

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL
NAZİRLİYİ**

AZƏRBAYCAN TEXNİKİ UNİVERSİTETİ

E. A. ASLANOV

NƏZƏRİ MEXANİKADAN MƏSƏLƏ HƏLLİ

Dinamika

Dərs vəsaiti

BAKİ – 2016

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL
NAZİRLİYİ**

AZƏRBAYCAN TEXNİKİ UNİVERSİTETİ

E. A. ASLANOV

NƏZƏRİ MEXANİKADAN MƏSƏLƏ HƏLLİ

Dinamika

Metodiki vəsait

BAKİ – 2016

M Ü N D Ə R İ C A T

G İ R İ Ş.....	3
1. Maddi nöqtə dinamikasının əsas	4
2.Maddi nöqtənin hərəkətinin differensia.....	5
3.Dinamikanın ikinci əsas məsələsi.....	7
4. Dinamikanın birinci əsas məsələsinə aid məsələlər.....	9
5. Dinamikanın ikinci əsas məsələsinə aid metodik göstərişlər və məsələlər.....	20
6. Təsir edən qüvvə zamandan aslı olduğu halda hərəkətin differensial tənliklərinin inteqrallanması.....	29
7. Maddi nöqtəyə təsir edən qüvvə nöqtənin koordinatlarından aslı olaraq dəyişdiyi halda hərəkətin differensial tənliklərinin inteqrallanması.....	32
8. Maddi nöqtəyə təsir edən qüvvə onun sürətindən aslı olaraq dəyişdikdə hərəkətin differensial tənliklərinin inteqrallanması.....	42
9. Qüvvə zamandan, məsafə və sürətdən aslı olaraq dəyişdiyi halda hərəkətin differensial tənliklərinin inteqrallanması....	51
10.İkinci qrup məsələlərin həllinə dair metodik göstərişlər.....	64
11. Mərkəzi qüvvə təsiri altında hərəkət	71
12. Birinci inteqrallar.....	72
13. Trayektoriyanın tənliyi. Keplerin birinci qanunu.....	75

14. Orbitin xarakterinin başlanğıc sürətdən aslılığı.....	76
15.Dairəvi və parabolok sürətlər.....	77
16. Keplerin üçüncü qanunu.....	79-103

YOT 531.06

Tərtib edən: Azərbaycan Texniki Universitetinin
«Mexanika» kafedrasının dosenti Fizika-
riyaziyyat elmləri namizədi, Aslanov Elbəy
Aslan oğlu.

Redaktor: Baxşəli Valeh İsmixan oğlu
(Azərbaycan Texniki Universitetinin
«Mexanika» kafedrasının professoru, t.e.d)

Rəyçilər: 1. Seydimaliyev Yusif Məmmədəli oğlu
(Bakı Dövlət Universitetinin «Nəzəri
mexanika və Bütöv mühit
mexanikası» kafedrasının müdiri f.r.e.n.,
dosent)

2. Şirəliyev Vəqif Əlibala oğlu (Azərbaycan Texniki
Universitetinin «Mexanika» Kafedrasının dosenti,
t.e.n.)

E. A. Aslanov, Nəzəri mexanikadan məsələ həlli üçün dərs vəsaiti. Dinamika .

Bakı, 2016, 103 s.

Dərs vəsaiti nəzəri mexanikanın dinamika bölməsinə aiddir.

Dərs vəsaitində dinamikanın birinci və ikinci əsas məsələsinin həllinə aid qısa nəzəri məlumat və məsələlərin həlli qaydası verilmişdir.

Bundan əlavə maddi nöqtənin mərkəzi qüvvə təsiri altında hərəkətinə aid izahat verilmiş və məsələlər həll edilmişdir.

Dərs vəsaiti texniki universitetlərin bakalavr və magistr pillələrində təhsil alan tələbələr üçündür. Dərs vəsaiti elmi işçilər, mühəndislər və texniki işçilər üçün də faydalı ola bilər.

Mövzuya aid məsələlər İ.V.Meşşerskinin «Nəzəri mexanikadan məsələlər» kitabından götürülmüşdür.

E.A.Aslanov, 2016

UOT 531.06

Tərtib edən: Azərbaycan Texniki Universitetinin
«Mexanika» kafedrasının dosenti Fizika-
riyaziyyat elmləri namizədi, Aslanov Elbəy
Aslan oğlu.

Redaktor: Baxşəli Valeh İsmixan oğlu
(Azərbaycan Texniki Universitetinin
«Mexanika» kafedrasının professoru, t.e.d)

- Rəyçilər: 1.Seydimaliyev Yusif Məmmədəli oğlu
(Bakı Dövlət Universitetinin «Nəzəri
mexanika və Bütöv mühit
mexanikası» kafedrasının müdiri f.r.e.n.,
dosent)
2. Şirəliyev Vaqif Əlibala oğlu (Azərbaycan Texniki
Universitetinin «Mexanika» Kafedrasının dosenti,
t.e.n.)

Dərs vəsaitində metodik göstərişdə dinamikanın birinci
və ikinci əsas məsələsinin həllinə aid qısa nəzəri məlumat və
məsələlərin həlli qaydası verilmişdir.

Bundan əlavə maddi nöqtənin mərkəzi qüvvə təsiri
altında hərəkətinə aid məsələlər həll edilmişdir.

Mövzuya aid məsələlər İ.V.Meşşerskinin «Nəzəri mexanikadan məsələlər» kitabından götürülmüşdür.

GİRİŞ

Ali texniki mədəblərdə oxuyan tələbələrin mühəndis kimi formalaşmasında «Nəzəri mexanika» fənni xüsusi yer tutur.

Nəzəri mexanika 3 hissəyə bölünür: statika, kinematika və dinamika.

Dinamika «Nəzəri mexanika»nın bir hissəsi olub, maddi cisimlərin hərəkət qanunlarını öyrənir. Burada cisimlərin hərəkətini yaradan səbəb (qüvvə) və hərəkət edən cisimlərin ətalətliyi (kütlə nəzərə alınaraq öyrənilir. Dinamikanın əsasını İ. Nyutonun qanunları təşkil edir.

Dinamika iki yerə bölünür.

1. Maddi nöqtənin dinamikası.
2. Maddi sistemin dinamikası.

Təklif olunan tədris metodiki vəsait nöqtə dinamikasına aid olub, tələbələrə müstəqil məsələ həll etmək və nəzəri materialı dərinlən mənimsəmək vərdisi yaratmaq məqsədi ilə yazılmışdır.

Burada nöqtə dinamikasının 2 əsas məsələlərinə, təsir edən qüvvənin məsafədən, zamandan və sürətdən aslı olunan hallarına, əyrixətli hərəkətə və rəqsi hərəkətə aid məsələlər həll edilmişdir.

