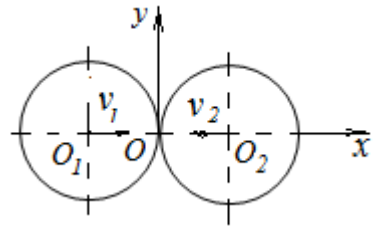
$$S=h+2(h_1+h_2+h_3+....)=h+2h(k^2+k^4+k^6+....)$$

Göründüyü kimi, bu ifadədə mötərizənin içərisindəki cəm, orta q vuruğu $q=k^2$ və birinci həddi $a_1=k^2$ olan sonsuz azalan həndəsi silsilədir. Onda həmin sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmini aşağıdakı kimi tapırıq:

$$S=h+2h \frac{a_1}{1-q} = h+2 \frac{hk^2}{1-k^2} = \frac{1+k^2}{1-k^2}h$$

Məsələ 17.8

Qarşı-qarşıya v_1 və v_2 sürətilə hərəkət edən 2eyni kürənin mütləq (tam) elastik zərbəsi baş verdikdə zərbədən sonrakı sürətləri nəyə bərabər olar (Şəkil 17.7).



Şəkil 17.7

Həlli.

Məsələnin şərtinə əsasən kürələrin zərbədən əvvəlki sürətlərinin v_1 sürəti istiqamətində (soldan sağa yönəlmiş) x oxu üzərindəki proyeksiyaları belə olar:

$$v_{1x} = v_1, \quad v_{2x} = -v_2.$$

Bütün sonrakı məsələlərin həllində x oxu v_1 sürəti istiqamətində soldan sağa doğru yönəlmişdir. Onda kürələrin zərbədən sonrakı u_1 və u_2 sürətlərinin x oxu üzərindəki proyeksiyalarının (17.7) ifadələrinə əsasən aşağıdakı kimi tapmaq olar:

$$u_{1x} = v_1 - (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} (v_1+v_2)$$

$$u_{2x} = -v_2 + (1+k) \frac{m_1}{m_1+m_2} (v_1+v_2)$$

Burada k - bərpa olunma əmsalıdır, m_1 və m_2 isə kürələrin kütlələridir.

Şərtə görə $m_1 = m_2 = m$, $k = 1$ (tam elastiki zərbə). Onda yuxarıdakı ifadələrdən tapırıq:

$$u_{1x} = v_1 - (1+1) \frac{m}{2m} (v_1+v_2) = -v_2$$

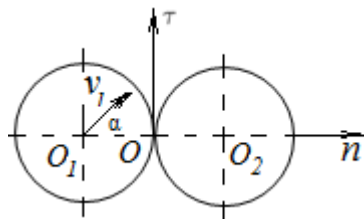
$$u_{2x} = -v_2 + (1+1) \frac{m}{2m} (v_1+v_2) = v_1$$

Deməli, kürələr zərbədən sonra öz sürətlərini dəyişirlər.

Məsələ 17.9

Kütləsi m_1 olan kürə v_1 sürəti ilə hərəkət edərək sükunətdə olan m_2 kütləli kürə ilə toqquşur. Zərbə vaxtı v_1 sürəti kürələrin mərkəzlərini birləşdirən xətlə α bucağı əmələ gətirir.

- 1) Zərbəni mütləq qeyri-elastik qəbul edərək, birinci kürənin zərbədən sonrakı sürətini tapmalı.



Şəkil 17.8

- 2) Zərbəni bərpa olunma əmsalı k olan qeyri tam elastik qəbul edərək, kürələrdən hər birinin zərbədən sonrakı sürətini tapmalı (Şəkil 17.8)

Həlli.

1) Əvvəlcə birinci və ikinci kürələrin v_1 və v_2 sürətlərinin $O_1 O_2$ mərkəzlər xətti üzrə yönəlmiş On normalı (x oxu) və kürələrin toxunduğu O nöqtəsindəki $O\tau$ toxunanı (y oxu) üzərindəki proyeksiyalarını tapırıq:
 $v_{1n}=v_1\cos\alpha$, $v_{1\tau}=v_1\sin\alpha$

$$v_{2n}=0, v_{2\tau}=0 \quad (17.25)$$

Zərbə nəzəriyyəsiindən məlumdur ki, mütləq hamar səthlərinə toxunan üzərindəki proyeksiyaları sabit qalır, çünki bu səthlər arasında sürtünmə qüvvələri yoxdur. Buna əsasən kürələrin sürətlərinin onların səthlərinə toxunan üzərindəki proyeksiyaları belə olar: $u_{1n}=v_{1\tau}=v_1\sin\alpha$, $u_{2\tau}=v_{2\tau}=0$

İndi birinci kürənin zərbədən sonrakı u_1 sürətinin On oxu üzərindəki u_{1n} proyeksiyasını (17.7) ifadəsinə əsasən $k=0$ olan həll üçün tapaq:

$$u_{1n}=v_{1n}-(1+k)\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_{1n}-v_{2n}) = v_1\cos\alpha - \frac{m_2}{m_1+m_2}v_1\cos\alpha = \frac{m_1v_1\cos\alpha}{m_1+m_2},$$

Onda birinci kürənin zərbədən sonrakı u_1 sürətinin qiyməti belə olar.

$$u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2} = \sqrt{v_1^2\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1v_1\cos\alpha}{m_1+m_2}\right)^2} = v_1\sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\cos^2\alpha}$$

2) Bu halda bərpa olunma əmsalı $k<1$ olduğu üçün birinci və ikinci kürənin zərbədən sonrakı u_1 və u_2

sürətlərinin On oxu üzərindəki u_{1n} və u_{2n} proyeksiyalarını yenə də (17.7) ifadəsindən tapırıq.

$$u_{2n} = v_{2n} + (1+k) \frac{m_1}{m_1+m_2} (v_{1n} - v_{2n}) = (1+k) \frac{m_1}{m_1+m_2} v_1 \cos \alpha$$

$$u_{1n} = v_{1n} - (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} (v_{1n} - v_{2n}) = \frac{m_1 - m_2 k}{m_1+m_2} v_1 \cos \alpha$$

Onda bu halda toqquşan kürələrin zərbədən sonrakı u_1 və u_2 sürətləri, v_1 və v_2 sürətlərin (17.25) ifadələrini nəzərə almaqla belə tapılar:

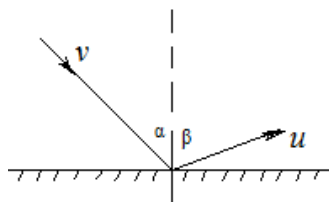
$$u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2} = \sqrt{v_1^2 \sin^2 \alpha + \left(\frac{m_1 - m_2 k}{m_1+m_2} \right)^2 v_1^2 \cos^2 \alpha} =$$

$$v_1 \sqrt{\sin^2 \alpha + \left(\frac{m_1 - m_2 k}{m_1+m_2} \right)^2 \cos^2 \alpha}$$

$$u_2 = \sqrt{u_{2\tau}^2 + u_{2n}^2} = \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1+m_2} \right)^2 (1+k)^2 v_1^2 \cos^2 \alpha + v_1^2 \frac{m_1(1+k) \cos \alpha}{m_1+m_2}} =$$

Məsələ 17.10

Polad kürə $\alpha=45^\circ$ bucaq altında üfuqi polad tava üzərinə düşür və şaquli $\beta=60^\circ$ bucaq təşkil edərək sıçrayır. Zərbədəki bərpaolunma əmsalını tapmalı (Şəkil 17.9).



Şəkil 17.9

Həlli.

Bərpaolunma əmsalını bilavasitə (17.5) ifadəsindən tapırıq:

$$k = \frac{tg\alpha}{tg\beta} = tg45^0 / tg60^0 = 0,58$$

Bu zərbə prosesində kürə və səth arasındakı zərbə sürtünmə qüvvəsini nəzərə alsaq, k bərpaolunma əmsalı (6) ifadəsindən belə tapılır:

$$k = \frac{tg\alpha - f}{tg\beta + f}.$$

Əgər zərbə sürüşmə sürtünmə əmsalı $f=0,1$ isə

$$k = tg45^0 - 0.1 / (tg60^0 + 0.1) = 0,491 \text{ olar.}$$

İndi $\alpha=45^0$, $f=0.1$ və $k=0.58$ qəbul etsək, β bucağı belə tapıla bilər:

$$tg\beta = \sin\alpha - f(k+) \cos\alpha / k \cos\alpha = \sin 45^0 - 0.1(1+0.58) \cos 45^0 / 0.58 - \cos 45^0 = 1,453$$

Buradan $\beta=55^0 30$ alınır.

Göründüyü kimi kürənin qeyri-ideal səthə vurulduğu zərbə zamanı β əks olunma bucağına nisbətən azalır.

Məsələ 17.11

Binanın bünövrəsi altındakı qırtu möhkəmləndirmək üçün kopyor vasitəsilə yerə kütləsi $m_2=50$ kq olan payalar vurulur. Kopyorun kütləsi $m_1=450$ kq olan çəklici $h=2$ m hündürlüyündən başlanğıc sürətsiz düşür. Axırncı $n=10$ zərbə nəticəsində paya $8=5$ sm yeridilmişdir; payaların vurulmasında qırtun orta müqavimətini tapmalı. Zərbəni qeyri-elastik hesab etməli.

Həlli.

Əvvəlcə kopyorun payaya vurduğu zərbədən əvvəlki v_1 sürətini aşağıdakı məlum dusturundan tapırıq: $v_1 = \sqrt{2gh}$.

Sonra kopyorun payaya vurduğu qeyri-elastik zərbə nəticəsində onların bu zərbədən sonrakı ümumi u sürətini tapırıq.

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \sqrt{2gh}}{m_1 + m_2},$$

Kopyor və payadan ibarət olan sistemin dayanana qədər getdiyi δ məsafəsində kinetik enerjinin dəyişməsi haqqındakı teoremdən istifadə edirik.

$$T - T_0 = A \quad (17.26)$$

Burada T_0 sistemin başlanğıc anda kinetik enerjisidir və belə tapılır.

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{10(m_1 + m_2)}{2} \cdot u^2 = \frac{10(m_1 + m_2)}{2} * m_1^2 * 2gh / (m_1 + m_2) \\ &= 10m_1^2 gh / (m_1 + m_2) \end{aligned} \quad (17.27)$$

A sistemə təsir edən $m_1 g$ və $m_2 g$ alırıq qüvvələri və qrunzun S müqavimət qüvvəsini δ məsafəsində gördüyü işlərin cəmidir və belə tapılır.

$$A = (m_1 g + m_2 g - s) \delta \quad (17.28)$$

Sistemin hərəkətinin sonundakı kinetik enerjisi sıfıra bərabərdir, yəni $T=0$. Onda (17.27) və (17.28) ifadələrini (17.26) tənliyində yerinə yazsaq alarıq:

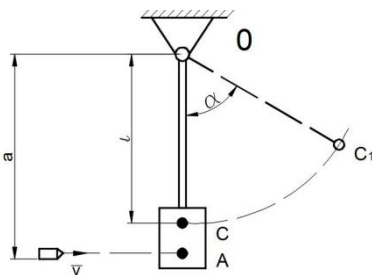
$$-10m_1^2gh/(m_1+m_2)=(m_1g+m_2g-s)\delta$$

Buradan quruntun S orta müqavimət qüvvəsini tapırıq

$$S=m_1g+m_2g+10m_1^2gh/\delta(m_1+m_2)=450.9,8+50.9,8+10.450^2.9,8.2/0.05(450+50)=1590 \text{ kN}$$

Məsələ 17.12

Mərminin sürətini təyin etmək üçün işlədilən ballistik rəqqas (Robin, 1742-ci il), üfqü O oxundan asılmış AB silindrindən ibarətdir. Silindr A tərəfindən açılıb qumla doldurulmuşdur. Silindrə daxil olan mərmə rəqqası O oxu ətrafında müəyyən bucaq qədər fırlandırır. Verilir: rəqqasın M kütləsi, $OC = h$ onun C ağırlıq mərkəzinin O -dan olan məsafəsi, O oxuna nəzərən ρ ətalət radiusu, mərminin m kütləsi, $OD = a$ zərbənin təsir xəttinin oxdan olan məsafəsi, α – rəqqasın meyl bucağıdır. Zərbənin rəqqasın oxuna təsir etmədiyini və $ah = \rho^2$ olduğunu nəzərə alaraq mərminin v sürətini tapmalı (Şəkil 17.10).



Şəkil 17.12

Həlli.

Ballistik rəqqas və mərmidən ibarət olan sistemin zərbə zamanı kinetik momentinin dəyişməsi haqqında teoremə əsasən yazırıq:

$$L_{1z} - L_{0z} = m_z(\bar{S}) = 0 \quad (17.29)$$

Burada sistemə təsir edən xarici zərbə impulslarının Oz oxuna nəzərən momentlərinin 0-a bərabər olduğu nəzərə alınmışdır. L_{0z} və L_{1z} - sistemin zərbədən əvvəl və sonrakı kinetik momentidir, $m_z(\bar{S})$ isə zərbə impulsunun Oz oxuna nəzərən momentidir.

$$L_{0z}=mva, L_{1z}= J_z\omega \quad (17.30)$$

Burada $J_z = ma^2 + M\rho^2$ - sistemin Oz oxuna nəzərən inersiya momentidir, ω isə sistemin zərbədən sonrakı bucaq sürətidir.

(17.30) ifadələrini (17.29)-də yerinə yazsaq, v sürəti ilə ω bucaq sürəti arasında aşağıdakı əlaqəni tapırıq:

$$v = \frac{(ma^2 + M\rho^2)\omega}{ma} \quad (17.31)$$

ω - nı tapmaq üçün sistemin tərpənməz Oz oxu ətrafında fırlanma hərəkəti zamanı kinetik enerjinin dəyişməsi haqqındakı teoremə əsasən yazırıq:

$$T_1 - T_0 = \sum A_i^e \quad (17.32)$$

Burada $T_0 = J_z\omega^2 = \frac{1}{2}(ma^2 + M\rho^2)\omega^2$ və $T_1 = 0$ sistemin zərbədən əvvəl və sonrakı kinetik enerjisidir, $\sum A_i^e = -(mg + Mg)(l - l\cos\alpha)$ – sistemə təsir edən Mg və mg ağırlıq qüvvələrinin onun müvazinət vəziyyətindən tərpənməz Oz onu ətrafında α bucağı qədər dönməsi zamanı gördüyü işlərin cəmidir.

Odur ki, (17.32) ifadəsini aşağıdakı kimi yazırıq:

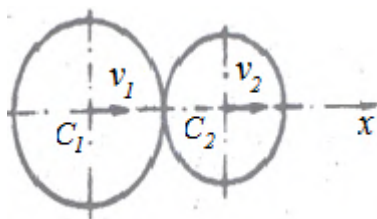
$$\frac{1}{2}(ma^2 + M\rho^2)\omega^2 = g(m + M)(l - l\cos\alpha)$$

Buradan ω -nı taparaq (17.31) – də yerinə yazıb və $ah = \rho^2$ olduğunu nəzərə alaraq mərminin v sürətini tapırıq:

$$v = \frac{2(ma + Mh)}{m} \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Məsələ 17.13

Kütlələri m_1 və m_2 olan iki kürə $\bar{v}_1$ və $\bar{v}_2$ ($\bar{v}_1 > \bar{v}_2$) sürəti ilə eyni tərəfə hərəkət edir. Bu kürələrin qarşılıqlı zərbəsi nəticəsində ikinci kürənin zərbədən sonrakı $\bar{u}_2$ sürəti iki dəfə artır. k bərpaolunma əmsalını və kürələrin kütlələrinin m_1/m_2 nisbətini tapmalı (Şəkil 17.11).



Şəkil 17.11

Həlli:

Məsələnin şərtinə görə kürələrin zərbədən əvvəlki $\bar{v}_1$ və $\bar{v}_2$ sürətlərinin və ikinci kürənin zərbədən sonrakı $\bar{u}_2$ sürətinin mərkəzlər xətti üzrə yönəlmiş x oxu üzərindəki proyeksiyaları belə olar:

$$v_{1x} = v_1, v_{2x} = v_2, u_{2x} = 2v_2$$

Bu qiymətləri (17.7) ifadələrində yerinə yazıb birinci kürənin zərbədən sonrakı sürətini tapırıq:

$$u_{1x} = v_1 - (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} (v_1 - v_2)$$

Bu qiymətləri (8) ifadəsində yerinə yazsaq, alırıq:

$$k = \frac{2v_2 - v_1}{v_1 - v_2} + (1+k) \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Buradan bərpaolunma əmsalını tapırıq:

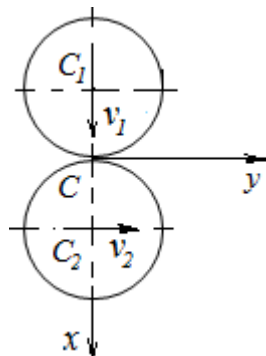
$$k = \frac{m_1(2v_2 - v_1) + m_2 v_2}{m_1(v_1 - v_2)}$$

Bərpaolunma əmsalı $0 < k < 1$ olduğu üçün bu ifadədən kürələrin kütlələri nisbətini tapırıq:

$$\frac{v_2}{v_1 - 2v_2} < \frac{m_1}{m_2} < \frac{v_1}{2v_1 - 3v_2}$$

Məsələ 17.14

Kütləsi m olan kürə $\bar{v}_0$ başlanğıc sürətilə üfüqlə α bucağı altında atılır. Ən böyük hündürlükdə $v = \frac{v_0}{2}$ sürətilə aşağı hərəkət edən eyni kütləli kürə ilə toqquşur. Bərpaolunma əmsalı k -dir. t zamanından sonra kürələr arasındakı d məsafəsini tapmalı (Şəkil 17.12).