Nəzəri mexanikada cisimlərin mərkəzi qüvvə təsiri altında hərəkəti böyük əhəmiyyət kəsb edir. Çünki, Yer in süni peykləri, kosmik gəmilər, Aya və digər planetlərə buraxılan avtomat stansiyalar, insanın Aya uçuşu və s. Mərkəzi qüvvə təsiri altında baş verir.

Dərs vəsaitinin eyni zamanda mərkəzi qüvvə təsiri altında hərəkət edən cisim və maddi nöqtənin hərəkətinə aid qısa nəzəri məlumat verilmiş və məsələlər həll edilmişdir.

Mövzuya aid məsələlər İ.V.Meşşerskinin «Нязяри механикадан мясяляляр» китабындан seçilmişdir. Seçilmiş məsələlərin dərinlik dərəcəsindən və xüsusiyyətlərindən aslı olaraq bir qrup məsələlərin müfəssəl tam həlli, digər qrup məsələlər isə müstəqil həll etmək üçün təklif olunur. Dərs vəsaiti əsasən Bakalavr pilləsi üçün nəzərdə tutulmuşdur. Dərs vəsaitindən magistr və nəzəri mexanikaya marağı olan mühəndislərdə istifadə edə bilərlər.

Mərkəzi qüvvə təsiri altında hərəkət.

§1. Məsələnin qoyuluşu. Hərəkətin differensial tənliyi.

İki maddi nöqtə bir – birini modulu

$$F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(1,1)

formulu ilə hesablanan qüvvə ilə cəzb edirlər. Burada m_1 və m_2 – çuqun olaraq birinci və ikinci maddi nöqtələrin kütlələri, f – ümumdünya cazibə sabiti, r isə nöqtələr arasındakı məsafədir.

(1.1) formulu Nyuton tərəfindən kəşf olunmuş ümumdünya cazibə qanununu ifadə edir. Cazibə qüvvəsi nöqtələri birləşdirən düz xətt boyunca yönəlir.

Boş fəzada bir – birini ümumdünya cazibə qanunu ilə cəzb edən iki maddi nöqtənin mütləq hərəkətlərini və yaxud da nöqtələrdən birinin digərinə nəzərən nisbi hərəkətini öyrənən məsələ iki cisim məsələsi adlanır.

Maddi nöqtələrin özlərini və kütlələrini eyni bir hərflə, uyğun olaraq M və m ilə işarə edək. M və m nöqtələrinin mütləq hərəkətlərinin və m nöqtəsinin M nöqtəsinə nəzərən nisbi hərəkətini öyrənək.

Mərkəzi O nöqtəsində olan mütləq $o\ x_1\ y_1\ z_1$ və mərkəzi M nöqtəsində olan irəliləmə hərəkəti edən $M\ xyz$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemləri götürək. M və m nöqtələrinin O nöqtəsinə nəzərən radius vektorlarını $\overline{\rho_M}$ və $\overline{\rho_m}$ ilə m nöqtəsinin M nöqtəsinə nəzərən radius vektorunu isə $\overline{r}$ ilə işarə edək.

M və m nöqtələrinin mütləq koordinat sisteminə nəzərən hərəkətlərinin diferensial tənlikləri çuqun olaraq,

$$\frac{d^2 \overline{\rho_M}}{dt^2} = f \frac{M}{r^3} \overline{r}$$

(1.2)

və

$$\frac{d^2 \overline{\rho_M}}{dt^2} = f \frac{M}{r^3} r$$

(1.3)

şəklində olacaq.

(1.2) və (1.3) tənlikləri M və m nöqtələrinin mütləq koordinat sisteminə nəzərən hərəkətlərinin diferensial tənlikləridir.

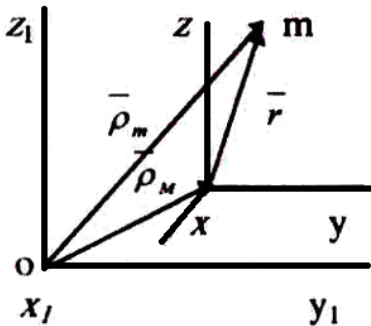
(1.3) tənliyi ilə (1.2) tənliyini tərəf – tərəfə çıxsaq.

$\overline{\rho_M} - \overline{\rho_m} = \overline{r}$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\frac{d^2 \overline{r_M}}{dt^2} = -\mu \frac{\overline{r}}{r^2}$$

(1.4)

alınır. (1.4) tənliklərindən (1.2) tənliklərini çıxsaq, (1.4) tənliklərini



dilib.

(1.4) tənliyi m maddi nöqtəsinin M xyz koordinat sisteminə nəzərən nisbi hərəkətinin vektorial formada diferensial tənliyidir. M nöqtəsi cəzb edici mərkəz və yaxudda cisim adlanır.

İndi isə fərz edək ki, mərkəzi M cismi tərpənməzdir. m kütləli nöqtənin M xyz koordinat sisteminə nəzərən hərəkətini öyrənək. Bu məsələ məhdud iki cisim məsələsi adlanır. Bu məsələnin diferensial tənliyini tərtib etsək, görərik ki, həmin tənlik (1.4) tənliyi ilə üst-üstə düşür. Ancaq bu halda $\mu = f \cdot M$ olur. Beləliklə, biz bu modelə yuxarıdakı məsələdə cəzb olunan m kütləsinin çox-çox kiçik kütləli cismin başqa cisimdə yaratdığı təcili nəzərə almırıq.

§2. Birinci inteqrallar.

(1.4) tənliyinin aşağıdakı birinci inteqralları vardır:

a) enerji inteqralı

$$v^2 - \frac{2\mu}{r_\sigma} = h$$

(2.1)

burada v m nöqtəsinin M nöqtəsinə nəzərən nisbi sürətinin modulu h isə enerji sabiti olub,

$$h = v_o^2 - \frac{2\mu}{r_o}$$

(2.2)

düsturu vasitəsilə ilə hesablanır. Burada r_o və v_o m nöqtəsinin başlanğıc vəziyyətinin radius vektorunun və başlanğıc sürətinin modullarıdır. (2.1) enerji inteqralını almaq üçün (1.4) tənliyinin m nöqtəsinin $\vec{dr}$ yerdəyişmə vektoruna hər iki tərəfdən skalyar vurmaq lazımdır.

b) sahə inteqralı

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{c}$$

(2.3)

Burada $\vec{r}$ və $\vec{v}$ uyğun olaraq m nöqtəsinin radius vektoru və sürət vektorudur. $\vec{c}$ - sabit vektordur və sahənin vektor sabiti adlanır. (2.3) sahə inteqralını

almaq üçün (1.4) hərəkət tənliyinin hər iki tərəfini $\vec{r}$ - radius vektoruna sol tərəfdən vektorial vurmaq kifayətdir.

(2.3) sahə integralının hər tərəfini $\vec{r}$ radius vektoruna skalyar vursaq,

$$\vec{c} \cdot \vec{r} = 0$$

və yaxud da

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0 \quad (2.4)$$

alarıq. Burada (x,y,z) m nöqtəsinin koordinatları (c_1, c_2, c_3) isə sahə vektor sabitinin koordinatlarıdır.

(2.4)-dən göründüyü kimi ümumdünya cazibə qüvvəsinin təsiri altında m – nöqtəsi M – nöqtəsindən keçən müstəvi üzərində hərəkət edir. Əgər m nöqtəsinin trayektoriyası yerləşən müstəvini $Mxyz$ müstəvisi qəbul etsək,

$(Z=0)$ (2.3) sahə integralı

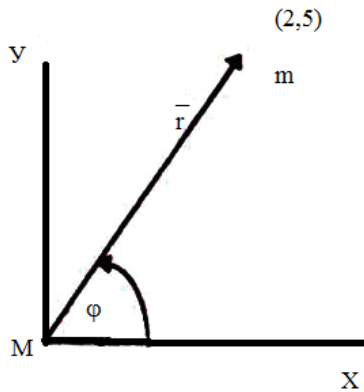
$$xy - yx = c \quad (2.5)$$

şəklində yazılır. Əgər polyar koordinat sisteminə keçsək (2.5) sahə integralsını

$$r^2 \dot{\varphi} = c$$

(2.6)

şəklində yazı bilərik.



(2.6) ifadəsi Keplerin ikinci qanununun riyazi ifadəsidir: maddi nöqtə ümumdünya cazibə qüvvəsinin təsiri altında hərəkət etdikdə, onun sektorial sürəti sabit qalır. Qeyd edək ki, buradan Keplerin klassik formada deyilmiş ikinci qanunu da alınır.

c) Laplas integralı:

$$\bar{c} \times \bar{v} + \frac{\bar{\mu}r}{r} = -\bar{\lambda}$$

(2.7)

Burada $\bar{\lambda}$ - sabit vektoru Laplas vektoru adlanır.

(2.7) Laplas inteqralının almaq üçün (1.4) hərəkət tənliyinin sol tərəfini (2.3) sahə inteqralının sol tərəfinə, sağ tərəfini isə sağ tərəfinə vektorial vurmaq kifayətdir.

Qeyd edək ki, m nöqtəsinin hərəkətinin (1.4) vektorial tənliyini proyeksiyalarla yazsaq, üç dənə 2-ci tərtibli differensial tənliklər sistemi alarıq. Bu sistemin bir – birindən asılı olmayan yalnız 6 birinci inteqralı ola bilər. Biz isə (1.4) tənliyinin 7 birinci inteqralını almışıq: enerji inteqralı, skalyar şəkildə üç dənə sahə inteqralı və üç dənə Laplas inteqralı. Beləliklə, alınan birinci inteqralların sayı lazım olan birinci inteqralların sayından çoxdur. Buradan alınır ki, birinci inteqrallar arasında asılılıq vardır.

(2.1) enerji, (2.3) sahə və (2.7) Laplas inteqralları arasında aşağıdakı kimi asılılıqlar vardır.

$$\bar{\lambda} \cdot \bar{c} = 0$$

(2.8)

və

$$\lambda^2 = \mu^2 + hc^2$$

(2.9)

(2.8) – i almaq üçün (2.7) – ni $\bar{c}$ vektoruna skalyar vurmaq lazımdır. (2.9) – u almaq üçün isə (2.7) – ni öz – özünə skalyar vurmaq kifayətdir.

(2.3) sahə integrallından iki vektorun vektorial hasilinin tərifinə görə alırıq ki, $\bar{c}$ vektoru trayektoriya müstəvisinə perpendikulyardır. (2.8) – dən isə $\bar{\lambda}$ – Laplas vektorunun trayektoriya müstəvisində yerləşdiyi alınır.

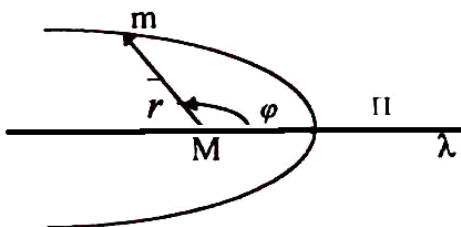
§3. Trayektoriyanın tənliyi. Keplerin birinci qanunu.

(2.7) Laplas integrəlinin hər tərəfinin $\bar{r}$ - radius vektoruna skalyar vursaq və sahə integrəlini nəzərə alsaq, trayektoriyanın tənliyini

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

(3.1.)

şəklində alırıq.



Burada

Π

$$e = \frac{\lambda}{\mu},$$

$$p = \frac{c^2}{\mu}$$

(3.2)

$\varphi = (\bar{r}\bar{\lambda})$ bucağı isə həqiqi anomaliya bucağı adlanır.

(3.1) tənliyi fokusu M nöqtəsində olan konik kəsiyin tənliyidir. c və p konik kəsiyin ekssentrisiteti

və fokal parametridir. Polyar oxun istiqaməti $\bar{\lambda}$ Laplas vektorunun istiqaməti ilə müəyyən olunur və apsid xətti adlanır. Çox vaxt nöqtənin trayektoriyası əvəzinə astronomiyadan götürülmüş nöqtənin orbiti terminini işlədəcəyik. Analitik həndəsədən məlumdur ki, $e=0$ olduqda (3.1) tənliyi ilə müəyyən olunan orbita çevrə, $e < 1$ olduqda ellips, $e = 1$ olduqda parabola, $e > 1$ olduqda isə hiperbola olacaq. Beləliklə, (3.1) tənliyindən planetlər üçün Keplerin birinci qanununu alırıq: Planetlər fokusların birində Günəş yerləşən ellipslər üzrə hərəkət edirlər. Orbitin fokusa ən yaxın Π nöqtəsi orbitin perikeyi, orbit ellips olduqda isə ən uzaq A nöqtəsi orbitin apokeyi adlanır.

Tutaq ki, orbita ellipsdir, onda (3.1) tənliyindən $\varphi = 0$ və $\varphi = \pi$ olduqda orbitin perikeyi və apokeyi üçün radius vektorlar

$$r_{\Pi} = \frac{p}{1+e}, \quad r_A = \frac{p}{1-e} \quad (3.3)$$

şəklində tapılır.