Şəkil 17.12

Həlli.

Şərtə görə zərbəyə məruz qalan ikinci kürənin ən yuxarı vəziyyətində əvvəlki $\bar{v}_2$ sürətinin şəkildə göstərilmiş x və y oxları üzərindəki proyeksiyaları

$$v_{2y} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{2x} = 0.$$

Zərbə vuran birinci kürənin zərbədən əvvəlki $\vec{v}_1$ sürətinin həmin oxlar üzərindəki proyeksiyaları belə olacaqdır:

$$v_{1x} = \frac{v_0}{2}, \quad v_{1y} = 0.$$

Bu qiymətləri (17.7) ifadələrində yerinə yazıb birinci və ikinci kürələrin zərbədən sonrakı $\vec{u}_1$ və $\vec{u}_2$ sürətlərinin x və y oxları üzərindəki proyeksiyalarını tapırıq :

$$u_{1x} = \frac{v_0}{2} - (1+k) \frac{m}{2m} \cdot \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{2} [1 - (1+k) \frac{1}{2}] = \frac{v_0}{4} (1-k)$$

$$u_{2x} = 0 + (1+k) \frac{m}{2m} \cdot \frac{v_0}{2} = \frac{1+k}{4} v_0$$

Kürələrin zərbədən sonrakı sürətlərinin y oxu üzərindəki proyeksiyaları isə onların səthləri arasında sürtünmə olmadığı üçün sabit qalır. Odur ki,

$$u_{1y} = 0, \quad u_{2y} = v_{2x} = v_0 \cos \alpha$$

Onda kürələrin zərbədən sonrakı hərəkət tənlikləri belə olar:

$$x_1 = u_{1x} t + \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0}{2} (1-k) t + \frac{gt^2}{2}, \quad y_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1+k}{4} \cdot v_0 t + \frac{gt^2}{2}, \quad y_2 = v_0 \cos \alpha t$$

Kürələrin t zaman fasiləsindən sonra aralarındakı məsafəsi aşağıdakı ifadədən tapıla bilər:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{v_0}{2} t \sqrt{k^2 + 4 \cos^2 \alpha}$$

Məsələ 17.15

n sayda mütləq elastik kürələr sıra ilə düzülmüşdür. Birinci kürənin kütləsi M , hər sonrakı kürənin kütləsi əvvəlkindən m dəfə kiçikdir. Birinci kürə $\bar{v}_0$ sürətilə hərəkət edən eyni kütləli cisimdən zərbə alır. Sonuncu kürənin sürətini tapın.

Həlli:

Zərbə mütləq elastiki olduğundan $k=1$. Onda zərbə prosesində sürəti sıfır olan birinci kürənin zərbədən sonrakı u_1 sürəti (17.7) ifadəsindən belə tapılır:

$$u_1 = 0 + (1+1) \cdot \frac{M}{2M} v_0 = v_0$$

Bu sürətdə birinci kürə sürəti $v_2=0$ olan ikinci kürəyə zərbə vurur. Bu zərbə nəticəsində ikinci kürənin zərbədən sonrakı sürətini yenə (17.7) ifadəsindən tapırıq.

$$u_2 = 0 + (1+1) \frac{M_1}{M_1+M_2} \cdot v_0 = \frac{2v_0}{1+\frac{1}{m}}$$

Bu sürətlə ikinci kürə sürəti $\bar{v}_3$ olan üçüncü kürəyə zərbə vurur. Bunun nəticəsində üçüncü kürəni zərbədən sonrakı sürəti belə tapılır:

$$u_3 = 0 + 2 \frac{M_2}{M_2+M_3} \cdot \frac{2v_0}{1+\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{(1+m)} = \frac{4v_0}{(1+\frac{1}{m})^2}$$

Eyni qayda ilə dördüncü, beşinci və s. kürələrin zərbədən sonrakı sürətlərini tapırıq:

$$u_4 = 0 + 2 \frac{M_3}{M_3+M_4} \cdot \frac{4v_0}{(1+\frac{1}{m})^2} = \frac{8v_0}{(1+\frac{1}{m})^2} = \frac{8v_0 m^3}{(1+m)^3}$$

$$u_5 = 2^4 v_0 \left(\frac{m}{1+m} \right)^4$$

Beləliklə, sonuncu n -ci kürənin zərbədən sonrakı sürəti belə tapıla bilər:

$$u_n = 2^{n-1} \left(\frac{m}{m+1} \right)^{n-1} v_0$$

Məsələ 17.16

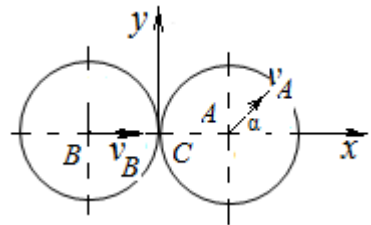
Eyni kütləli A və B kürələri toqquşur. B kürəsinin v_B sürəti mərkəzi xətt üzrə yönəlir. A kürəsinin sürəti isə bu xətlə α bucağı əmələ gətirir: $v_A = v_B = a$ –dır. Bərpa əmsalı k olduqda zərbədən sonra hər iki kürənin sürətini tapmalı (Şəkil 17.13)

Həlli:

Şərtə görə zərbənin başlanğıcında kürələrin sürətləri $v_A = v_B = a$ –dır.

Zərbədən sonra kürələrin sürətlərinə uyğun olaraq u_A və u_B ilə işarə edək.

Məsələnin şərtinə görə kürələrin zərbədən əvvəlki sürətlərinin şəkildə göstərilmiş x və y oxları üzərindəki proyeksiyaları belə olar:



Şəkil 17.13

$$v_{Ax} = v_A \cos \alpha, \quad v_{Bx} = v_B, \quad v_{Ay} = v_A \sin \alpha$$

Kürələrin zərbədən sonakı sürətlərinin x oxu üzərindəki proyeksiyalarını (17.7) ifadələrindən tapırıq:

$$u_{Bx} = v_{Bx} - (1+k) \frac{m_A}{m_A + m_B} (v_{Bx} - v_{Ax}) = v_B - \frac{1+k}{2} (v_B - v_A \cos \alpha) = \frac{a}{2} [1 - k + (1+k) \cos \alpha] \quad (17.33)$$

$$u_{Ax} = v_{Ax} - (1+k) \frac{m_A}{m_A + m_B} (v_{Bx} - v_{Ax}) = v_A \cos \alpha + \frac{1+k}{2} (v_B - v_A \cos \alpha) = \frac{a}{2} [(1-k) \cos \alpha + 1 + k] \quad (17.34)$$

Kürələrin zərbədən sonrakı sürətlərinin y oxu üzərindəki proyeksiyaları zərbədən əvvəlki sürətlərinin həmin ox üzərindəki proyeksiyalarına bərabərdir, çünki zərbə prosesində sürtünmə qüvvəsi nəzərə alınmır. Buna əsasən yazırıq:

$$\begin{cases} u_{By} = V_{By} = 0 \\ u_{Ay} = V_{Ay} = V_A \sin \alpha \end{cases} \quad (17.35)$$

Onda kürələrin zərbədən sonrakı sürətlərinin qiymətləri belə tapılar:

$$u_A = \sqrt{u_{Ax}^2 + u_{Ay}^2}, \quad u_B = \sqrt{u_{Bx}^2 + u_{By}^2}$$

Burada (17.33), (17.34) və (17.35) ifadələrini yerinə yazsaq, alarıq:

$$u_A = \frac{a}{2} \sqrt{[(1-k) \cos \alpha + 1 + k]^2 + 4 \sin^2 \alpha}$$

$$u_B = \frac{a}{2} [(1-k) + (1+k) \cos \alpha]$$

MATERALLAR MÜQAVİMƏTİ

XVIII Fəsil. Sadə deformasiyalar. Əsas anlayışlar.

Materiallar müqavimətində konstruksiya elementlərinin möhkəmlik, sərtlilik və dayanıqlıq məsələləri öyrənilir.

Avropa təhsil məkanında bu fənn Elastostatika (Elastostatics) adlanır. Məlumdur ki, Statikada mütləq bərk cisimlərin müvazinəti öyrənilir. Materiallar müqavimətində isə cisimlərin müvazinət halı onların elastiklik xassələri nəzərə alınaraq öyrənilir. Başqa sözlə burada baxılan cisimlərin deformasiya olunma qabiliyyəti nəzərə alınır. Xarici qüvvələrin təsiri altında cismin öz forma və ölçülərini dəyişməsinə deformasiya deyilir.

Möhkəmlik - xarici qüvvələrin təsiri altında konstruksiya elementinin dağılmaya qarşı göstərdiyi müqavimət xassəsidir. Sərtlilik - xarici qüvvələrin təsiri altında konstruksiya elementinin deformasiya olunmağa qarşı göstərdiyi müqavimət xassəsinə xarakterizə edir. Dayanıqlıq isə xarici qüvvələrin təsiri altında konstruksiya elementinin öz ilkin müvazinət halını saxlaması xassəsidir.

Konstruksiya elementləri müəyyən funksiyaları yerinə yetirərkən etibarlığa malik olmalıdırlar. Etibarlıq – konstruksiya elementinin istismar zamanı öz möhkəmlik, sərtlilik və dayanıqlığını saxlaması xassəsinə deyilir. Eyni zamanda praktikada konstruksiya elementinin materialına qənaət edilməlidir. Lakin, etibarlılıq və materiala qənaət bir-birinə zidd olan tələblərdir. Odur ki, maşın hissələri yaradılarkən hər iki tələb optimal nəzərə alınaraq mühəndis hesablatları düzgün aparılmalıdır.

Materiallar müqaviməti fənnində qəbul edilən əsas hipotezlər və sadələşdirmələr:

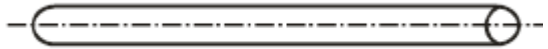
1. Konstruksiya elementinin materialı bircins və kəsilməzdir (bütövdür). Burada materialın mikroquruluşu nəzərə alınmır. Qeyd edək ki, son dövrlər öz təsdiqini tapan və inkişaf edən Nanomexanika elmində bu hipotezdən imtina edilir.
2. Material izotrop qəbul edilir. Yəni bütün istiqamətlərdə materialın mexaniki xassələri dəyişməz qəbul edilir. Müxtəlif istiqamətlərdə xassələri dəyişən materiallara (ağac materialı və s.) anizotrop materiallar deyilir. Bir çox metallar, məsələn, polad izotrop materiallar kimi qəbul edilə bilər.
3. Materialın istənilən nöqtəsindəki deformasiya həmin nöqtədəki gərginliklə düz mütənasibdir. Burada qüvvələrin təsirinin bir-birindən asılı olmaması prinsipi qəbul edilir.
4. Material mütləq elastik qəbul edilir. Başqa sözlə, xarici yük götürüldükdən sonra cisim öz əvvəlki ölçülərini tam bərpa edir.
5. Cismin en kəsiklərində təsir edən qüvvələr onlara statik ekvivalent olan qüvvələr sistemi (baş vektor və baş moment) ilə əvəz edilə bilər.
6. Cismin en kəsiyi deformasiyadan əvvəl və sonra öz müstəvi formasını saxlayır. Buna Bernulli hipotezi deyilir.

Hesabat sxemi

Verilmiş şəraitdə əhəmiyyətsiz xüsusiyyətləri nəzərdən atılan konstruksiyanın sadələşdirilmiş sxeminə onun hesabat sxemi deyilir. Hesabat sxemini seçərkən cismin real həndəsi forması sadələşdirilir. Materiallar müqavimətində əsasən mil (brus), qabıq (lövhə) və massiv kimi sadələşdirilmiş sxemlərdən istifadə edilir (Şək.18.1, 18.2, 18.3).

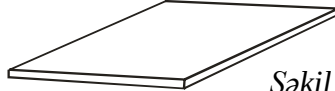
Məlumdur ki, fəzada cisim üç ölçüsü ilə müəyyən edilir. Mil bir ölçüsü digər ikisindən əhəmiyyətli dərəcədə böyük olan konstruksiya elementidir. Qabığın (lövhənin) iki ölçüsü digər bir ölçüsündən əhəmiyyətli dərəcədə böyük olur. Bütün istiqamətlərdəki ölçüləri eyni tərtibdə olan cismə massiv cisim deyilir. Materiallar müqavimətində öyrənilən cisimlər aşağıdakılardır:

1) Mil (Brus)



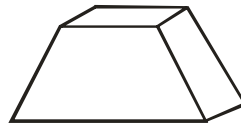
Şəkil18.1

2) Qabıq (lövhə)



Şəkil 18.2

3) Massiv cisim

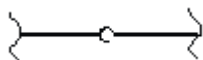


Şəkil 18.3

Materiallar müqavimətində tətbiq olunan rabitələr və dayaqlar

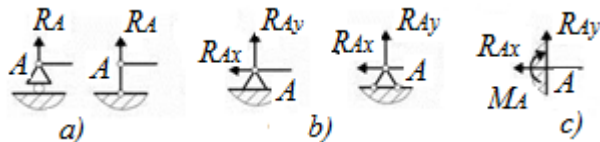
Konstruksiya elementlərini bir-birinə birləşdirmək və onların hərəkətini məhdudlaşdırmaq üçün aşağıdakı dayaqlardan və rabitələrdən istifadə olunur.

Sadə oynaq iki həssəni birləşdirmək üçün istifadə edilir (Şək. 18.4).



Şəkil 18.4

Dayaq rabitələri üç yerə bölünür: hərəkətli oynaq (Şək.18.5a), hərəkətsiz oynaq (Şək.18.5b), sərt bağlanmış dayaq (Şək.18.5c).



Şəkil 18.5

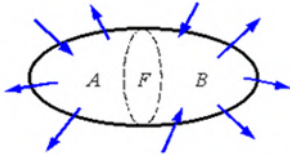
Daxili və xarici qüvvələr. Kəsmə üsulu

Cismə kənar cisimlərin etdiyi təsir qüvvələrinə xarici qüvvələr deyilir. Statikadan məlum olan aktiv qüvvələr və rabitələrin reaksiya qüvvələri xarici qüvvələrə aiddir.

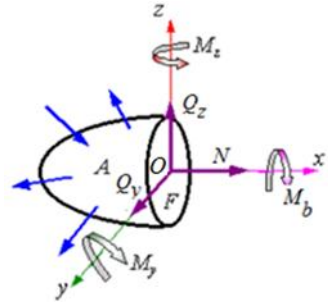
Cismin hissəciklərinin bir-birinə etdikləri təsir qüvvələrinə daxili qüvvələr deyilir. Daxili qüvvələri təyin etmək üçün kəsmə üsulundan istifadə edilir. Bunun üçün müvazinətdə olan mil onun oxuna perpendikulyar müstəvi ilə kəsilir və

iki hissəyə bölünür. Bu kəsiyə milin en kəsiyi deyilir. Milin en kəsiyində yaranan daxili qüvvələr kəsikdən bir hissədə ona təsir edən xarici qüvvələrlə müvazinətləşir.

Fərz edək ki, şəkildə göstərilən cisim (mil) $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, xarici qüvvələrin təsiri altında müvazinətdədir (Şək. 18.6). Cismin F kəsiyində ixtiyari paylanmış daxili qüvvələri statikadan bildiyimiz ixtiyari qüvvələr sisteminin verilmiş mərkəzə gətirilməsi üsulundan istifadə edərək en kəsiyin O mərkəzinə gətiririk. Bu mərkəzdə həmin qüvvələrin R baş vektoruna bərabər olan bir qüvvə və momenti qüvvələrin O mərkəzinə nəzərən M_O baş momentinə bərabər olan bir cüt alınır. R və M_O vektorlarının x, y və z koordinat oxları istiqamətindəki altı toplananlarına ayıraraq: $N, Q_x, Q_y, M_b, M_x, M_y$ (Şək.18.7).



Şəkil 18.6



Şəkil 18.7

Burada N - normal qüvvə, Q_x və Q_y – kəsici qüvvələr, M_b – burucu moment, M_x və M_y – x və y oxlarına nəzərən əyici momentlər adlanır.

Daxili qüvvələrin təsirindən mil müəyyən deformasiyaya uğrayır. Göstərilən daxili qüvvələrdən yalnız biri təsir etdikdə mildə yaranan deformasiya sadə deformasiya, iki və

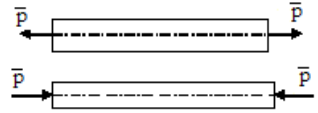
daha çox daxili qüvvənin təsiri altında baş verən deformasiya isə mürəkkəb deformasiya adlanır. Başqa sözlə mürəkkəb deformasiya bir neçə sadə deformasiyanın kombinasiyasından ibarətdir.