§4. Orbitin xarakterinin başlanğıc sürətdən asılılığı.

Tutaq ki, nöqtənin orbiti düz xətt deyil, yəni $C \neq 0$. Onda nöqtənin $\overline{r_0}$ başlanğıc vəziyyəti verilibsə, nöqtənin orbitinin xarakteri onun $\overline{v_0}$ başlanğıc sürətindən asılıdır. Doğrudan da (2.9) – dan və (3.2) – dən

$$e = \sqrt{1 + h \cdot \frac{e^2}{\mu^2}}$$

(4.1)

alarıq. Burada h enerji sabiti (2.2) formulu vasitəsi ilə hesablanır. (4.1) – dən görünür ki, $h < 0$ olduqda orbita elliptik, $h = 0$ olduqda orbita hiperbolik olur. Beləliklə, h enerji sabitinin (2.2) ifadəsini nəzərə alsaq, $v_0 < \sqrt{2\mu/r_0}$ olduqda orbita elliptik olur. Bu bərabərsizliyi ödəyən sürətlər elliptik sürətlər adlanır. $v_0 = \sqrt{2\mu/r_0}$ olduqda orbita parabola olur və sürət

parabolik sürət adlanır. $v_o > \sqrt{2\mu/r_o}$ olduqda orbita hiperbolik olur və sürət hiperbolik sürət adlanır.

Analitik həndəsədən məlumdur ki, ellipsin (hiperbolanın) p fokal parametri və e eksentrisiteti ellipsin a və b yarımoxları (hiperbolanın a həqiqi və b xəyali yarım oxları) vasitəsilə aşağıdakı formullar vasitəsilə müəyyən olunur.

$$e = \sqrt{1 \pm \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad p = \frac{b^2}{a}$$

(4.2)

(4.2) formulunda ellips üçün mənfi işarəsi, hiperbola üçün müsbət işarəsi götürülür. (3.2)-ni və (4.2)-ni (4.1)-də nəzərə alsaq, elliptik orbit üçün $h = -\mu/a$, hiperbolik orbit üçün isə $h = \mu/a$ alarıq.

§5. Dairəvi və parabolik sürətlər.

Birinci və ikinci kosmik sürətlər.

Fəzanın verilən nöqtəsində maddi nöqtə aldığı sürət nəticəsində cəzbedici mərkəz ətrafında dairəvi orbit üzrə hərəkət edərsə, bu sürətə dairəvi sürət deyilir və V_d ilə işarə olunur.

$$V_d = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (5.1)$$

Düsturu vasitəsilə hesablanır. Burada r nöqtəsinin cəzbedici cismin mərkəzindən olan məsafəsidir. Doğrudan da, maddi nöqtə dairəvi orbit üzrə müntəzəm hərəkət etdiyindən, onun təcili yalnız radial təcildən ibarət olacaq, onda

$$\frac{mV_a^2}{r} = f \frac{mM}{r^2}$$

və yaxud da (5.1) bərabərliyinin doğruluğu alınacaq.

Fəzanın verilən nöqtəsində maddi nöqtə aldığı minimal sürət nəticəsində cəzbedici mərkəzdən istənilən böyük məsafəyə uzaqlaşarsa, bu sürətə parabolik sürət deyilir və V_{II} ilə işarə olunur,

$$V_{\Pi} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2V_a^-}$$

(5.2)

düsturu ilə hesablanır.

Doğrudan da, $v_o \geq \sqrt{2\mu/r}$ olduqda, maddi nöqtə cəzbedici mərkəzdən sonsuz uzaqlaşır və sürətlərdən ən kiçiyi (5.2) formulu ilə müəyyən olunur.

Tutaq ki, mərkəzi cisim sıxlığı kürəvi paylanmış kürədir. Onda bu cisim üçün birinci və ikinci sürət anlayışı daxil etmək olar.

Cəzb edən cismin səthində dairəvi sürətə birinci kosmik sürət, parabolik sürətə isə ikinci kosmik sürət deyilir və uyğun olaraq V_I və V_{II} işarə edilir.

Xüsusi halda R radiuslu və g sərbəstdüşmə təcilinə malik planetlər üçün birinci və ikinci sürətləri müəyyən edək.

Planetlərin səthində ümumdünya cazibə qanununa görə

$$mg = \mu \frac{m}{R_2}$$

Buradan

$$\mu = gR^2$$

(5.3)

alırıq. (5.3) ifadəsini (5.1) və (5.2) yerinə yazsaq.

$$V_I = \sqrt{gR}$$

(5.4)

və

$$V_{II} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2V_I}$$

(5.5)

alarıq. Xüsusi halda yer üçün $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $R = 6371 \text{ km}$ olduğunda $V_I = 7,91 \text{ km/s}$, $V_{II} = 11,2 \text{ km/s}$ olduğunu alırıq.

§6. Keplerin III qanunu.

Tutaq ki, m nöqtəsinin orbiti yarım oxları a və b olan ellipsdir. Onda ellipsin sahəsi (4.2)-yə görə

$$S = \pi ab = \pi \sqrt{a^2 p}$$

(6.1)

düsturu ilə hesablanacaq.

Nöqtənin orbit üzrə fırlanma periodunu T ilə işarə etsək, ellipsin sahəsi digər tərəfdən

$$S = \frac{1}{2} CT = \frac{1}{2} \sqrt{\mu p T}$$

(6.2)

düsturu ilə hesablanacaq. Burada sahə integralının C sabiti üçün (3.2) formulu nəzərə alınmışdır.

(6.1) və (6.2) bərabərləşdirsək,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}$$

(6.3)

olduğunu alarıq.

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

(6.4)

Bucaq sürəti orta hərəkət adlanır.

İndi isə kütlələri m_1 və m_2 olan iki maddi nöqtəyə baxaq. Bu nöqtələrin qarşılıqlı təsir qüvvələrini nəzərə almasaq, onda bu nöqtələrdən hər

biri cəzb edici mərkəz ətrafında ayrı – ayrılıqda konik kəsiklər üzrə hərəkət edəcəklər. Tutaq ki, nöqtələrin orbitləri allipsdir, onda (6.3) görə

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{\mu_1}, \quad \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{\mu^2}$$

olduğunu alarıq. Buradan isə

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

(6.5)

alınır. $\mu_1 = f(m_1 + M)$, $\mu_2 = f(m_2 + M)$ olduğunu (6.2) nəzərə alsaq,

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{\left(1 + \frac{m_2}{M}\right)}{\left(1 + \frac{m_1}{M}\right)} \cdot \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

(6.6)

olar.

Beləliklə, Keplerin dəqiqləşmiş III qanununu alırıq. Xüsusi halda $m_1 \ll M$, $m_2 \ll M$ olarsa, (6.6) – nı

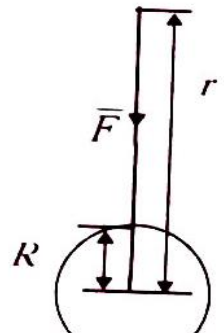
$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

(6.7)

şəklində yazıla bilər. (6.7) Keplerin III qanununun riyazi ifadəsidir: planetlərin günəş ətrafında fırlanma periodlarının kvadratları nisbəti orbitlərin böyük yarımoxlarının kubları nisbətində bərabərdir.

Məsələ 51.1.

Kütləsi m olan maddi nöqtəyə təsir edən ümumdünya cazibə qüvvəsinin qiyməti $F = m \frac{\mu}{r^2}$ bərabərliyi ilə təyin olunur. Burada $\mu = fM$ cəzb edən mərkəzin qravitasiya parametri (M -onun kütləsi, f – qravitasiya sabitidir) və r – cazibə mərkəzindən cəlb olunan nöqtə arasındakı məsafədir. Fəza cisimləri R radiusunu və cazibə qüvvəsinin onun səthindəki təcili bilərək, fəza cisminin μ qravitasiya



tapmalı və onu yer üçün hesablamalı. Yerin radiusu $R = 6370 \text{ km}$, $g = 9,81 \text{ m/san}^2$ qəbul etməli.

Verilir:

$$F = m \frac{\mu}{r^2}$$

$$\mu = fM$$

$$R = 6370 \text{ km}$$

$$g = 9,81 \text{ m/san}^2$$

$$\mu = ?$$

Həlli:

Bilirik ki, istənilən r üçün cazibə qüvvəsinin qiyməti $F = m \frac{\mu}{r^2}$ düsturu ilə hesablanır. Xüsusi halda maddi nöqtə fəza cisminin səthində olduqda, yəni $r=R$ olduqda $F=mg$ olur. Bunu nəzərə alsaq. Xüsusi halda Yer üçün $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. $R = 6370 \text{ km}$ olduğundan $\mu = 3,98 \cdot 10^5 \text{ km}^3/\text{san}^2$ olur.

Məsələ 51.2.

Fəza cisminin μ_n qravitasiya parametrini və onun səthi üzərində cazibə qüvvəsinin g_n təcilini

tapmalı. Cismnin M_n kütləsinin və R_n radiusunun yerin M kütləsinə və R radiusuna olan nisbətləri məlumdur. Həmin nisbətləri aşağıdakı cədvəldə göstərilən kimi qəbul edib. M_n və g_n kəmiyyətlərini Ay, Venera, Mars və Yupiter üçün hesablamalı.

Verilir:

$$M_n : M = a$$

$$R_n : R = b$$

$$\mu_n = ?$$

$$g_n = ?$$

Həlli:

Bilirik ki, istənilən planetin μ_n qravitasiya parametri üçün

$$\mu_n = f \cdot M_n, \quad \mu_n g_n R_n^2$$

				M M	P P
Ай	0,0123	0,273	Марс	0,107	0,535
Венера	0,814	0,953	Юпитер	317	10,95

(1)

(1) – i xüsusi halda Yer üçün yazsaq.

$$\mu = f \cdot M \qquad \mu = gR^2$$

(2)

alırıq.

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2, R = 6370 \text{ km}, \mu = 3,98 \cdot 10^5 \text{ km}^3/\text{san}^2.$$

(1) və (2)-dən

$$\mu_n = \mu \frac{M_n}{M}, \quad g_n = g \frac{M_n}{M} : \left(\frac{R_n}{R} \right)^2$$

(3)

alırıq.

(3) formulları vasitəsilə ilə lazım olan bütün planetlərin qravitasiya parametrlərini və sərbəst düşmə tənliklərini tapa bilərik.

Məsələ 51.3.

Maddi nöqtə ümumcazibə qüvvəsi təsiri altında radiusu R olan fəza cisminin səthindən H hündürlükdə

dairəvi orbit üzrə müntəzəm hərəkət edir. Maddi nöqtənin hərəkətinin v_1 sürətini və T dövr periodunu tapmalı.

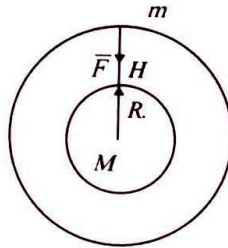
Verilir:

R, H

$v_1 = \text{const},$

$$F = \frac{\mu m}{r^2}$$

$$\overline{v_1 - ?, T - ?}$$



Həlli:

Maddi nöqtə dairəvi orbit üzrə müntəzəm hərəkət etdiyi üçün toxunan təcil

$$W_\tau = \frac{dv_1}{dt} = 0$$

olacaq. Normal təcil isə

$$W_n = \frac{v_1^2}{r}$$

(1)

Düsturu ilə hesablanacaq. Aydındır ki, normal təcil, radial təcillə üst – üstə düşəcək və

$$m \frac{v_1^2}{r} = \mu \frac{m}{r}$$

və yaxud

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

(2)

Olacaq. $\mu = gR^2$, $r=R+H$ olduğunu (2)-də nəzərə alsaq,

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H}}$$

(3)

alırıq.

Maddi nöqtənin orbitinin uzunluğu $2\pi r$, sürəti v_1 olduğundan T dövr periodu

$$T = \frac{2\pi r}{v_1} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{\mu}} = 2\pi \frac{(R+H)^{3/2}}{R\sqrt{g}}$$

(4)

düsturu ilə hesablanacaq.

Məsələ 51.5.

Ekvator müstəvisində dövr edən yerin dairəvi peykini hansı yüksəklikdən buraxmaq lazımdır ki, o həmişə yerin eyni nöqtəsinin yuxarısında olsun.

Verilir:

Yerin n_j bucaq sürəti peykin n_n

Bucaq sürətinə bərabərdir. $n_j = n_n$

H - ?

Həlli:

Yer 24 saat ərzində 1 dövr etdiyindən

$$n_j = \frac{2\pi}{24\text{saat}} = \frac{\pi}{12 \cdot 60 \cdot 60\text{saat}}$$

(1)

51.3. nömrəli məsələdə radiusu R fəza cisminin səthindən H hündürlükdə dairəvi orbit üzrə hərəkət edən maddi nöqtənin sürəti üçün

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{R+H}}$$

(2)

düsturunu almışdıq. Onda

$$n_n = \frac{v_1}{R+H} = \sqrt{\frac{\mu}{(R+H)^3}}$$

(3)

(1) ilə (3) – u bərabərləşdirsək,

(2)

$$H = \sqrt{\frac{\mu}{n_1^2}} - R$$

(4)

alarıq. Yer üçün $\mu = 3,98 \cdot 10^5 \text{ km}^3/\text{san}^2$. $R=6370 \text{ km}$ olduğunu (4)-də yerinə yazsaq, $H=35800 \text{ km}$ alarıq.