Praktiki məsələlərin həlli zamanı daxili qüvvələrin milin oxu boyunca paylanması diaqramından, başqa sözlə daxili qüvvələrin epüründən geniş istifadə edilir. Epür vasitəsilə hansı kəsikdə maksimum daxili qüvvənin təsir etdiyi müəyyən edilir. Maksimum normal qüvvənin təsir etdiyi kəsiyə təhlükəli kəsik deyilir.

Deformasiyanın növləri

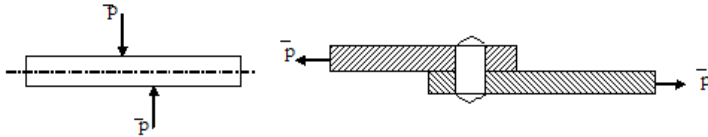
Daxili qüvvələrin təsiri altında milin deformasiyalarının aşağıdakı 4 növü vardır: dartılma və ya sıxılma, sürüşmə, burulma və əyilmə.

1. Milin daxilində yaranan normal qüvvənin təsiri altında mil dartılma və ya sıxılma deformasiyasına məruz qalır (Şək.18.8)



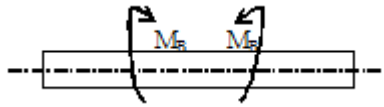
Şəkil 18.8

2. Kəsici qüvvənin təsiri altında mil sürüşmə deformasiyasına uğrayır (Şək.18.9).



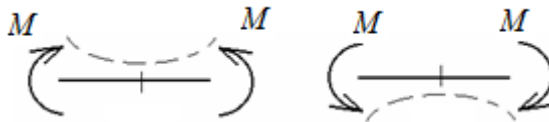
Şəkil 18.9

3. Burulma deformasiyası milin en kəsiklərində yalnız burucu moment təsir etdikdə yaranır (Şək. 18.10).



Şəkil 18.10

4. En kəsiklərində yalnız əyici moment (M_y , M_z və yaxud M_{ϕ}) təsir edən milin aldığı deformasiyaya xalis əyilmə deyilir (Şək.18.11).



Şəkil 18.11

Qeyd edək ki, bu deformasiyalar sadə deformasiyalardır. Eyni zamanda bir neçə sadə deformasiyaya məruz qalan konstruksiya elementində yaranan deformasiyaya mürəkkəb deformasiya deyilir.

Gərginlik

Praktikada konstruksiyaların möhkəmliyi daxili qüvvələrin qiymətləri ilə deyil onların intensivliyi ilə xarakterizə olunur. Konstruksiya elementlərinin daxili qüvvələrinin intensivliyinə, başqa sözlə vahid sahəyə düşən daxili qüvvəyə gərginlik deyilir.

Konstruksiya elementinin (milin) elementar en kəsik sahəsini ΔF və bu sahəyə düşən daxili qüvvəni ΔR ilə işarə

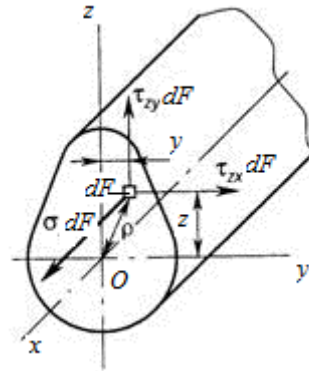
etsək, onda tam gərginliyin orta qiymətini aşağıdakı kimi tapa bilərik:

$$p_{or} = \frac{\Delta R}{\Delta F} \quad (18.1)$$

Milin en kəsiyin ixtiyari nöqtəsindəki tam gərginlik isə aşağıdakı kimi tapılır:

$$p = \frac{dR}{dF} \quad (18.2)$$

Deməli, milin daxilində yaranan tam gərginlik burada təsir edən daxili qüvvənin en kəsiyin sahəsinə nəzərən törəməsinə bərabərdir. Gərginliyin BS sistemində vahidi Paskaldır ($1\text{Pa} = 1\text{ N/m}^2$).



Şəkil 18..12

Şəkildən göründüyü kimi tam gərginliyin iki toplananı vardır: σ normal və τ toxunan gərginliklər (Şək.18.12). Tam gərginliyin normal ox istiqamətindəki toplananına σ normal gərginlik, milin en kəsiyi üzərində yerləşən τ toplananına isə toxunan gərginlik deyilir. Normal və toxunan gərginlikləri aşağıdakı kimi tapırıq:

$$\sigma = \frac{dN}{dF} \quad (18.3)$$

$$\tau = \frac{dQ}{dF} \quad (18.4)$$

Tam gərginliklə onun toplananları arasında aşağıdakı əlaqə vardır:

$$P = \sqrt{\sigma^2 + \tau_{xx}^2 + \tau_{xy}^2} \quad (18.5)$$

Milin en kəsiklərində yaranan daxili qüvvələr gərginliklərdən asılı olaraq aşağıdakı kimi tapılır:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_A \sigma_x dA; \quad Q_x = \int_A \tau_{xx} dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{xy} dA; \\ M_x &= \int_A (\tau_{xx} y - \tau_{xy} x) dA; \quad M_x = \int_A \sigma_x y dA; \quad M_y = \int_A \sigma_x x dA \end{aligned} \quad (18.6)$$

18.1. Düz oxlu milin dartılma və sıxılma deformasiyası

Milin en kəsiklərinə yalnız normal qüvvələr təsir etdikdə mil dartılma və sıxılma deformasiyasına məruz qalır. Qeyd etdiyimiz kimi normal qüvvənin təsiri altında milin en kəsiyində $\sigma = \frac{dN}{dF}$ normal gərginlik yaranır. Normal qüvvənin və normal gərginliyin milin oxu boyunca paylanması ifadə edən diaqram normal qüvvə və normal gərginlik diaqramı və ya epürü deyilir. Normal qüvvə milin kəsikdən bir tərəfdə qalan hissəsində təsir edən xarici boyuna qüvvələrin cəbri cəminə bərabərdir, yəni

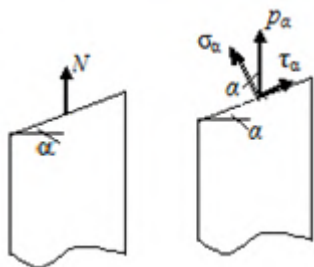
$$N = \sum F_{ix}.$$

Milin en kəsik sahələri və təsir edən normal qüvvələr sabit olduqda bu ifadəni aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad (18.7)$$

İndi şəkildə göstərilən milin maili kəsiklərində yaranan normal və toxunan gərginlikləri tapaq.

Milin oxa perpendikulyar kəsiyinin sahəsini F ilə, α bucağı altında olan maili kəsiyin sahəsini isə F_α ilə işarə etsək, Şəkil 13-dən yazı bilərik:



Şəkil 18.13

$$F_\alpha = \frac{F}{\cos \alpha} \quad (18.8)$$

Onda maili kəsikdə yaranan P_α tam gərginlik aşağıdakı kimi tapılır.

$$P_\alpha = \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N}{F} \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \quad (18.9)$$

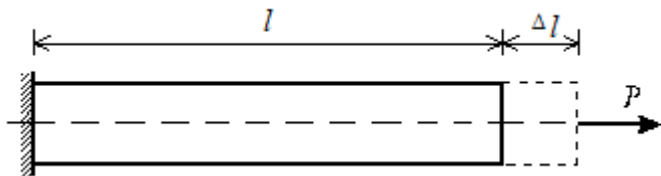
Şəkildən maili kəsikdəki normal və toxunan gərginlikləri tapırıq:

$$\sigma_\alpha = P_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha \quad (18.10)$$

$$\tau_\alpha = P_\alpha \cdot \sin \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sin 2\alpha \quad (18.11)$$

Dartılma və sıxılda boyuna və eninə deformasiyalar

Əvvəlcə Şəkil 14-də göstərilən milin (brusun) P oxboyu təsir edən qüvvənin təsiri altında boyuna (uzununa) deformasiyasına baxaq.



Şəkil 18.14

Milin başlanğıc uzunluğunu l , dartılmadan sonrakı uzunluğunu isə l_1 ilə işarə edək. Bu zaman milin Δl deformasiyasına (dartılmasına) onun mütləq uzanması deyilir.

$$\Delta l = l_1 - l \quad (18.12)$$

Mütləq uzanmanın milin başlanğıc uzunluğuna nisbətində nisbi uzanma və ya nisbi deformasiya deyilir və ε ilə işarə edilir:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (18.13)$$

Milin en kəsiklərində yaranan σ normal gərginlik onun nisbi ε uzanması ilə düz mütənasibdir.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (18.14)$$

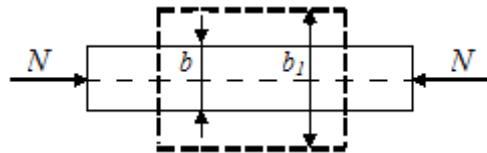
Burada E - elastiklik modulu və ya Yunq modulu adlanır. Elastiklik modulu materialın əsas mexaniki xassələrini xarakterizə edən kəmiyyətlərdən biri olub təcrübi yolla tapılır. Məsələn, polad üçün $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, mis üçün $E = 1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, alüminium üçün $E = 0,7 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.

(18.14) ifadəsinə dartılma və sıxılmada Huk qanunu deyilir. $\sigma = \frac{N}{F}$ və $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ifadələrini (18.14) ifadəsində yerinə yazsaq milin mütləq uzanmasının ifadəsini alırıq:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F} \quad (18.15)$$

Qeyd edək ki, normal qüvvənin təsiri altında mildə eninə deformasiya baş verir. Şəkildən görüldüyü kimi dartılma zamanı milin en kəşik ölçüləri azalır, sıxılma zamanı isə artır.

Sıxıcı qüvvənin təsiri altında şəkildə göstərilən milin en kəşik ölçüləri dəyişir. Onun b başlanğıc ölçüsünün qiymətini dəyişərək b_1 olur (Şək.15). Deformasiyadan sonrakı en kəşik ölçüsü ilə deformasiyadan əvvəlki en kəşik ölçüsünün fərqinə milin mütləq eninə deformasiyası deyilir və Δb ilə işarə edilir:



Şəkil 18.15

$$\Delta b = b_1 - b \quad (18.16)$$

Mütləq eninə deformasiyanın milin deformasiyasından əvvəlki b en kəsik ölçüsünə nisbətində nisbi eninə deformasiya deyilir və ε' ilə işarə edilir:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} \quad (18.17)$$

Qeyd edək ki, ε' eninə və ε boyuna nisbi deformasiyaları arasında aşağıdakı xətti asılılıq var.

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon \quad (18.18)$$

Burada μ əmsalı materialın əsas mexaniki xassələrindən biri olub Puasson əmsalı adlanır.

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (18.19)$$

Hər bir material üçün μ əmsalının qiyməti sınaq vasitəsilə tapılır, $\mu = 0 \dots 0,5$. Məsələn, mütləq bərk cisim üçün $\mu = 0$, polad üçün $\mu = 0,3$, rezin üçün $\mu = 0,5$ - dir.

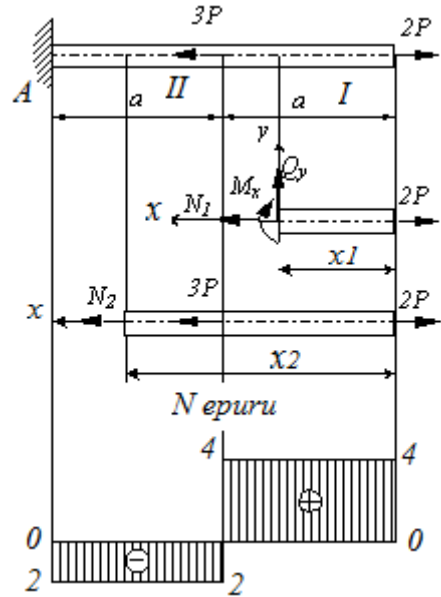
Aşağıdakı məsələlərin həllinə baxaq.

Məsələ 18.1

Sabit en kəsikli milin oxu boyunca tətbiq olunmuş $2P$ və $3P$ qüvvələrinin təsirindən yaranan normal qüvvələrin epürünü qurmalı. $P = 2$ kN (Şək. 18.16).

Həlli.

Mili qüvvələrin tətbiq olunduğu nöqtələrdən iki məntəqəyə ayıraq. Koordinat başlanğıcını sağ kənar nöqtədə götürüb x oxunu sola doğru yönəldək. Kəsmə üsulundan istifadə edib ardıcıl olaraq sol hissəni ataraq kəsikdəki daxili qüvvələri N , Q_y , M_x göstərək. Müvazinət tənliklərindən istifadə edərək daxili qüvvələri tapırıq.



Şəkil 18.16

I məntəqə: $0 \leq x_1 \leq a$.

$$\sum F_{ix} = 0, N_1 = 2P = 4 \text{ kN},$$

$$\sum F_{iy} = Q = 0, \sum m_z(F_i) = M_{ay} = 0.$$

Göründüyü kimi milin dartılma və sıxılması zamanı en kəsiklərdə daxili qüvvələrdən yalnız N normal qüvvə əmələ gəlir.

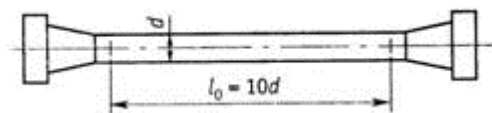
II məntəqə: $a \leq x_2 \leq 2a$,

$$N_2 = 2P - 3P = -P = -2 \text{ kN}.$$

Alınan nəticələr şəkildə normal qüvvə epürü (diaqramı) şəklində göstərilmişdir.

Düz oxlu milin dartılma və sıxılma diaqramı

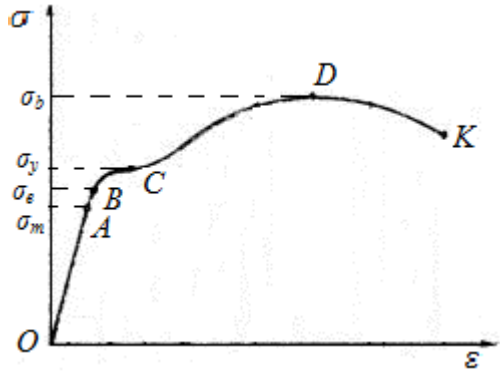
Materialın mexaniki xassələrini (möhkənlilik, sərtlilik, elastiklik modulu, Puasson əmsalı və s.) öyrənmək üçün xüsusi sınaq maşınında həmin material deformasiyaya uğradılır. Bunun üçün həmin materialdan xüsusi sınaq nümunəsi hazırlanır (Şək. 18.17). Bu nümunə dairəvi en kəsiyə malik olub, onun l uzunluğu en kəsiyinin d diametrindən 10 dəfə böyük olur. Xüsusi sınaq maşınında (presdə) həmin nümunə dartılmaya məruz qalır.



Şəkil 18.17

Dartılma zamanı sınaq maşınının ekranında dartılma diaqramı çəkilir. Bu diaqramın absis oxunda ε nisbi uzanma, ordinat oxunda isə σ normal gərginliklər qeyd edilir (Şək.18.18). Diaqramın OA düzxətli hissəsi gərginliklə deformasiyanın xətti mütənasibliyinə, yəni Huk qanununa uyğun gəlir. Həmin düzxətli məntəqənin son A nöqtəsi gərginliyin σ_m mütənasiblik həddi (proportional limit) adlanır.

B nöqtəsi materialın σ_e elastiklik həddinə uyğun gəlir. Mütənasiblik həddi ilə elastiklik həddi bir-birinə çox yaxındır. Odur ki, praktiki hesablar zamanı mütənasiblik həddindən istifadə edilir.



Şəkil 18.18

Diagramda BC məntəqəsi təqribən absis oxuna paralel olur. Bu o deməkdir ki, bu hissədə gərginliyin cüzi artımı ilə nümunə uzanmaya məruz qalır. Buna materialın axıcılıq xassəsi və həmin BC məntəqəsinə axma sahəsi deyilir. C nöqtəsinə uyğun olan gərginliyə σ_y axıcılıq həddi (yield limit) deyilir. Nümunənin sonrakı CD məntəsindəki uzanması yenidən normal gərginliyin artması ilə müşayiət olunur. Diagramın bu hissəsinə möhkəmlənmə zonası deyilir. D nöqtəsinə materialın σ_b möhkəmlik həddi (strength limit) deyilir. D nöqtəsindən sonra material dağılmağa başlayır, DK məntəqəsində gərginliyin sonrakı artımı zamanı nümunənin müəyyən bir nöqtəsində yenidən üzülmə baş verir, burada boyuncuq yaranır və nəhayət K nöqtəsində material dağılır.

Dartılma və sıxılmada möhkəmlik hesabları

Dartılma və sıxılmada milin normal iş rejmini təmin etmək üçün onun daxilində yaranan normal gərginliklər müəyyən hədd daxilində olmalıdır. Başqa sözlə milin möhkəmliyini təmin etmək üçün onun daxilində yaranan maksimum normal gərginlik bu milin materialı üçün nəzərdə tutulan buraxıla bilən gərginlikdən az olmalıdır. Yəni

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \quad (18.20)$$

Bu ifadəyə dartılma və sıxılmada möhkəmlik şərti deyilir. Burada $[\sigma]$ buraxıla bilən gərginlikdir. Buraxıla bilən gərginlik möhkəmlik həddinə (σ_B) əsasən qəbul edilir.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n} \quad (18.21)$$

Burada n ehtiyat əmsəlidir və vahiddən böyükdür, $n = 2,5 \dots 5$.

Qeyd edək ki, möhkəmlik hesabları bəzən en kəsik sahəsinə əsasən aparılır. Belə ki, $\sigma_{max} = \frac{N}{F}$ olduğunu nəzərə alsaq konstruksiya elementinin en kəsik sahəsi üçün aşağıdakı şərti yaza bilərik:

$$F_{max} \geq \frac{N}{[\sigma]} \quad (18.22)$$

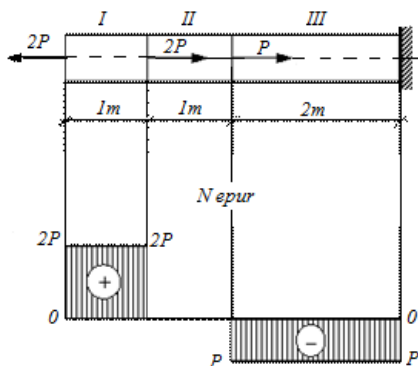
Bu ifadəyə dartılma və sıxılmada sərtlik şərti deyilir.

Məsələ 18.2

Milin yükləyiciliyi və mütləq uzanmasını tapmalı.

Verilir:

$[\sigma]=160$ MPa, $F=12\text{sm}^2$, $E=2,1\cdot 10^{11}$ MPa
(Şək.18.19).



Şəkil 18.19

Həlli.

Milin yükləyiciliyi və mütləq uzanmasını onun dağılmadan qəbul edə biləcəyi yüklə deyilir.

Mili üç hissəyə bölmək və hər hissədə daxili normal qüvvəni aşağıdakı kimi tapmaq:

$$N_1=2P, N_2=2P - 2P=0, N_3=2P - 2P + P = P.$$

Şəkində milin hesabat sxeminə əsasən normal qüvvə epürünü quraq. Möhkəmlik şərtinə əsasən yazırıq:

$$\sigma_{\max}=N_{\max}/F \leq [\sigma] = 160 \text{ MPa}$$

Epürə əsasən $N_{\max}= 2P$, onda $2P/F=[\sigma]$ alırıq. Buradan milin yükləyiciliyi və mütləq uzanmasını tapırıq:

$$P=F [\sigma]/2=160\cdot 10^3\cdot 12\cdot 10^{-4}/2 = 96\text{kN}.$$

Milin mütləq uzanmasını tapmaq üçün onu üç hissəyə bölək. Onda Δl aşağıdakı kimi tapılır:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3,$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F} + \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F}$$

Burada N_1, N_2, N_3 - uyğun məntəqələrdəki normal qüvvələr; l_1, l_2, l_3 - uyğun məntəqələrin uzunluğu; E - milin materialının elastiklik modulu; F - milin en kəsik sahəsidir.

$$\Delta l = \frac{l}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} (2P \cdot l + 0 \cdot l - P \cdot 2) = 0.$$

Burada $N_1 = 2P, N_2 = 0, N_3 = -P, l_1 = l_2 = 1m, l_3 = 2m$.

Məsələ 18.3

Çuqun milin möhkəmlik hesabətını aparmalı. Dartılmada buraxıla bilən gərginlik $[\sigma]_d = 150 \text{ MPa}$, sıxılmada buraxıla bilən gərginlik $[\sigma]_s = 650 \text{ MPa}$, $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 16 \text{ kN}$, buraxılabilən ehtiyat əmsalı $[n] = 4$, $F_1 = 80 \text{ mm}^2$, $F_2 = 150 \text{ mm}^2$ (Şək.18.20).

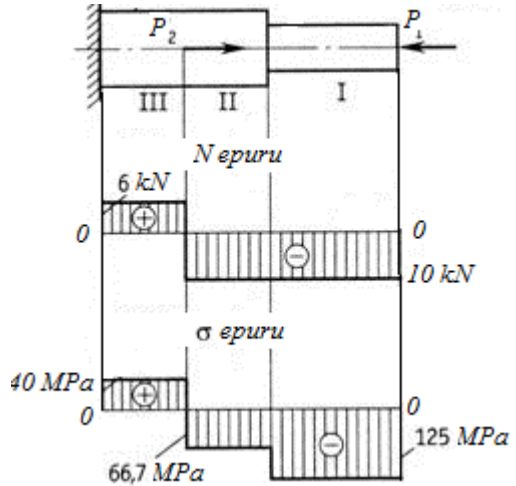
Həlli.

Milin en kəsiklərindəki N normal qüvvə və σ normal gərginlik epürlərini quraq.

Mili üç hissəyə ayıraq. Şəkildən görüldüyü kimi $N_1 = N_2 = -P_1 = -10 \text{ kN}$, $N_3 = P_2 - P_1 = 6 \text{ kN}$.

Milin I, II, III məntəqələrindəki gərginlikləri tapaq:

$$\sigma_1 = N_1 / F_1 = -10 \cdot 10^3 / 80 \cdot 10^{-6} = -125 \text{ MPa},$$



Şəkil 18.20

$$\sigma_2 = N_2 / F_2 = -10 \cdot 10^3 / 150 \cdot 10^{-6} = -66,7 \text{ MPa},$$

$$\sigma_3 = N_3 / F_3 = 6 \cdot 10^3 / 150 \cdot 10^{-6} = 40 \text{ MPa}.$$

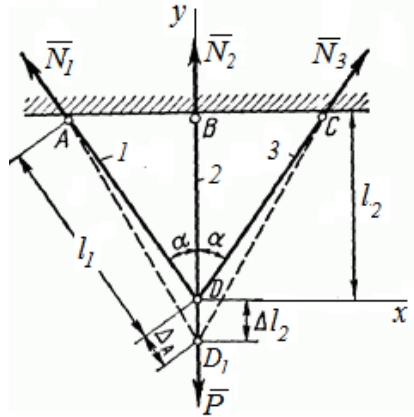
Dartılma və sıxılma zamanı mil müxtəlif möhkəmliyə malik olur. Sıxılmada möhkəmlik ehtiyat əmsalı: $n_1 = [\sigma]_s / \sigma_1 = 650 / 125 = 5,2 > [n]$ - möhkəmlik təmin olunur;

dartılmada möhkəmlik ehtiyat əmsalı: $n_3 = [\sigma]_d / \sigma_3 = 150 / 40 = 3,75 < [n]$ - möhkəmlik təmin olunur.

Statik həll olunan və statik həll olunmayan sistemlər

Verilmiş sistemin konstruksiya elementlərinin daxili qüvvələrini (reaksiya qüvvələrini) statikanın müvazinət şərtləri vasitəsi ilə tapmaq mümkündürsə, belə sistemə statik həll olunan sistem deyilir.

Sistemin daxili qüvvələrinin sayı müvazinət tənliklərinin sayından çox olduqda həmin daxili qüvvələri tapmaq üçün əlavə tənliklərə ehtiyac olur. Sistemin daxili qüvvələrini statikanın müvazinət tənlikləri vasitəsi ilə tapmaq mümkün deyilsə, belə sistemə statik həll olunmayan sistem deyilir. Daxili qüvvələrin tapılması üçün lazım olan əlavə tənliklərin sayına sistemin statik həll olunmamaq dərəcəsi deyilir. Şəkil 18.21-də göstərilən statik həll olunmayan sistemin daxili qüvvələrinin tapılmasına baxaq



Şəkil 18.21

Şəkindən göründüyü kimi çubuqların $\overline{N_1}$, $\overline{N_2}$, $\overline{N_3}$ daxili normal qüvvələrini tapmaq üçün statikadan məlum olan aşağıdakı iki müvazinət tənliklərini yaza bilərik.

$$\sum F_{ix} = -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0 \quad (18.23)$$

$$\sum F_{iy} = N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \alpha - P = 0 \quad (18.24)$$

Bu iki tənlikdə üç məchul vardır. Deməli bu sistemin statik həll olunmama dərəcəsi 1-dir. Odur ki, əlavə bir tənliyə ehtiyac var. Həmin tənlik çubuqların deformasiya olunma xassəsinə əsasən aşağıdakı kimi tərtib edilir. Şəkil 21-dən yazı bilərik:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha, \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1}, \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E F_2}.$$

Millərin en kəsik sahələri $F_1 = F_2$ olduğu üçün

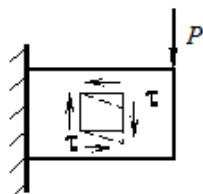
$$\frac{N_1 l_1}{E F} = \frac{N_2 l_2}{E F} \cos \alpha \text{ alırıq. Buradan tapırıq:}$$

$$N_1 = N_2 \frac{l_2}{l_1} \cos \alpha \quad (18.25)$$

Beləliklə (18.23), (18.24), (18.25) tənliklərindən N_1 , N_2 , N_3 reaksiya qüvvələrini tapa bilərik.

18.2. Sürüşmə deformasiyası

Milin en kəsiklərində yalnız eninə qüvvələr təsir etdikdə yaranan deformasiyaya sürüşmə və ya kəsilmə deformasiyası deyilir.

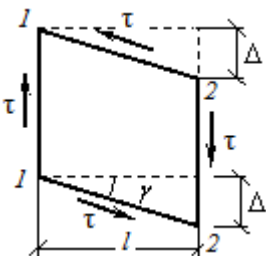


Şəkil 18.22

Bu deformasiyaya maşın hissələrinin bolt, pərçin, qaynaq, işgil və s. birləşmələrində rast gəlinir. Şəkil 22-də göstərilən milin sürüşmə deformasiyasını aydınlaşdırıq.

Milin P eninə qüvvənin təsiri altında düzbucaqlı elementlərinin yan kəsiklərində yaranan τ toxunan gərginliklərin təsirindən sürüşmə deformasiyası baş verir.

Fərz edək ki, şəkildə göstərilən milin $abcd$ elementi kəsici qüvvənin təsiri altında sürüşmə deformasiyasına məruz qalır. Bu elementin sol tərəfini tərpənməz qəbul edib, sağ tərəfini Δ qədər sürüşdürək. Onda $abcd$ dübucaqlısı $a_1b_1c_1d_1$ paraleloqramına çevrilir. Elementin 1-1 və 2-2 kəsiklərinin bir-birinə nəzərən Δ yerdəyişməsinə mütləq sürüşmə, mütləq sürüşmənin elementin l uzunluğuna nisbətində isə γ nisbi sürüşmə deyilir (Şək. 18.23).



Şəkil 18.23

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta}{l} \quad (18.26)$$

Toxunan gərginliklərin milin en kəsikləri üzrə sabit paylanması zamanı aşağıdakı ifadədən tapılır

$$\tau = Q/F, \quad (18.27)$$

Burada Q verilmiş kəsikdə təsir edən kəsici qüvvə, F isə en kəsiyin sahəsidir.

Dartılma və sıxılmada olduğu kimi elastiklik həddi daxilində milin en kəsiklərində təsir edən toxunan gərginliklər nisbi sürüşmə ilə düz mütənasibdir.

$$\tau = G \gamma \quad (18.28)$$

Burada G sürüşmədə elastiklik modulu və ya sadəcə sürüşmə modulu adlanır.

Bu ifadəyə sürüşmədə Huk qanunu deyilir. Sürüşmədə Huk qanunu mütləq sürümədən asılı aşağıdakı kimi yazılır:

$$\Delta = \frac{Ql}{GF} \quad (18.29)$$

Burada l sürüşən kəsiklər arasındakı məsafədir.

Sürüşmə modulu G , elastiklik modulu E və Puasson əmsalı μ arasında asılılıq vardır:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Polad üçün elastiklik modulu $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, Puasson əmsalı $\mu = 0,3$ olduğundan, G sürüşmə modulu $G = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ olur.

Sürüşmədə möhkəmlik hesabları

Sürüşmə deformasiyasına məruz qalan milin normal iş rejimlərini təmin etmək üçün onun en kəsiklərində yaranan toxunan gərginliklər buraxıla bilən gərginlikdən az olmalıdır. Yəni

$$\tau \leq [\tau] \quad (18.30)$$

Burada buraxılan bilən gərginlik $[\tau]$ aşağıdakı ifadənin köməyi ilə tapılır.

$$[\tau] = \frac{\tau_B}{k} \quad (18.31)$$

Burada τ_B materialın möhkəmlik həddindəki toxunan gərginlikdir. k - ehtiyat əmsalıdır və milin materialından asılı olaraq verilir, $k > 1$.

Məsələ 18.4: Şəkil 24 *a*-da göstərilən pərçim birləşməsini hesablayaq.

Verilir: $P=720\text{kN}$, $d=20\text{mm}$, $[\tau]=100\text{MPa}$.

Tapmalı: n pərçimlərin sayını.

Bir pərçimə düşən qüvvə: $P_1 = \frac{P}{n}$.

Bir pərçimin en kəsiyində yaranan toxunan gərginlik

$$\tau = \frac{P_1}{F} = \frac{P_1}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4P}{n \pi d^2}, \tau = [\tau], \frac{4P}{n \pi d^2} \leq [\tau]$$

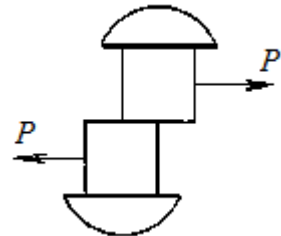
$$\tau = \frac{P_1}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{P}{n \frac{\pi d^2}{4}}$$

Kəsilmədə toxunan gərginlik: $[\tau] = (0,7 \div 0,8)[\sigma]$.
Kəsilmədə möhkəmlik şərti:

$$\tau = \frac{P}{F} = \frac{P}{n \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau]$$



Şəkil 18.24 *a*



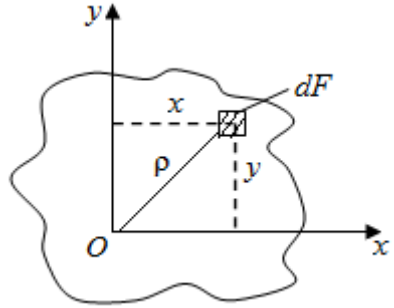
Şəkil 18.24 *b*

Möhkəmlik şərtindən istifadə edib pərçimlərin sayını tapırıq:

$$n \geq \frac{P}{\frac{\pi d^3}{4} [\tau]_s} \quad n \geq \frac{P}{\frac{\pi d^3}{4} [\tau]_s} = \frac{720000}{\frac{3,14 \cdot 4 \cdot 10^3}{4} \cdot 100} \approx 24$$

Müstəvi kəsiyin həndəsi xarakteristikaları

Məlumdur ki, milin dartılma, sıxılma və sürüşmə deformasiyası zamanı onun möhkəmlik və sərtlik şərtləri yazılarkən en kəsiyinin sahəsindən istifadə olunur. Yastı fiqurun ən sadə həndəsi xarakteristikaları uzunluq və sahədir. Lakin, burulma və əyilmə deformasiyalarında daha mürəkkəb həndəsi xarakteristikalar iştirak edir.



Şəkil 18.25

Şəkil 18.25-də göstərilən müstəvi en kəsiyin elementar hissəciyinin sahəsini dF ilə işarə etsək, bu kəsiyin tam sahəsi həmin hissəciklərin sahələrinin cəminə bərabər olur.

$$F = \int_{(F)} dF \quad (18.32)$$

Burulma və əyilmə deformasiyalarını öyrənmək üçün en kəsiyin aşağıdakı həndəsi xarakteristikalardan istifadə edilir: statik moment, inersiya momenti, mərkəzdənqaçma inersiya momenti, sahənin müqavimət momenti.

Sahənin statik momenti onun elementar hissəciyinin sahəsinin verilmiş oxdan olan məsafəsinə vurma hasilinin cəminə (inteqralına) bərabərdir. Şəkildə göstərilən kəsiyin x və y oxlarına nəzərən statik momenti aşağıdakı kimi tapılır.

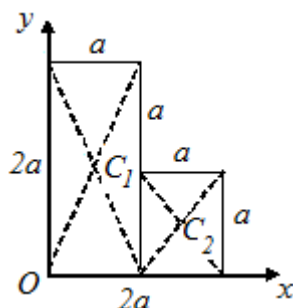
$$S_x = \int_{(F)} y \cdot dF \quad (18.33)$$

$$S_y = \int_{(F)} x \cdot dF \quad (18.34)$$

Qeyd edək ki, kəsiyin C ağırlıq mərkəzindən keçən oxla nəzərən statik momenti sıfıra bərabər olur.

$$S_{cx} = S_{cy} = 0$$

Kəsiyin C ağırlıq mərkəzinin koordinatları aşağıdakı kimi tapılır.