Məsələ 51.7.

Kütləsi m olan nöqtə $F = m \frac{\mu}{r^2}$ ümumdünya

cazibə qanunu üzrə tərpənməz mərkəzə cəzb olunur.



Burada μ cazibə mərkəzinin qravitasiya parametridir.
Enerji inteqralını tapmalı.

Verilir:

$$F = \frac{\mu m}{r^2}$$

Enerji inteqralını təyin etməli?

Həlli:

Aydınır ki, $\bar{F}$ cazibə qüvvəsini

$$\bar{F} = -m \frac{\mu}{r^3} \bar{r} \quad (1)$$

Şəklində yazmaq olar.

(1) koordinat oxlarının üzərinə proyeksiyalasaq,

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -m \frac{\gamma}{r^3} X \\ F_y &= -m \frac{\gamma}{r^3} Y \\ F_z &= -m \frac{\gamma}{r^3} Z \end{aligned} \right\}$$

(2)

alırıq. Burada $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Potensial enerjini Π ilə işarə edək. Onda potensial enerjinin tərifinə görə

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= -F_x = m \frac{\mu}{r^3} x \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} &= -F_y = m \frac{\mu}{r^3} y \\ \frac{\partial \Pi}{\partial z} &= -F_z = m \frac{\mu}{r^3} z \end{aligned} \right\}$$

(3)

olar. Onda

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz = m \frac{\mu}{r^3} (x dx + y dy + z dz) = m \frac{\mu}{r^5} r dr$$

(4)

(4)-ün hər tərəfini integrallasaq,

$$\Pi = -m \frac{\mu}{r}$$

(5)

alırıq. Kinetik enerji

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

(6)

olduğundan, tam enerji

$$T + \Pi = C$$

Və yaxud da

$$v^2 - 2 \frac{\mu}{r} = h$$

(7)

Şəklində olacaq.

Məsələ 51.9.

Sonsuzluqda sürəti $v_{\infty} = 10$ km/san olan meteorit yer atmosferinə hansı sürətlə daxil olur.

Verilir:

$$r = \infty$$

$$v_{\infty} = 10 \text{ km/san}$$

$$r_1 = R.$$

$$v_1 = ?$$

Həlli:

Enerjinin saxlanması qanununa görə

$$v_{\infty}^2 - 2 \frac{\mu}{\infty} = v_1^2 - 2 \frac{\mu}{R}$$

(1)

Verilənləri (1)-də nəzərə alsaq, $v_1 = 15 \text{ km/san}$ alarıq.

Məsələ 51.12.

Maddi nöqtə mərkəzi qüvvə təsiri altında hərəkət edir. Nöqtənin r radius vektorunun t zamanından φ polyar bucağı vasitəsilə mürəkkəb asılı olduğunu qəbul edib, onun sürət və təcilinin tapmalı.

Verilir:

Mərkəzi $\overline{F}$ qüvvəsi,

$$\underline{r = r(\varphi(t))}$$

$$V - ? \quad W_\varphi - ? \quad W_r = ?$$

Həlli:

Maddi nöqtəyə təsir edən qüvvə mərkəzi olduğu üçün sahələr qanunu doldurur və bu qanun polyar koordinat sistemində

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c$$

(1)

şəklində yazılır. Burada r nöqtənin radius – vektoru, φ isə polyar bucağıdır. c isə ikiqat sektorial sürətidir. Nöqtənin sürətini $\overline{v_r}$ - radial və $\overline{v_\varphi}$ - transversal toplananlarına ayıraq.

Bilirik ki,

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

(2)

və

$$v_{\varphi} = r \frac{d\varphi}{dt}$$

(3)

düsturları ilə tanılır.

R radius vektoru t – nin mürəkkəb funksiyası olduğundan

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

(4)

alırıq.

(1)-i (3) və (4)-də nəzərə alsaq,

$$v_r = \frac{c}{r^r} \frac{dr}{d\varphi}$$

(2`)

və

$$v_{\varphi} = \frac{c}{r}$$

(3`)

olar. Onda, nöqtənin sürəti üçün

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \frac{c^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{c^2}{r^2}$$

(5)

olaraq. Yeni $r = \frac{1}{u}$ əvəzləməsi qəbul edək, onda

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\varphi}$$

(6)

olar. (6)-nı (5) – də nəzərə alsaq,

$$v^2 = c^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 \right]$$

(7)

alırıq.

İndi isə təcili təyinedək. Bunun üçün təcilin radial $\bar{w}_r$ və trasnversal $\bar{w}_\varphi$ toplananlarını təyin edək. Qüvvə mərkəzi qüvvə olduğunu, yəni $F_\varphi = 0$ olduğunu nəzərə alsaq, $w_\varphi = 0$ alırıq.

Bilirik ki, radial təcil

$$W_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

(8)

düsturu ilə hesablanır.

(1) ifadəsindən istifadə etsək,

$$r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{c^2}{r^3} = c^2 u^3$$

(9)

alınar.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt}$$

Mürəkkəb törəmə formulunda (1) və (2`)
formullarını nəzərə alsaq,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - c^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2}$$

(10)

alırıq.

(9) və (10) ifadələrini (8)-də yerinə yazsaq

$$W_r = -c^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right)$$

(11)

olar. Əgər qüvvə dəfətmə qüvvəsi olsa (11)-də işarə müsbət olacaqdır.

Məsələ 51.13.

Polyar koordinat sistemində tənliyi $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$

olan konusvari cəth üzrə m kütləli nöqtə mərkəzi qüvvə təsiri altında hərəkət edir, burada p və e trayektoriyanın parametri və eksentrisitetidir. Nöqtənin hansı qüvvə təsiri altında hərəkət etdiyini təyin etməli.

Verilir:

$m,$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

$$F_{\varphi} - ? \quad F_r - ?$$

Həlli:

Məsələnin şərtinə görə maddi nöqtəyə təsir edən qüvvə mərkəzi qüvvə olduğundan qüvvənin F_{φ} transversal toplananı sıfıra bərabər olacaq. Yəni,

$$F_{\varphi} = 0$$

(1)

Deməli, qüvvə yalnız F_r radial toplananından ibarət olacaq

$$F_t = mW_r$$

(2)

Burada w_r maddi nöqtənin radial təcilidir. 51.12 sayılı məsələdə

$$W_r = -c^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right)$$

(3)

olduğunu tapmışıq. Maddi nöqtəyə təsir edən qüvvə cəzbedici olduğundan (3) formulunda işarə mənfi götürülüb. $u = \frac{1}{r}$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

bərabərliyindən

$$u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \varphi$$

(4)

alırıq. Onda

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -\frac{e}{p} \cos \varphi \quad \varphi = \frac{1}{p} - u$$

(5)

olar. (5) bərabərliyini (3)-də nəzərə alıb, alınan ifadəni (2)-də yerinə yazsaq,

$$F_r = -\frac{m\mu}{r^2}$$

(6)

Olar. Burada $\mu = \frac{c^2}{p}$ və c ikiqat cektorial sürətdir.