Şəkil 18.26

$$\begin{cases} x_c = \frac{S_y}{F} \\ y_c = \frac{S_x}{F} \end{cases}$$

Aşağıdakı məsələnin həllinə baxaq: Şəkil 18.26-da göstərilən bircins müstəvi fiqurun C ağırlıq mərkəzini tapmaq (a ölçüsü verilir).

$$S_x = S_x^I + S_x^{II}, \quad S_y = S_y^I + S_y^{II}$$

$$S_x^I = y_{c1} \cdot F_1 = a \cdot 2a^2 = 2a^3$$

$$S_x^{II} = y_{c2} \cdot F_2 = \frac{a}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3}{2}$$

Müstəvi kəsiyin inersiya momentləri

Müstəvi fiqurun (yastı fiqurun) koordinat oxlarına nəzərən inersiya momenti en kəsiyin elementar hissəciyinin dF sahəsinin uyğun oxdan olan məsafələrinin kvadratına vurma hasilinin cəminə (inteqralına) bərabərdir (Şək.18.25):

$$\begin{aligned} J_x &= \int_F y^2 dF, \\ J_y &= \int_F x^2 dF, \end{aligned} \quad (18.35)$$

Eyni qayda ilə O nöqtəsinə nəzərən J_p qütb inersiya momentini aşağıdakı kimi tapırıq:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF \quad (18.36)$$

Şəkildən yaza bilərik: $\rho^2 = x^2 + y^2$, onda

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF,$$

Buradan alırıq:

$$J_p = J_x + J_y, \quad (18.37)$$

Deməli, yastı fiqurun koordinat mərkəzinə nəzərən inersiya momenti onun koordinat oxlarına nəzərən inersiya momentlərinin cəminə bərabərdir.

Koordinat oxlarına nəzərən kəsiyin **mərkəzdənqaçma inersiya momenti** aşağıdakı kimi tapılır:

$$J_{xy} = \int_F xy dF \quad (18.38)$$

Oxa nəzərən və qütb inersiya momenti həmişə müsbət olur, mərkəzdənqaçma inersiya momenti isə həm müsbət, həm də mənfi ola bilər. Qeyd edək ki, oxlardan ən azı biri kəsiyin simmetriya oxu olduqda mərkəzdənqaçma inersiya momenti 0-a bərabər olur.

Kəsiyin müqavimət momenti onun verilmiş oxa nəzərən inersiya momentinin həmin oxdan kəsiyin ən uzaq nöqtəsinədək olan ρ_{max} məsafənin nisbətində bərabərdir.

$$W_O = J_O / \rho_{max}$$

Məsələn, dairə üçün $\rho_{max} = R = d/2$ olduğu üçün

$$W_O = J_O / \rho_{max} = 0,1 d^4 / R = 0,2 d^3$$

Sahənin oxa, nöqtəyə nəzərən və mərkəzdənqaçma inersiya momentinin BS sistemində vahidi m^4 , müqavimət momentinin vahidi isə m^3 -dür.

Mürəkkəb formalı kəsiyin sahə inersiya momentləri

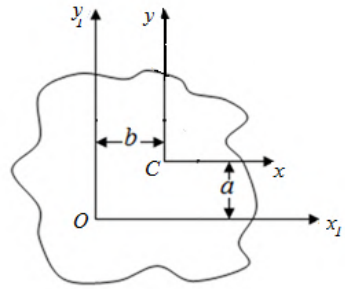
Mürəkkəb formalı cismin verilmiş x oxuna nəzərən inersiya momentini tapmaq üçün onu sadə məlum fiqurlara ayırırıq. Bu hissələrin inersiya momentlərini J_x^I , J_x^{II} , J_x^{III} və s. ilə işarə edək. Onda x oxuna nəzərən fiqurun inersiya momenti aşağıdakı kimi tapılır:

$$J_x = J_x^I + J_x^{II} + J_x^{III} + \dots, \quad (18.39)$$

Deməli, mürəkkəb formalı kəsiyin verilmiş oxa nəzərən inersiya momenti bu kəsiyin sadə hissələrinin həmin oxa nəzərən inersiya momentlərinin cəminə bərabərdir.

Paralel oxlara nəzərən sahə inersiya momentləri arasında asılılıq

Kəsiyin ağırlıq mərkəzini C , mərkəzi oxlarını Cx , Cy ilə işarə edək. Bu oxlara nəzərən inersiya momentlərini $J_{x_c}, J_{y_c}, J_{x_c y_c}$ ilə işarə edək. Bu oxlara paralel olan x_1 və y_1 oxlarına nəzərən inersiya momentlərini tapaq.



Şəkil 18.27

İxtiyari dF elementar hissəciyinin x_1 və y_1 koordinatlarını x və y koordinatlarından asılı tapırıq:

$$x_1 = x + b, y_1 = y + a$$

Kəsiyin x_1 oxuna nəzərən inersiya momentini tapaq:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y + a)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2a \int_F y dF + a^2 \int_F dF.$$

İfadənin sağ tərəfindəki birinci integral J_{Cx} , ikinci integral mərkəzi oxa nəzərən statik moment $S_{x_c} = 0$ olduğu üçün alınır:

$$J_{x_1} = J_{Cx} + a^2 F \quad (18.40)$$

Anoloji olaraq:

$$J_{y_1} = J_{Cy} + b^2 F \quad (18.41)$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{Cxy} + abF \quad (18.42)$$

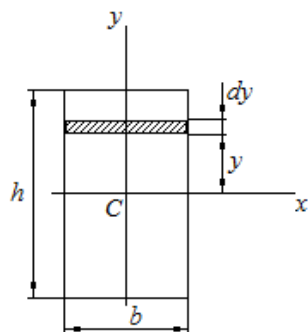
$$J_O = J_C + l^2 F$$

Burada C yastı fiqurun ağırlıq mərkəzi, a və b paralel oxlar arasındakı məsafələr, l isə O və C nöqtələri arasındakı məsafədir.

Bəzi sadə kəsiklərin inersiya momentləri.

Bircins düzbucaqlı.

Eni b , hündürlüyü h olan bircins düzbucaqlının onun ağırlıq mərkəzindən keçən x və y oxlarına nəzərən inersiya momentlərini tapaq (Şək. 18.28).



Şəkil 18.28

Əvvəlcə x oxuna paralel olan y məsafəsində yerləşən eni b və qalınlığı dy olan elementar həssəciyi qeyd edək. Bu hissəciyin sahəsini $dF = bdy$ ilə işarə edək. Bu sahəciyi (18.35) ifadəsində yerinə yazıb x oxuna nəzərən inersiya momentini tapırıq:

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}.$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (18.43)$$

Anoloji olaraq y oxuna nəzərən inersiya momenti:

$$J_y = \frac{hb^3}{12}. \quad (18.44)$$

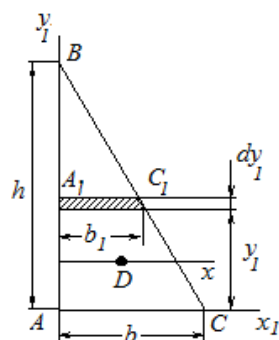
Kəsinin C ağırlıq mərkəzinə nəzərən qütb inersiya momentini və bu mərkəzdən keçən koordinat oxlarına nəzərən aşağıdakı kimi tapırıq:

$$J_p = J_x + J_y = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2),$$

$$J_{xy} = 0.$$

Bircins üçbucaq.

Şək. 29-da göstərilən bircins üçbucağın oturacağından keçən x_1 oxuna nəzərən inersiya momentini tapaq.



Şəkil 18.29

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF.$$

Şəkildən $dF = b_1 \cdot dy_1$.

ABC və A_1BC_1 üçbucaqlarının oxşarlığına

əsasən:

$$b_1 = b \frac{h - y_1}{h},$$

burada b - üçbucağın oturacağının uzunluğu, h onun hündürlüyüdür.

$$J_{x_1} = \int_0^b b \cdot \frac{h - y_1}{h} \cdot y_1^2 dy_1 = \frac{bh^3}{12}.$$

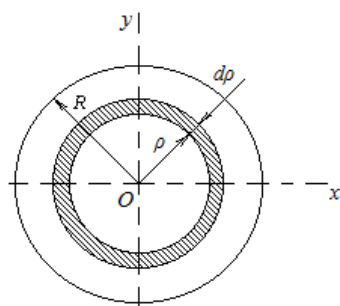
Onda Üçbucağın oturacağından onun D ağırlıq mərkəzinədək olan məsafə $y_c = h/3$ olduğu üçün paralel oxlara nəzərən inersiya momentləri arasındakı asılılığa əsasən CX mərkəzi oxuna nəzərən inersiya momenti aşağıdakı kimi tapılır:

$$J_x = J_{x_1} - y_c^2 \cdot F = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}bh = \frac{bh^3}{36}.$$

Bircins dairə.

Diametri $d = 2R$ olan bircins dairənin mərkəzinə nəzərən inersiya momentini tapaq. Bunun üçün mərkəzdən ρ məsafəsində yerləşən $d\rho$ qalınlığında həlqənin sahəsini $dF = 2\pi\rho d\rho$ işarə edək. Onda qütb inersiya momentini tapırıq:

$$\begin{aligned}
 J_p &= \int_F \rho^2 dF = \int_0^R \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho = \\
 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R &= \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \\
 J_p &= \frac{\pi D^4}{32}
 \end{aligned}
 \tag{18.45}$$



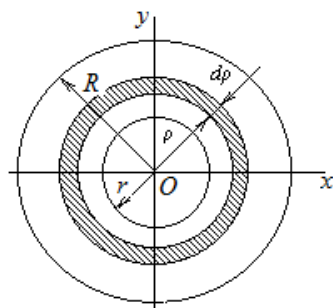
Şəkil 18.30

Dairənin x və y oxlarına nəzərən inersiya momentlərinə nəzərən inersiya momentlərini tapırıq: Burada $J_x = J_y$ olduğu üçün $J_p = J_x + J_y$, onda

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64} .
 \tag{18.46}$$

Bircins həlqə.

Xarici diametri R, daxili diametri r olan bircins həlqənin O nöqtəsinə nəzərən qütb inersiya momentini tapaq (Şək. 18.31).



Şəkil 18.31

Dairə üçün aldığımız ifadəni integrallayaq:

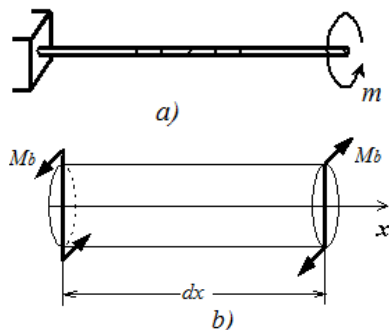
$$\begin{aligned}
 J_p &= \int_r^R 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2} \\
 &= \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}. \\
 J_p &= \frac{\pi D^4}{32}(1 - c^4),
 \end{aligned}
 \tag{18.47}$$

Burada $c = d/D$.

$$\text{Beləliklə alırıq: } J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64}(1 - c^4)
 \tag{18.48}$$

18.3. Düz oxlu milin burulma deformasiyası

Milin en kəsiklərində yaranan burucu momentlərin təsirindən baş verən deformasiyaya burulma deformasiyası deyilir. Başqa sözlə, burulma deformasiyası milin oxuna perpendikulyar müstəvidə təsir edən cüt qüvvələrin təsirindən yaranır (Şək.18.32).



Şəkil 18.32

Burulmaya işləyən dairəvi en kəsikli milə val deyilir. Valların hesabatı zamanı ona təsir edən xarici burucu momentlər vala verilən gücə əsasən tapılır.

Vala verilən və ya valın ötürdüyü gücü W ilə, burucu momenti M_b ilə və valın bucaq sürətini ω ilə işarə etsək yaza bilərik: $W = M_b \cdot \omega$.

Kinematikadan məlumdur ki, valın dövrlər sayını n ilə işarə etsək onun bucaq sürəti $\omega = \pi n / 30$ olar.

Onda yaza bilərik: $W = 30N / \pi n$. Güc kilovatla (kVt) verildikdə bu ifadə aşağıdakı kimi yazılır:

$$N = 9950 N / n.$$

Valın en kəsiklərində yaranan burucu momentləri tapmaq üçün kəsmə üsulundan istifadə edirik. Daxili burucu moment kəsikdən bir tərəfdə qalan xarici burucu momentlərin cəbri cəminə bərabərdir:

$$M_b = \sum m_i$$

Kəsiyə doğru baxdıqda burucu moment saat əqrəbinin fırlanma istiqamətində olduqda o müsbət, əks halda isə mənfi olur.

Valın oxu boyunca burucu momentlərin dəyişməsinə göstərən diaqramı burucu moment epürü deyilir.

Məsələ 18.5

Şəkildə göstərilən milə təsir edən burucu momentlərin epürünü qurmalı. Verilir: $M_1 = 30$ kN.m, $M_2 = 40$ kN.m, $m_1 = 20$ kN.m, $m_2 = 10$ kN.m (Şək. 18.33).

Həlli.

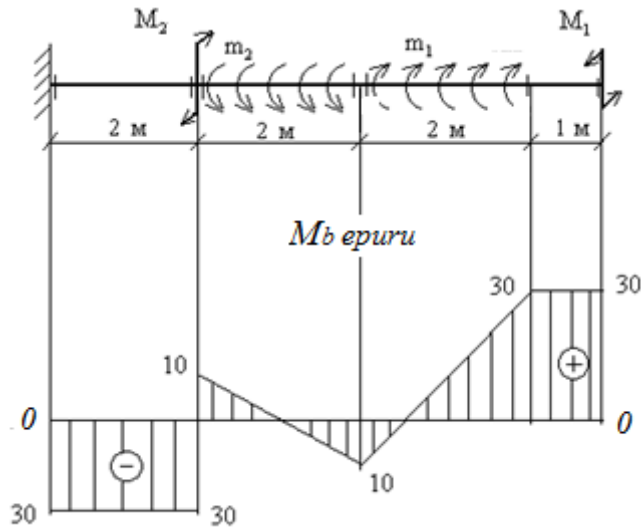
Mili 4 xarakterik məntəqəyə ayıraraq və hər məntəqə üçün en kəsiklərdə yaranan burucu momentləri hesablayaq.

$$M_{b1} = M_1 = 30 \text{ kN.m}, M_{b2} = M_1 - m_1 \cdot 2 = 30 - 40 = -10 \text{ kN.m},$$

$$M_{b3} = M_1 - m_1 \cdot 2 + m_2 \cdot 2 = 30 - 40 + 20 = 10 \text{ kN.m},$$

$$M_{b4} = M_1 - m_1 \cdot 2 + m_2 \cdot 2 - M_2 = 30 - 40 + 20 - 40 = -30 \text{ kN.m}.$$

Bu qiymətlərə əsasən şəkildə burucu moment epürünü qururuq.

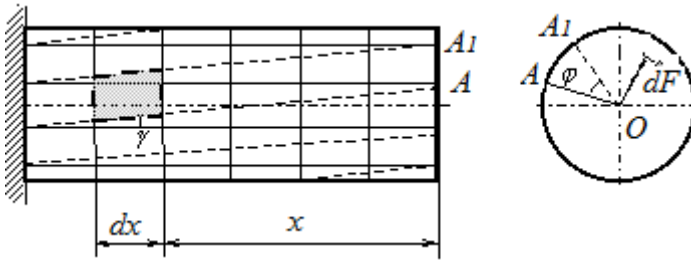


Şəkil 18.33

Burucu momentlə toxunan gərginliklər arasında əlaqə

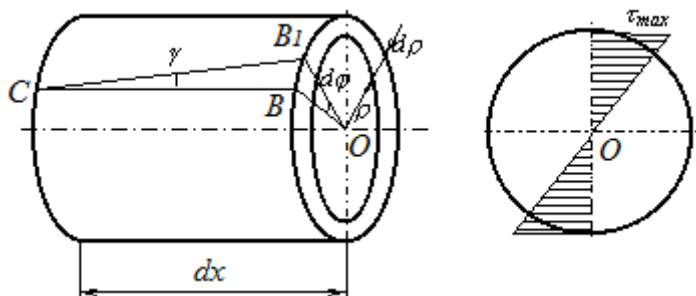
Valın en kəsiklərində təsir edən burucu momentləin yaratdığı gərginlikli vəziyyətə baxaq. Elementar dF sahəsinə təsir edən τdF qüvvəsinin valın mərkəzinə nəzərən momenti $(\tau dF)\rho$ olur (Şək.18.34). Kəsikdəki M_b burucu momenti aşağıdakı kimi tapılır:

$$M_b = \int_F \rho \tau dF \quad (18.49)$$



Şəkil 18.34

Valın dx elementinin sol kəsiyini tərpənməz qəbul edib sağ kəsiyini $d\varphi$ bucağı qədər döndərək (Şək.35). Onda mərkəzdən ρ məsafəsində yerləşən dF hissəciyinin nisbi dönmə bucağı $\theta = d\varphi/dx$ olar. Şəkildən dF elementar hissəciyinin mütləq sürüşməsini $ds = \rho d\varphi = \rho \theta dx$ tapırıq. Onda nisbi sürüşmə $\gamma = ds/dx = \rho \theta = \rho d\varphi/dx$ olur.



Şəkil 18.35

Sürüşmədə Huk qanununa əsasən yazsa bilərik:

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dz} \quad (18.50)$$

Bu ifadəni (49)-da yerinə yazsaq:

$$M_x = \int_F \rho G \rho \frac{d\varphi}{dz} dF = G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 dF = GJ_p \frac{d\varphi}{dz}$$

Burada $J_p = \int \rho^2 dF$ - kəsiyin qütb inersiya momentidir.

Buradan alırıq:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_x}{GJ_p} \quad (18.51)$$

Bu ifadəni (49)-da yerinə yazsaq:

$$\tau = \frac{M_x}{J_p} \rho$$

Göründüyü kimi toxunan gərginlik kəsiyin ağırlıq mərkəzindən baxılan nöqtəyədək olan məsafə (ρ) ilə düz mütənasıbdır. Kəsiyin mərkəzində τ toxunan gərginlik 0-a bərabərdir, kəsiyin çevrəsi üzərindəki nöqtələrdə isə toxunan gərginlik maksimum olur. Yəni $\rho = R$ olduqda $\tau = \tau_{max}$ olur:

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{J_p} \cdot R = M_b / W_p$$

Burada, $W_p = J_p / R$ kəsiyin müqavimət momentidir.

$$\text{Dairəvi kəsik üçün} \quad W_p = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16} .$$

Həlqəvari kəsik üçün:

$$W_p = \frac{\pi R^3}{2} (1 - c^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4) , \text{Burada } c = d/D .$$

Beləliklə, maksimum toxunan gərginlik:

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_p} \text{ olur.}$$

Burulma zamanı valın deformasiyası

Yuxarıda qeyd etdiyimiz (18.51) ifadəsindən alırıq:

$$d\varphi = \frac{M_x}{GJ_p} dz,$$

Bu ifadəni valın bütün uzunluğu boyunca integrallasaq alırıq:

$$\varphi = \int_0^z \frac{M_x}{GJ_p} dz.$$

Burada $M_x = \text{const}$ və $GJ_p = \text{const}$ olduğunu qəbul etsək, valın mütləq dönmə bucağını aşağıdakı kimi tapırıq:

$$\varphi = \frac{M_x l}{GJ_p},$$

Burada GJ_p kəmiyyətinə burulmada sərtlilik deyilir.

Burulmada möhkəmlik və sərtlilik şərtləri

Valın burulma zamanı möhkəmliyinin təmin olunması üçün onun kəsiklərində yaranan ən böyük toxunan gərginlik buraxıla bilən toxunan gərginlikdən çox olmamalıdır. Başqa sözlə, valın burulmada möhkəmlik şərti aşağıdakı kimi yazılır:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_{\rho}} \leq [\tau] \quad , \quad (18.52)$$

Burada $[\tau]$ buraxılabilən toxunan gərginlikdir. Bu, materialın sınaq təcrübələrindən qəbul olunan kəmiyyətdir.

Buraxılabilən toxunan gərginlik materialın buraxılabilən normal gərginliklərindən asılı tapılır. Kövrək materiallar üçün $[\tau] = [\sigma_p]$, plastik materiallar üçün $[\tau] = (0,5 \dots 0,6)[\sigma]$ olur.

Buradan W_{ρ} qütb müqavimət momentini tapırıq:

$$W_{\rho} \geq \frac{M_x}{[\tau]}$$

Bütöv dairəvi en kəsikli valın müqavimət momenti $W_{\rho} = \pi \cdot d^3 / 16$ olduğu üçün valın diametrini aşağıdakı ifadədən tapırıq:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_x}{\pi \cdot [\tau]}}$$

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_x}{GJ_p} = \frac{d\varphi}{dz}$$

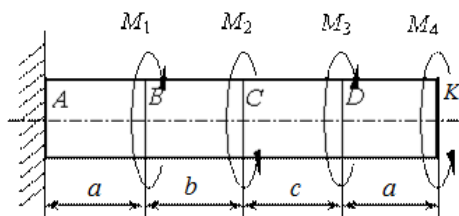
Nisbi burulma bucağı olduğu üçün valın sərtliliyini təmin etmək üçün aşağıdakı şərt ödənməlidir:

$$\theta = \frac{M_x}{GJ_{\rho}} \leq [\theta]$$

Buna burulma zamanı valın sərtlik şərti deyilir.

Məsələ 18.6

Şəkil 36-da göstərilən valın M_1, M_2, M_3, M_4 xarici burucu momentlərin təsiri altında burulmasına baxaq.



Şəkil 18.36

Verilir: $M_1 = M_3 = 2 \text{ кНм}, M_2 = M_4 = 1,6 \text{ кНм}, a = b = c = 1,2 \text{ м}, [\tau] = 80 \text{ МПа}$. Tapmalı: 1) burucu moment epürünü qurmalı, 2) burulmaya görə möhkəmlilik hesabatlari aparmalı, d diametrini tapmalı.

Həlli.

Valı 4 məntəqəyə bölək. Hər məntəqə üçün burucu momenti tapaq.

I məntəqə (KD):

$$M_{xp1} = -M_4 = -1,6 \text{ кН.м,}$$

II məntəqə (DC):

$$M_{xp2} = -M_4 + M_3 = -1,6 + 2 = 0,4 \text{ кН.м,}$$

III məntəqə (CB):

$$M_{xp3} = -M_4 + M_3 - M_2 = -1,6 + 2 - 1,6 = -1,2 \text{ кN.m,}$$

IV məntəqə (BA):

$$M_{xp4} = -M_4 + M_3 - M_2 + M_1 = -1,6 + 2 - 1,6 + 2 = 0,8 \text{ кN.m.}$$

Bu qiymətlərə əsasən şəkil 18.37-də burucu moment epürünü qururuq.

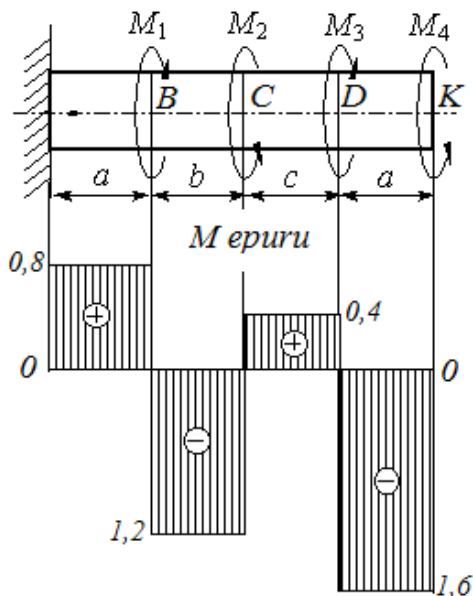
Burucu momentlərin ən böyük qiymətinə və $[\tau]$ buraxılabilən toxunan gərginliyə əsasən möhkəmlik şərtini aşağıdakı kimi yazırıq:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{xp}|_{\max}}{W_{\rho}} \leq [\tau]$$

Burada $|M_{xp}|_{\max}$ ən böyük burucu momentdir.

$$|M_{xp}|_{\max} = 1,6 \text{ кN.m;}$$

Valın en kəsiyinin qütb müqavimət momenti $W_{\rho} = \pi d^3 / 16$ olduğu üçün onun diametrini tapırıq.



Şəkil 18.37

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{|M_{xp}|_{\max}}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,6 \cdot 10^3 H\text{М}}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6 H / \text{М}^2}} = 0,0467 \text{ М} = 46,7 \text{ мм}$$

Alınan qiymətə əsasən valın diametrini seçirik: $d = 50 \text{ мм}$
 $= 0,05 \text{ м}$.

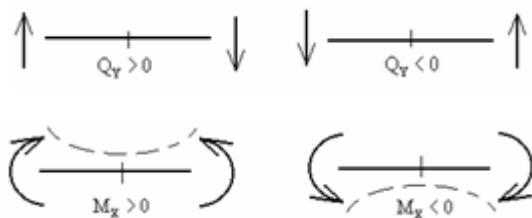
18.4. Əyilmə deformasiyası

Milin en kəsiklərində təsir edən əyici momentlərdən yaranan deformasiyaya əyilmə deyilir. Əyilməyə işləyən milə tir deyilir. Tirin en kəsiklərində yalnız əyici momentlər təsir edərsə yaranan deformasiyaya xalis əyilmə, en kəsiklərdə əyici momentlər ilə birlikdə kəsici qüvvələr də təsir edərsə belə əyilməyə eninə əyilmə deyilir.

Tirin oxundan keçən müstəvi üzərində təsir edən xarici qüvvələrin təsiri altında onun en kəsiklərində kəsici qüvvələr və əyici momentlər yaranır. Əyilmə deformasiyası həmin qüvvələrin təsiri altında baş verir. Tirin en kəsiklərindəki kəsici qüvvələri və əyici momentləri tapmaq üçün kəsmə üsulundan istifadə edirik. Kəsici qüvvə kəsikdən bir tərəfdə qalan xarici qüvvələrin tirin oxuna perpendikulyar və qüvvələrin müstəvisi üzərində yerləşən ox üzərindəki proyeksiyalarının cəbri cəminə, əyici moment isə həmin xarici qüvvələrin kəsikdən keçən və qüvvələr müstəvisinə perpendikulyar olan oxa nəzərən momentlərinin cəbri cəminə bərabərdir, yəni

$$Q = \sum F_{iy}, \quad M_{ay} = \sum m_z(F_i)$$

Kəsici qüvvə baxılan kəsiyi saat əqrəbinin fırlanma istiqamətində döndərsə müsbət, əks halda isə mənfi qəbul edilir (Şək. 18.38). Əyici moment kəsikdən sol tərəfdə qalan hissəni saat əqrəbinin hərəkətinin əksinə və sağ tərəfdəki kəsiyi saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində döndərsə müsbət, əks halda mənfi qəbul edilir.



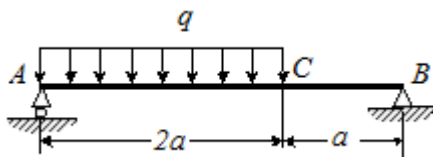
Şəkil 18.38

Kıscı qüvvələrin və əyici momentlərin tirin oxu boyunca dəşməsini göstərən diaqram Q kəsici qüvvə və M_{ay} əyici moment epürü deyilir.

Tirin əyilməsinə aid aşağıdakı məsələlərin həllinə baxaq.

Məsələ 18.7

Şəkil 18.39-da göstərilən tirin kəsici qüvvə və əyici moment epürünü qurmalı. Verilir: $q = 3 \text{ kN/m}$, $a = 2 \text{ m}$.



Şəkil 18.39

Həlli.

Əvvəlcə dayaqların reaksiya qüvvələrini tapaq:

$$\sum m_A(F_i) = R_B \cdot 3a - Q \cdot a = 0,$$

$$\sum m_B(F_i) = R_A \cdot 3a - Q \cdot 2a = 0,$$

Buradan tapırıq: $R_A = 2/3 \cdot Q = 4qa/3 = 8kN$, $R_B = 1/3 \cdot Q = 2qa/3 = 4kN$.

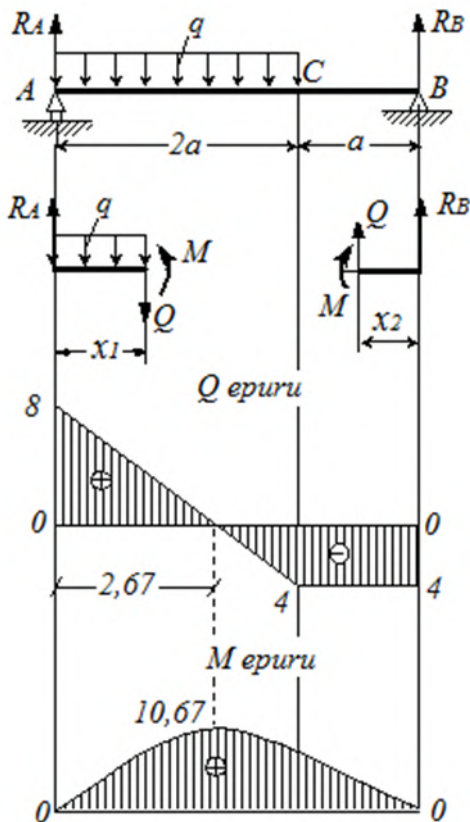
Tiri iki hissəyə bölək. Əvvəlcə AC məntəqəsinə baxaq (Şək. 18.40).

$0 \leq x_1 \leq 4m$, $Q = R_A - q \cdot x_1$,
 $M_{ay} = R_A \cdot x_1 - qx_1^2/2$.
 $x_1 = 0$ olduqda, $Q = R_A = 8kN$, $M_{ay} = 0$.
 $x_1 = 2a$ olduqda, $Q = -4kN$,
 $M_{ay} = 8 kN \cdot m$.

BC məntəqəsi üçün:

$0 \leq x_2 \leq 2m$, $Q = -R_B$,
 $M_{ay} = R_B \cdot x_2$.
 $x_2 = 0$ olduqda, $Q = -4kN$, $M_{ay} = 0$.
 $x_2 = a$ olduqda, $Q = -4kN$,
 $M_{ay} = 8 kN \cdot m$.

Riyaziyyatdan məlumdur ki, funksiyanın ekstremumu onun törəməsinin 0-a bərabər olduğu nöqtədə olur.



Şəkil 18.40

$(M_{ay})' = (R_A \cdot x_1 - qx_1^2/2)' = R_A - qx_1 = 0$, $x_1 = R_A/q = 8/3m = 2,67 m$.

Həmin ekstremum nöqtəyə uyğun olan əyici momenti tapırıq:

$$M_{\max} = R_A \cdot x_1 - qx_1^2/2 = 10,67 \text{ kN.m}$$

Məsələ 18.8

Şək. 18.41-da A nöqtəsində sərt bərkidilmiş tirin kəsici qüvvə və əyici moment epürünü qurmalı.

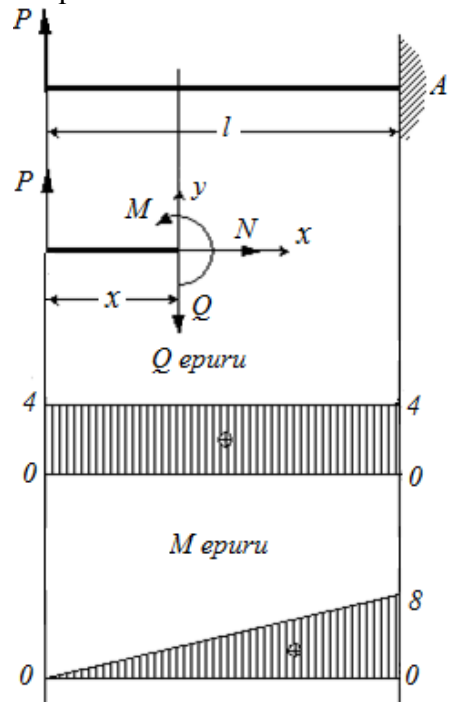
Verilir: $P=4 \text{ kH}$, $l=2 \text{ m}$.

Daxili qüvvələri tapmaq üçün kəsmə üsulundan istifadə edək. İxtiyari x kəsiyində N normal qüvvəni, Q_y kəsici qüvvəni və M_{ay} əyici momenti göstərək. Müvazinət tənliklərini yazırıq.

$$\sum F_{ix} = 0, N = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0, P - Q = 0, \\ Q = P = 4 \text{ kN},$$

$$\sum m(F_i) = 0, M_{ay} - P \cdot x = 0, \\ M_{ay} = P \cdot x$$



Şəkil 18.41

Birinci tənlikdən göründüyü kimi N normal qüvvə 0-a bərabərdir. Alınan qiymətlərə əsasən şəkildə Q kəsici qüvvə və M_{ay} əyici moment epürünü qururuq.

Əyici moment $x=0$ olduqda $M_{ay}=0$ -a bərabər olur, $x=2m$ olduqda $M_{ay}=P.l=8kN.m$ olur

Epürdən göründüyü kimi tirin təhlükəli kəsiyi M_{ay} -in maksimum qiymət aldığı nöqtədə olur. Başqa sözlə bu məsələdə təhlükəli kəsik tirin divara bağlandığı nöqtədə olur.

Məsələ 18.9

Şək. 18.42-da göstərilən tirin Q kəsici qüvvə və M_{ay} əyici moment epürünü qurmalı.

Verilir: $P=30\text{ kN}$, $q=10\text{ kN/m}$, $M=50\text{ kN.m}$

Həlli.