Məsələ 51.14.

Kütləsi m olan nöqtə $F = \frac{m\mu}{r^2}$ ümumdünya cazibə qanunu üzrə tərpənməz qütbə cəzb olunur. Nöqtənin hərəkətinin trayektoriyasını tapmalı.

Verilir:

$m,$

$$F = \frac{m\mu}{r^2}$$

$r = r(\varphi) - ?$

Həlli:

Maddi nöqtənin hərəkət tənliyi dinamikanın II qanununa görə

$$m\overline{W} = \overline{F}$$

(1)

şəklində yazılır. Burada $\overline{W}$ maddi nöqtənin təcili, $\overline{F}$ isə ona təsir edən qüvvədir. Aydındır ki,

$$\overline{F} = \frac{m\mu - r}{r^3} r$$

(2)

(1) bərabərliyini nöqtənin radius – vektoru üzrə proyeksiyalasaq

$$mW_r = F_r$$

(3)

alarıq. 51.12 sayılı məsələnin həllində

$$W_r = -c^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right)$$

(4)

tapmışıq. Burada $u = \frac{1}{r}$

(2)-ni radius – vektor üzrə proyeksiyalasaq

$$F_r = -\frac{m\mu}{r^2} = -m\mu\omega^2$$

(5)

alırıq. (4) və (5)-i (1)-də yerinə yazsaq

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2}$$

(6)

olar. (6) nöqtənin hərəkətinin differensial tənliyidir. Bu differensial tənliyi həll etsək ümumi həlli

$$u = \frac{\mu}{c^2} + D \cos(\varphi - \varepsilon)$$

(7)

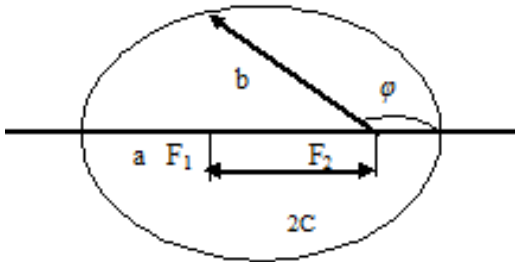
şəklində alırıq. Burada D və ε integrallama sabitləridir. (7) – də $u = \frac{1}{r}$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varepsilon)}$$

(8)

alınır. Burada $p = \frac{c^2}{\mu}$, e və ε integrallama sabitləridir.

Məsələ 51.15.



Maddi nöqtə ümumdünya cazibə qüvvəsi təsiri altında eksentrisiteti $e < 1$ və parametri p olan elliptik trayektoriya üzrə hərəkət edir. $c = r^2 \dot{\varphi} = |\vec{r} \times \vec{v}|$ sahələr integrəlini bilərək, elliptik trayektoriyanın a və b yarım oxlarını və T dövretmə periodunu tapmalı.

Verilir:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

$$e < 1$$

$$c = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = |\vec{r} \times \vec{v}|$$

$$a - ? \quad b - ? \quad T - ?$$

Həlli:

Ellipsin fokuslarını F_1 və F_2 ilə işarə edək. Fokuslar arasındakı məsafəni $2C$ ilə böyük və kiçik yarım oxlarını uyğun olaraq a və b ilə işarə edək.

$\varphi = 0$ olduqda,

$$r(0) = \frac{P}{1+P} = a - c$$

(1)

$\varphi = \pi$ olduqda, isə

$$r(\pi) = \frac{P}{1+P} = a + c$$

(2)

alırıq.

(1) və (2)-ni tərəf – tərəfə toplasaq və çıxsaq

$$a = \frac{P}{1-e^2}, \quad c = \frac{Pe}{1-e^2}$$

(3)

alırıq.

Analitik həndəsədən

$$b^2 = a^2 - c^2$$

olduğunu bilirik. Onda

$$b = \frac{P}{\sqrt{1-e^2}}$$

(4)

olar.

Nöqtənin orbit üzrə dövrətmə periodunu T ilə işarə etsək, aydındır ki, ellipsin sahəsi $\frac{1}{2} CT$ düsturu ilə hesablanacaq.

Burada C – sahələr inteqralıdır. Digər tərəfdən həndəsədən bilirik ki, ellipsin sahəsi πab kimi hesablanır. Onda

$$\frac{1}{2}CT = \pi ab$$

və yaxud da

$$T = \frac{2\pi p^2}{C(1-e^e)^{3/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

alacağıq.

Məsələ 51.16.

Bundan əvvəlki məsələnin şərtləri daxilində nöqtənin apokeydən və perikeydən keçdiyi anlarda təcilini tapmalı.

Verilir:

51.15 sayılı məsələnin verilənləri

$$W_a - ? \quad W_n - ?$$

Həlli:

Bilirik ki,

$$m\overline{W} = -\frac{m\mu}{r^3}r$$

(1)

(1)-i $\overline{r}$ - üzrə proyeksiyalasaq, (51.15 sayılı məsələnin şəkli) onda,

$$W_r = -\frac{\mu}{r^2}$$

(2)

alırıq. İndisə apokeydə və perikeydə radius vektorların

$$r_a = \frac{P}{1-e}, \quad r_n = \frac{P}{1+e}$$

(3)

Qiymətlərini və $\mu = c^2 / p$ olduğunu (2) – də nəzərə alsaq,

$$W_a = \frac{c^2}{p^3}(1-e)^2, \quad W_n = \frac{c^2}{p^3}(1+e)^2$$

olar.

Məsələ 51.17.

Peykin yer ətrafında elliptik orbit üzrə T dövretmə periodunu və apokeylə perikeyin H fərqi bilərək, orbitin ekssentrisitetini tapmalı.

Verilir:

T.

$$r_a - r_n = H$$

$e - ?$

51.16. saylı məsələdəki (3)-cü düsturdan

$$r_a - r_n = \frac{2eP}{1 - e^2} = H$$

(1)

alırıq.

51.15 sayılı məsələdən

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^2}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{p^3}{(1 - e^2)^3 \cdot \mu}}$$

(2)

(1) və (2)-dən p – ni yox etsək,

$$e = H \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{2\mu T^2}}$$

alırıq.