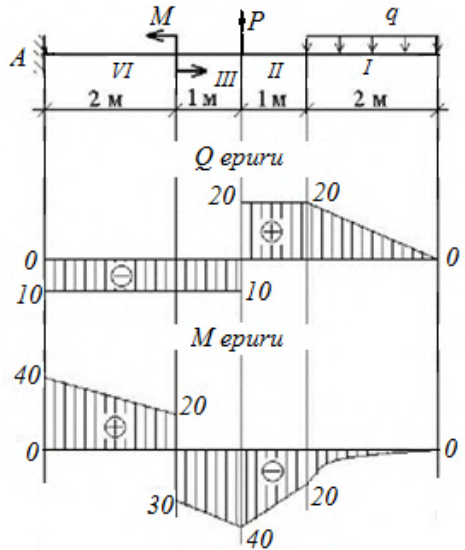
Şəkil 18.42

Tirin xarakterik məntəqələrini I, II, III, VI qeyd edək. Hər bir məntəqədə Q kəsici qüvvələri və M_{ay} əyici momentləri tapaq:

I məntəqə: $0 \leq x \leq 2m$,

$Q=q.x$, $Q_1=0$, $Q_2=q.2=20\text{ kN}$,

$M_{ay}=-q.x^2/2$, $M_1=0$, $M_2=-20\text{ kN.m}$



II məntəqə: $2 \leq x \leq 3\text{m}$,

$$Q = q \cdot 2, Q_1 = Q_2 = q \cdot 2 = 20\text{kN},$$

$$M_{ay} = -q \cdot 2 (x - 2 + 1), M_1 = -20\text{kN.m}, M_2 = -40\text{kN.m}$$

III məntəqə: $3 \leq x \leq 4\text{m}$,

$$Q = q \cdot 2 - P, Q_1 = Q_2 = -10\text{ kN}$$

$$M_{ay} = -q \cdot 2(x - 3 + 2) + P(x - 3), M_1 = -40\text{ kN.m}, M_2 = -30\text{kN.m}$$

IV məntəqə: $4 \leq x \leq 6\text{m}$,

$$Q = q \cdot 2 - P, Q_1 = Q_2 = -10\text{ kN}$$

$$M_{ay} = -q \cdot 2(x - 4 + 3) + P(x - 3) + M, M_1 = 20\text{ kN.m}, M_2 = 40\text{kN.m}$$

Bu qiymətlərə əsasən şəkildə Q kəsici qüvvələr və M_{ay} əyici momentlər epürünü qururuq (Şək. 18.42).

Yayılmış yükün q intensivliyi, Q kəsici qüvvə və M əyici moment arasında diferensial əlaqələr

Bu kəmiyyətlər arasında aşağıdakı asılılıqlar vardır:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{dQ_y}{dz}; \\ Q_y &= \frac{dM_x}{dz}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow q = \frac{d^2 M_x}{dz^2}.$$

Bu asılılıqlardan məsələ həllində geniş istifadə edilir.

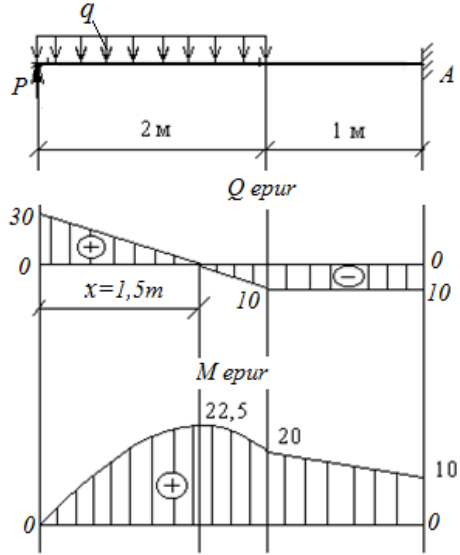
Məsələ 18.10

Şək. 18.43-də tirin Q kəsici qüvvə və M_{ay} əyici moment epürünü qurmalı. Verilir: $P = 30 \text{ kN}$, $q = 20 \text{ kN/m}$.

Həlli.

Xarakterik nöqtələrdəki Q kəsici qüvvələri tapaq: $Q_1 = P = 30 \text{ kN}$, $Q_2 = P - q \cdot 2 = 30 - 40 = -10 \text{ kN}$.

Bu qiymətlərə əsasən kəsici qüvvə epürünü quraq. Göründüyü kimi, Q epürü x oxunu kəsdiyi nöqtədə ($Q = dM_{ay}/dx = 0$) əyici moment ekstremum qiymət alır.



Şəkil 18.43

Kəsici qüvvənin 0-a bərabər olduğu nöqtənin x_0 koordinatını tapaq:

$$F - q \cdot x_0 = 0,$$

Buradan

tapırıq:

$$x_0 = F/q = 30/20 = 1,5 \text{ m}.$$

Tirin en kəsiklərində təsir edən əyici momentləri tapaq:

$$M_{ay1} = 0, M_{ay2} = P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 60 - 40 = 20 \text{ kN.m}, M_{ay3} = P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 = 90 - 80 = 10 \text{ kN.m}$$

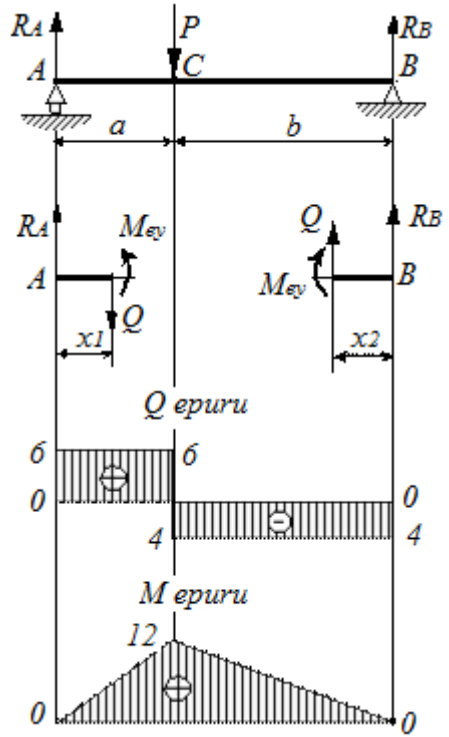
Əyici momentin $Q = 0$ olduqda ekstremal qiymətini tapaq:

$$M_{ay,extr} \big|_{Q=0} = P \cdot 1,5 - q \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 22,5 \text{ kN.m}$$

Bu qiymətlərə əsasən M əyici moment epürünü quraq.

Məsələ 18.11

Şək. 18.44-də göstərilən tirin Q kəsicə qüvvə və M_{ay} əyici moment epürünü qurmalı. Verilir: $P = 10 \text{ kN}$, $a = 2 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$.



Şəkil 18.44

Həlli.

Əvvəlcə dayaqların reaksiya qüvvələrini tapaq:

$$\sum m_A(F_i) = R_B (a+b) - P \cdot a = 0, R_B = P \cdot a / (a+b) = 4 \text{ kN},$$

$$\sum m_B(F_i) = -R_A (a+b) + P \cdot b = 0, R_A = P \cdot b / (a+b) = 6 \text{ kN},$$

Tiri AC və BC hissələrinə ayıraq.

AC məntəqəsi üçün: $0 \leq x_1 \leq a$.

$$Q = R_A, \quad M_{ay} = R_A \cdot x_1,$$

Q və M_{ay} - in məntəqənin əvvəlində və sonundakı qiymətlərini tapaq.

$$x_1 = 0 \text{ olduqda } Q_{y1} = R_A = 6 \text{ кН}, \quad M_{x1} = 0;$$

$$x_1 = a = 2 \text{ м}, \quad Q_{y1} = R_A = 6 \text{ кН}, \quad M_{x1} = 12 \text{ кН.м.}$$

İndi BC məntəqəsinə baxaq. $0 \leq x_2 \leq b$.

$$Q = -R_B, \quad M_{ay} = R_B \cdot x_2,$$

Məntəqənin əvvəlində və sonunda Q və M_{ay} -in qiymətlərini tapaq.

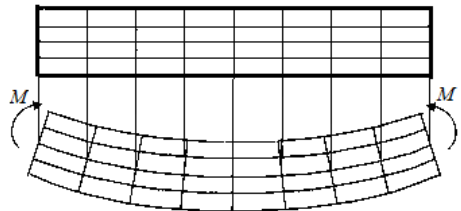
$$x_2 = 0, \quad Q_{y2} = -R_B = -4 \text{ кН}, \quad M_{x2} = 0;$$

$$x_2 = b = 3 \text{ м}, \quad Q_{y2} = -R_B = -4 \text{ кН}, \quad M_{x2} = 12 \text{ кН.м.}$$

Bu qiymətlərə əsasən şəkildə Q və M_{ay} epürlərini qururuq.

Düz oxlu tirin xalis əyilməsi

Xalis əyilmə zamanı tirin bir hissəsində liflər dartılır-uzanır (Şək. 18.45-də aşağı hissə), digər hissəsində isə sıxılır (şəkildə yuxarı hissə).



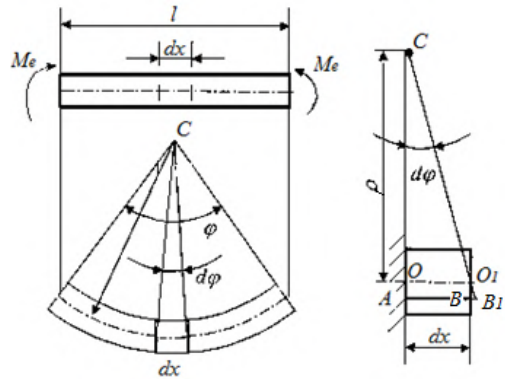
Şəkil 18.45

Bu hissələr bir-birindən neytral təbəqə ilə ayrılırlar. Neytral təbəqədə liflərin uzunluğu dəyişmir. Burada gərginlik 0-a bərabər olur.

Tirin en kəsik sahəsi və orada yaranan əyici momentlər sabit olduqda əyrilik radiusu sabit qalır, yəni tirin neytral oxu çevrə formasını alır.

Normal gərginlik və neytral oxun əyriliyi $1/\rho$ (ρ -əyrilik radiusu) arasında asılılıq alaı.

Şək. 18.46-da göstərilən tirin dx elementinin əyilmə deformasiyasına baxaq.



Şəkil 18.46

Neytral təbəqədən y məsafəsində yerləşən AB lifinin nisbi uzanması: $\varepsilon = BB_1 / AB = BB_1 / OO_1$.

COO_1 ı O_1BB_1 üçbucaqlarının oxşarlığına əsasən yazırıq:

$$BB_1 / OO_1 = O_1B / CO = y / \rho.$$

Beləliklə, nisbi deformasiya:

$$\varepsilon = y / \rho \text{ olur.}$$

Dartılmada Huk qanununa əsasən AB lifində yaranan normal gərginlik:

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} \quad (18.53)$$

Burada iki məchul var: $1/\rho$ və neytral oxdan olan y koordinatı. Odur ki, bu ifadədən praktiki istifadə etmək əlverişli deyil.

Neytral ox üzərində normal qüvvə

$$N_x = \int_F \sigma dF = 0 \quad \text{olur.}$$

Bu ifadədə $\sigma = E \frac{y}{\rho}$ nəzərə alsaq

$$\frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0 \quad \text{alırıq.}$$

Burada $E/\rho \neq 0$ və

$$\int_F y dF = 0$$

Bu integral en kəsiyin S_x statik momentini ifadə edir. Deməli, $S_x = 0$ olduğu üçün Ox neytral oxu kəsiyin ağırlıq mərkəzindən keçir.

Əyici momentin $dM_{\partial y}$ diferensialının σ normal gərginliyindən asılılıq ifadəsi aşağıdakı kimi yazılır.

$$dM_{\partial y} = \sigma dF \cdot y$$

Bu ifadəni integrallasaq alarıq:

$$\frac{E}{\rho} \iint_F y^2 dF = M_x$$

Burada $\iint_F y^2 dF = J_x$ tirin en kəsiyinin z oxuna nəzərən inersiya momentidir. Onda əyilmiş tirin neytral oxunun əyriliyi aşağıdakı kimi tapılır.

$$1/\rho = M_x / EJ_x$$

Burada EJ_z əyilmədə milin sərtliyi adlanır.

Bu ifadəni (18.53) ifadəsində yerinə yazsaq normal gərginliyi tapırıq:

$$\sigma = -\frac{M_x}{J_x} y, \text{ Bu ifadəni ilk dəfə 1773-cü ildə Ş. Kulon almışdır.}$$

Buradan göründüyü kimi neytral oxun üzərində $y = 0$ olduqda normal gərginlik 0 - a bərabər olur. $y = y_{max}$ olduqda, yəni en kəsiyin neytral oxundan ən uzaq kənar məsafədə yerləşən liflərdə normal gərginlik maksimum qiymətə malik olur.

$$|\sigma|_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max} = \frac{M_x}{J_x / y_{\max}} = \frac{M_x}{W_x}$$

burada $W_x = J_x / y_{\max}$ tirin en kəsiyinin müqavimət momenti adlanır.

Məlumdur ki, düzbucaqlı kəsik üçün $J_x = bh^3/12$, $y_{\max} = h/2$ və $W_x = J_x / y_{\max} = bh^2/6$. Dairə üçün $J_x = \pi d^4/64$, $y_{\max} = d/2$, alırıq $W_x = \pi d^3/32$.

Beləliklə, tirin en kəsiklərindəki ən böyük normal gərginliyi tapırıq:

$$\max |\sigma| = M_x / W_x.$$

Onda tirin əyilmədə möhkəmlik şərti aşağıdakı limi yazılır:

$$\max |\sigma| = M_x / W_x \leq [\sigma]$$

Burada $\max M_x$ – maksimum əyici moment, $[\sigma]$ – dartılma və ya sıxılmada buraxıla bilən normal gərginlikdir.

Düz oxlu tirin əyilmiş oxunun deferensial tənliyi

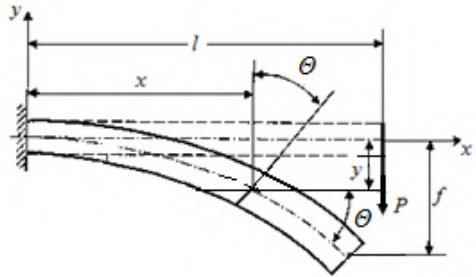
Tirin xalis əyilməsi zamanı onun neytral oxunun $1/\rho$ əyriliyi bu əyriliyin meyarı rolunu oynayır. Bundan başqa tirin əyintisi və onun dönmə bucağı da əyilməni xarakterizə edən kəmiyyətlərdir. Tirin en kəsiyinin ağırlıq mərkəzinin tirin ilkin oxuna perpendikulyar istiqamətdə yerdəyişməsinə

onun y əyintisi, əyilmiş oxa verilmiş nöqtədə çəkilən toxunanla tirin ilkin oxu arasında qalan bucağa tirin oxunun θ dönmə bucağı deyilir (Şəkil 18.47).

Əyinti ilə dönmə bucağı arasında aşağıdakı əlaqə vardır:

$$\theta = \operatorname{tg} \theta = dy/dx$$

Diferensial həndəsədən məlumdur ki, düzbucaqlı dekart koordinat sisteminə əyrinin əyriliyi onun koordinatlarından asılı olaraq aşağıdakı kimi tapılır:



Şəkil 18.47

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 v}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} . \quad (18.54)$$

Praktikada $(dv/dz)^2 \ll 1$ olduğu üçün (18.54) ifadəsi belə yazılır:

$$1/\rho \approx d^2 v / dz^2 .$$

Əyriliyin $1/\rho = M_x/EJ_x$ ifadəsini burada nəzərə alsaq tirin əyilmiş oxunun diferensial tənliyini aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = M_x / EJ_x$$

Tirin əyilmiş oxunun dəqiq diferensial tənliyi isə qeyri xətti formada olur:

$$\frac{\frac{d^2 v}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dz}\right)_2\right]^{3/2}} = \frac{M_x}{EJ_x},$$

Bu diferensial tənliyin birinci inteqralı tirin en kəsiklərinin dönmə bucağını ifadə edir:

$$\frac{dv}{dz} = \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C,$$

Burada $\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = dv/dz$. Həmin diferensial tənliyin ikinci inteqralı əyintilərin ifadəsini verir:

$$v(z) = \int dz \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + Cz + D.$$

Buradakı C və D inteqral sabitləri sərhəd şərtlərindən tapılır.

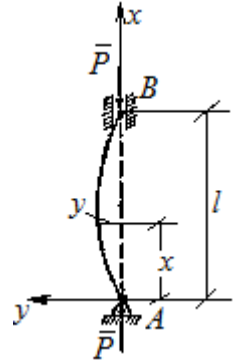
Tirin sərhəd şərtləri dayaqların növünə əsasən yazılır. Məsələn, uclarında oynaqla bərkidilmiş tirin dayaqlarındakı əyintilər 0-a bərabər olur, yəni $v(0) = v(l) = 0$. Konsol tirin bərkidilmə nöqtəsindəki əyinti və dönmə bucağı 0-a bərabər olur, yəni

$$v(0) = \frac{dv(z)}{dz} \Big|_{z=0} = 0 \text{ .}$$

Bu şərtlərə əsasən integral sabitləri tapılır.

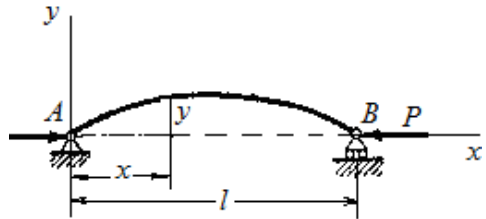
Düz oxlu tirin dayanıqlığı

A ucu oynaqlı tərpənməz bərkidilmiş, digər B ucu isə tirin oxu boyunca hərəkət edə bilən oynaqla bərkidilmiş tirin boyuna qüvvənin təsiri altında deformasiyasına baxaq. Tirin ağırlığını nəzərə almırıq (Şək.18.48 və Şək. 18.49).



Şəkil 18.48

Şəkində P boyuna qüvvənin təsiri altında tirin eninə deformasiyası zamanı əyilmiş oxunun diferensial tənliyini göstərilən koordinat sistemində əsasən yazırıq:



Şəkil 18.49

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) \quad (18.55)$$

Koordinat başlanğıcından (A nöqtəsindən) x məsafəsində yerləşən kəsikdə əyilmiş oxun ordinatını y ilə işarə etsək həmin kəsikdə əyici momenti tapırıq:

$$M(x) = -Py$$

Onda (18.55) diferensial tənliyini aşağıdakı kimi yazırıq:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py \quad \text{və ya} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad (18.56)$$

$$\text{Burada } k^2 = \frac{P}{EJ} \text{ işarə edirik (} k = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \text{).}$$

(18.56) diferensial tənliyinin həllini aşağıdakı kimi yazaq:

$$y = a \sin kx + b \cos kx$$

A və B integral sabitlərini sərhəd şərtlərinə əsasən tapılır.

Sərhəd şərtləri:

A nöqtəsində $x = 0$ olduqda əyinti $y = 0$, B nöqtəsində $x = l$ olduqda $y = 0$.

Birinci şərtə əsasən $B=0$ alırıq.

Əyilmiş oxunun tənliyi sinusoid olur: $y = a \sin kx$.

İkinci şərtə əsasən alırıq:

$$0 = \alpha \sin kl$$

Buradan $\sin kl = 0$ ($A=0$ olsaydı tir əyiməzdi, bu məsələnin şərtinə zidd olardı).

Beləliklə, $\sin kl = 0$, $kl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$. Onda

$k = \frac{n\pi}{l}$ olur. Burada n - istənilən tam ədəddir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi

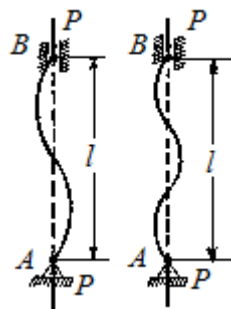
$k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$, olduğu üçün

$$\frac{P}{EJ} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot n^2 \quad \text{və} \quad P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot n^2$$

$n = 0$ olsa $P_n = 0$ olar, bu isə məsələnin şərtini ödəmir; ona görə də $n=1$ qəbul edək. Onda böhran qüvvənin qiymətini tapırıq:

$$P_n = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

Burada J tirin en kəsiyinin inersiya momentidir. Bu ifadəyə Eyler düsturu deyilir.



Şəkil 18.50

Məlumdur ki, kritik qüvvənin qiymətlərinə uyğun olaraq ($n=1, 2, 3\dots$) tirin əyilməsi iki, üç və s. yarım dalğa sinusoid şəklində olur (Şək.50).

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}; & k &= \frac{2\pi}{l}; & y &= a \sin \frac{2\pi x}{l}, \\ P_n &= \frac{9\pi^2 EJ}{l^2}; & k &= \frac{3\pi}{l}; & y &= a \sin \frac{3\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (18.57)$$

Beləliklə, kritik qüvvə nə qədər böyük olarsa tirin əyilmə sinusoidinin əyilmə nöqtələri o qədər çox olar. Aldığımız

$$P_n = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad \text{qiyməti kritik qüvvənin ən kiçik qiyməti olur.}$$

Tirin en kəsiyinin inersiya momentini $J_{oxp} = i^2 F_{xp}$; (burada i kəsiyin inersiya radiusu, F isə sahəsidir) işarə etsək, kritik normal gərginliyi aşağıdakı kimi tapa bilərik:

$$\sigma_n = \frac{P_n}{F_{xp}} = \frac{\pi^2 EJ_{xp}}{l^2 F_{xp}} = \frac{\pi^2 E i^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Burada $\lambda = l/i$ kəmiyyətinə milin çevikliyi deyilir və sıxılmış milin dayanıqlığı üçün əhəmiyyətlidir. Beləliklə, normal gərginliyin böhran qiyməti milin çevikliyi ilə tərs mütənasibdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Məmmədov H.Q. Nəzəri mexanika. I, II hissə, Bakı: «Maarif», 1965, 375 s.
2. Bəktaş T. Nəzəri mexanika. Bakı: «Maarif», 1981, 514 s.
3. Qədirov N.B. Nəzəri mexanika kursu. B.: Bakı Universiteti nəşriyyatı, 1997, 550 s.
4. Meşşerski İ.V. Nəzəri mexanika məsələləri, Bakı: «Maarif», 1984, 504 s.
5. Гурбанов Р.С., Ибрагимов И.Х., Бахшалиев В.И. Теоретическая и Прикладная Механика. Теория задачи, примеры. Lambert Academic Publishing, Saarbruchen, Berlin, Germany, 2012, 569 pp.
6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1, 2, М.: Наука, 1984, 504 с.
7. Nəsibov N.A. Nəzəri mexanikanın sürtünmə məsələləri. Statika. Dərs vəsaiti. Bakı: «Elm», 2001, 196 s.
8. Əliyev K.Ə., Qafarov I.M. Nəzəri mexanika. Mühazirələr və testlər (Statika). Bakı, 2003, 91 s.
9. Baxşəliyev V.İ. Nəzəri mexanika: məsələ həlli ilə. Dərs vəsaiti, Bakı: «Elm», 2012, 352 s.
10. Бахшалиев В.И. Графический метод решения задач системы параллельных сил и определения центра тяжести тел // ж. Теоретическая механика. Под ред. Академика Ю.Г. Мартиненко.- М.: Изд.-во Московского университета, 2003, вып. 24, с. 74-81

11. N.B. Qədirov, R.M. Fərəcov, V.İ. Baxşəliyev, A.H. Sofiyev. Zərbə məsələlərinin həllinə aid metodik göstəriş. Bakı, AzTU-nun nəşriyyatı, 1994, 39 s.
12. Süleymanov H.Ə. Materiallar müqaviməti, “Maarif” nəşriyyatı, Bakı, 1971, 376 s.
13. Sadıxov İ.R. Materiallar müqaviməti, Bakı, Təhsil, 2010, 376 s.
14. Həziyev İ.H. Tətbiqi mexanika, “Odlar Yurdu” nəşriyyatı, Bakı, 1998, 608 s.
15. Аркуша А.И. Техническая механика: Теоретическая механика и сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1989.-352 с.
16. Irving H. Shames. Engineering Mechanics. Statics. IV edition, – Pearson Education Asia Pvt. Ltd., 2003, 405 p.
17. Joseph F. Shelley. Engineering Mechanics. Dynamics. McGraw – Hill Book Company, 2006, 920 pp.
18. Barry Onouye. Statics and Sterength of Materials. Pearson Education. Inc., New Jersey, 2005, 465pp.
19. Jens Wittenburg. Dynamics of Multibody Systems. 2d edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, 223p.
20. Davitashvili N., Bakhshaliev V. Dynamics of Crank-Piston mechanisms. Springer Publisher, 2016, 242 pp.

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ	3
STATİKA	6
I Fəsil. Bərk cisim statikası	6
1.1. Statikanın əsas anlayışları.....	6
1.2. Statikanın aksiomları.....	7
1.3. Rəbitələr və onların reaksiya qüvvələri.....	9
1.4. Qüvvənin ox üzərindəki proyeksiyası.....	11
1.5. Qüvvənin müstəvi üzərindəki proyeksiyası.....	12
1.6. Qüvvənin nöqtəyə nəzərən momenti.....	12
1.7. Qüvvənin oxa nəzərən momenti.....	14
1.8. Cüt qüvvələr. Cütün momenti.....	14
1.9. İki paralel qüvvənin toplanması.....	15
1.10. Paralel qüvvələrin qrafik üsulla toplanması.....	16
II Fəsil. Bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sistemi	25
2.1. Bir nöqtədə tətbiq olunmuş üç qüvvə sistemi.....	26
2.2. Bir nöqtədə tətbiq olunmuş fəza qüvvələr sistemi.....	42
III Fəsil. İxtiyari qüvvələr sistemi	54
IV Fəsil. Paralel qüvvələr sistemi	62
V Fəsil. Müstəvi qüvvələr sistemi	72
VI Fəsil. Sürtünmə qüvvəli müstəvi qüvvələr sistemi	91
VII Fəsil. Bərk cismin ağırlıq mərkəzi	103
VIII Fəsil. Fermaların hesablanması metodları	111
KİNEMATİKA	115
IX Fəsil. Nöqtə kinematikas	115
9.1. Nöqtənin trayektoriya və hərəkət tənlikləri.....	115
9.2. Nöqtənin hərəkətinin koordinat üsulu ilə verilişində sürət və təcilin tapılması.....	130
9.3. Nöqtənin hərəkətinin təbii üsulla verilişində sürət və təcilin tapılması.....	150
X Fəsil. Bərk cisim kinematikas	164
10.1. Cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkəti.....	164
10.2. Fırlanma ötürmələri.....	172
XI Fəsil. Bərk cismin müstəvi hərəkəti	178

11.1. Bərk cismin müstəvi hərəkətinin tənlikləri	178
11.2. Yastı fiqur nöqtələrinin sürətlərinin tapılması.....	184
11.3. Tərpənən və tərpənməz sentroidlərin tənlikləri.....	199
11.4. Yastı fiqurun nöqtələrinin təcillərinin tapılması	209
XII Fəsil. Tərpənməz nöqtə ətrafında fırlanma hərəkəti ...	228
XIII fəsil. Nöqtənin mürəkkəb hərəkəti	244
13.1. Nöqtənin mürəkkəb hərəkətinin tənlikləri.....	244
13.2. Nöqtənin mürəkkəb hərəkətindəki sürət və təcilin tapılması	248
XIV fəsil. Bərk cismin mürəkkəb hərəkəti.....	262
14.1. Cismin iki kəsişən ox ətrafında fırlanma hərəkəti.....	262
14.2. Cismin iki paralel ox ətrafında fırlanma hərəkəti.....	267
D İ N A M İ K A.....	271
XV Fəsil. Maddi nöqtə dinamikası.....	272
15.1. Dinamikanın qanunları.....	272
15.2. Maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənlikləri	273
15.3. Dinamika məsələlərinin həlli ardıcılığı.....	275
XVI Fəsil. Dinamikanın ümumi teoremləri.....	303
16.1. Dinamikanın bəzi əsas anlayışları.....	303
16.2. Maddi nöqtənin və sistemin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teorem.....	306
16.3. Maddi nöqtənin və sistemin hərəkət miqdarı momentinin dəyişməsi haqqında teorem.....	308
16.4. Maddi nöqtənin və sistemin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teorem.....	309
16.5. Maddi nöqtənin rəqs hərəkəti.....	341
XVII Fəsil. Zərbə nəzəriyyəsi.....	346
MATERİALLAR MÜQAVİMƏTİ.....	380
XVIII Fəsil. Sadə deformasiyalar. Əsas anlayışlar.....	380
18.1. Düz oxlu milin dartılma və sıxılma deformasiyası.....	388
18.2. Sürüşmə deformasiyası.....	401
18.3. Düz oxlu milin burulma deformasiyası.....	414
18.4. Əyilmə deformasiyası.....	424
ƏDƏBİYYAT.....	443

CONTENTS

INTRODUCTION.....	3
STATICS.....	6
Chapter 1. Statics of rigid body	6
1.1. Main coseptions of Statics.....	6
1.2. Acsioms of Statics.....	7
1.3. Constraints and their reactions.....	9
1.4. Projection of force on the axis.....	11
1.5. Projection of force on the plane	12
1.6. Moment of force about a point.....	12
1.7. Moment of force about an axis	14
1.8. Couple forces. Moment of couple.....	14
1.9. Composition of two parallel forces.....	15
1.10. Composition of parallel forces by graphical method.	16
1.11. The solution steps of problems of Statics.....	23
Chapter 2. System of concurrent forces.....	25
2.1. System of three concurrent forces	26
2.2. System of space concurrent forces	42
Chapter 3. Arbitrary force system in space.....	54
Chapter 4. System of parallel forces.....	62
Chapter 5. Coplanar force system.....	72
Chapter 6. Coplanar force system with friction.....	91
Chapter 7. Centre of gravity of a rigid body.....	103
Chapter 8. Method of calculation of trusses.....	111
KINEMATICS.....	115
Chapter 9. Kinematics of a particle	115
9.1. Equations of motion and trajectory of a particle	115
9. 2. Velocity and acceleration of a particle when its motion described by coordinate method.....	130
9.3. Velocity and acceleration of a particle when its motion described by natural method.....	150
Chapter 10. Kinematics of a rigid body	164
10.1. Rotational motion of a rigid body	164
10.2. Transfers of rotary movements	172
Chapter 11. Plane motion of a rigid body	178

11.1. Equations of plane motion of a rigid body	178
11.2. Determination of velocities of a points of plane body	184
11.3. Equations of the moving and fixed centrodes	199
11.4. Determination of accelerations of a points of plane body	209
Chapter 12. Motion of rigid body having one fixed point ..	228
Chapter 13. Resultant motion of a particle	244
13.1. Equations of resultant motion of a particle	244
13.2. Determination of the velocity and acceleration of a particle in its resultant motion	248
Chapter 14. Resultant motion of a rigid body	262
14.1. Compositions of rotations about intersecting axes	262
14.2. Compositions of rotations about parallel axes	267
DYNAMICS	271
Chapter 15. Dynamics of a particle	272
15.1. Laws of Dynamics	272
15.2. Differential equatons of motion for a particle... ..	273
15.3. The solution steps of problems of Dynamics	275
Chapter 16. General theorems of Dynamics	303
16.1. Some main conceptions of Dynamics	303
16.2. Theorem of change in the momentum of a particle and a system	306
16.3. Theorem of change in the angular momentum of a particle and a system	308
16.4. Theorem of change in the kinetic energy of a particle and a system	309
16.5. Vibration of a particle	341
Chapter 17. Theory of impact	346
STRENGTH of MATERIALS	380
Chapter 18. Basic types of deformations. Main conseptions...	380
18.1. Tension and compression	388
18.2. Shear strain	401
18.3. Torsion strain	414
18.4. Bending strain	424
LITERATURE	443

Valeh İsmixan oğlu BAXŞƏLİ

TƏTBİQİ MEXANİKA
Nəzəri mexanika və materiallar müqaviməti

Dərs vəsaiti

BAKİ – “ELM” – 2016

Valeh İsmixan oğlu Baxşəliyev (Valeh Baxşəli)

Texnika elmləri doktoru, professor



Azərbaycan Texniki Universitetində Nəzəri və Tətbiqi Mexanika, Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin nəzdində ABŞ-ın Corciya Dövlət Universitetinin BBA və MBA Proqramları çərçivəsində ingilis dilində Texniki Mexanika, Materiallar müqaviməti və Maşın hissələri fənnlərini tədris edir.

«Maşınların, cihazların, aparatların dinamikası və möhkəmliyi» elmi istiqaməti üzrə neft sənayesində istifadə olunan maşın və mexanizmlərin uzunömürlüyü, möhkəmliyi və etibarlılığının yüksəldilməsi üçün ciddi elmi tədqiqatlar aparmış, ölkə daxilində və xaricdə 200-dək elmi məqalə, monoqrafiya və dərs vəsaitləri nəşr etdirmişdir. Onun elmi işlərinə Rusiya, Gürcüstan, Almaniya, Türkiyə, Rumıniya, Çexiya və s. ölkələrdə dissertasiya və məqalələrdə istinadlar olunmuşdur.

Akademik mübadilə xətti ilə Türkiyənin Bilkənt Universitetində (1995), Almaniyanın Darmştadt Texniki Universitetində (2006) və Karlsruhe Universitetində (2009) uzunmüddətli elmi ezamiyyətlərdə olmuşdur.

Avropa Birliyinin INTAS Proqramının (2006) iştirakçısı və Avropa Komissiyası Tədqiqat və Texnoloji İnkişaf üzrə 7-ci Çərçivə Proqramı (FP7, BS-ERA.NET, 2012-2015) hədəflərində Qafqaz ölkələrindən yeganə qalib Layihənin Elmi Konsorsiumunun (Almaniya, Türkiyə, Gürcüstan, Azərbaycan) rəhbəri olmuşdur. Hazırda Avropa Birliyinin Tədqiqat və İnnovasiya Proqramının (HORIZON2020) Azərbaycan üzrə milli koordinatorudur (NCP – National Contact Points).