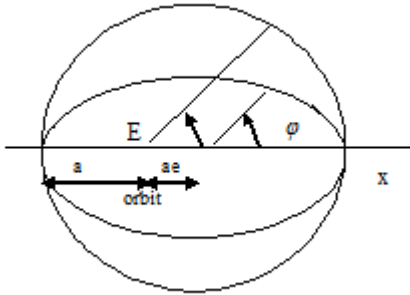
Məsələ 51.30.

Eksentrisiteti e olan ellips üzrə hərəkət edən nöqtənin φ həqiqi və E ekssentrik anomaliyaları arasındakı əlaqəni tapmalı.

Verilir:

c, φ, E

$E(\varphi) - ?$



Həlli:

Ellipsin fokusları arasındakı məsafəni $2C$ ilə işarə edək.

Beləliklə, $CO = C$ olur. Ellipsin eksentrisitetinin tərifinə görə

$$e = \frac{C}{a}$$

Buradan $CO = C = ae$ olduğunu alırıq.

Şəkildən

$$CO = CN - ON$$

$$CN = a \cos E. \quad ON = OM \cos \varphi =$$

$$r \cos \varphi \quad (1)$$

Alırıq. Beləliklə,

$$ae = a \cos E. - r \cos \varphi$$

(2)

olur. Burada r – elliptik hərəkət edən nöqtənin radius vektorunun uzunluğudur və

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \varphi}$$

(3)

düsturu ilə hesablanır. Harada ki,

$$P = \frac{b^2}{a} = a \frac{b^2}{a^2} = a \frac{a^2 - d^2}{a^2} = a(1 - e^2)$$

(4)

(4)-ü (3)-də və alınan nəticənin (2)-də yerinə yazsaq,

$$\cos E = \frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}$$

(5)

Alırıq. Beləliklə, E bucağı ilə φ bucağı arasındakı əlaqəni (5) formulu vasitəsilə təyin edirik. (5)

ifadəsinin daha sadə şəkllə gətirmək üçün $tg E/2$ –ni hesablayaq. Triqonometriyadan bildiyimiz kimi

$$tg \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}}$$

(6)

(5) – i (6) –da yerinə yazsaq,

$$tg \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} tg \frac{\varphi}{2}$$

(7)

alırıq.

Məsələ 51.31.

Elliptik orbitin ixtiyari nöqtəsindəki sürəti ekssentrik anomaliya ilə ifadə etməli.

Verilir:

E

$v(E)$ - ?

Həlli:

Enerji inteqralı

$$v^2 - \frac{2\mu}{r} = h$$

(1)

formulu ilə ifadə olunur. Elliptik trayektoriya üçün

$$p = -\frac{\mu}{a}$$

(2)

olduğundan (məsələ № 51.19).

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

(3)

alırıq. Bilirik ki,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

(4)

51.30 sayılı məsələdəki, (5) ifadəsindən

$$\cos \varphi = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

(5)

olduğunu təyin edirik.

(5)-i (4)-də yerinə yazsaq və

$$p = a(1 - e^2)$$

olduğunu nəzərə alsaq,

$$r = a(1 - e \cos E)$$

(6)

alırıq. (6)-nı (3)-də yerinə yazıb, sürət üçün

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1 - e \cos E}{1 - e \cos E}}$$

(7)

Məsələ 51.32.

Elliptik orbit üzərində elə nöqtələr tapmalı ki, bu nöqtələrdəki hərəkət sürəti perikeydə və apokeydəki sürətlərin vorta həndəsi qiymətinə bərabər olsun.

Verilir:

$$v_{II}, v_A$$

$$v = \sqrt{v_{II} v_A} - ?$$

Həlli:

Aydındır ki, perikeydə $E=0$, apokeyə icə $E=\pi$ olacaqdır. Onda 51.31 sayılı məsələdəki (7) formuluna əsasən

$$v_{II} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

(1)

və

$$v_A = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

(2)

olar. Məsələnin şərtinə görə

$$v = \sqrt{v_{II} v_A} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

(3)

İndi isə sürətin bu qiymətinə uyğun E eksentrik anomaliya bucağını təyin edək. Bunun üçün (3) ifadəsi ilə 51.31 sayılı məsələdəki (7) ifadəsini bərabərləşdirək. Onda

$$\sqrt{\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}} = 1$$

(4)

Bu tənliyi həll etsək, $E = \pm \frac{\pi}{2}$ alırıq. Beləliklə, alırıq ki, həmin nöqtələr ellipsin kiçik oxunun uclarında yerləşir.

Məsələ 51.35

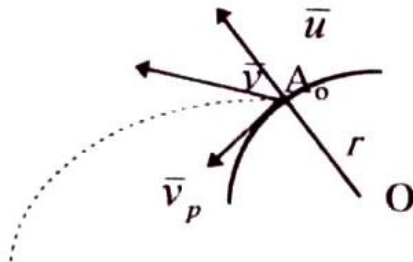
Peyk radiusu r olan dairəvi orbit üzrə hərəkət edir və T zamanda bir dövr edir. radial istiqamətdə u sürəti impulsu alması nəticəsində nöqtə elliptik orbitə keçir. Nöqtənin elliptik orbit üzrə dövretmə periodunu tapmalı.

Verilir:

$r, T,$

$V_r = u$

$T_1 = ?$



Həlli:

Fəzanın A_0 nöqtəsində peykin $OA_0 = r$ başlanğıc vəziyyəti və $\bar{v}$ sürəti verilmişdir. Peykin a yarımoxunu təyin edək. Burada $\bar{v}$ sürəti $\bar{u}$ və $\bar{v}_p$ kimi, iki toplanandan ibarətdir. $\bar{v}_p$ peykin r radiuslu dairəvi orbitindəki sürətidir. Məsələnin verilənlərinə görə

$$V_p = \frac{2\pi r}{T}$$

(1)

onda, elliptik orbit üçün peykin sürəti

$$V_p^2 = \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 + u^2$$

(2)

olacaq.

Bildiyimiz kimi (məs. № 51.15)

$$p = a(1 - c^2)$$

(3)

Digər tərəfdən (3.2) və (4.1) yazsaq,

$$p = \frac{c^2}{\mu}$$

(4)

və

$$e = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{\mu^2}}$$

(5)

alarıq. (4) və (5)-i (3)-də yerinə yazsaq,

$$a = -\frac{\mu}{h}$$

(6)

olar. İndi isə μ və h təyin edək.

Peyk dairəvi orbit üzrə hərəkət etdiyindən onun şəkildəki v_p sürəti (məs. № 51.3)

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

(7)

olacaq:

(1) və (7)-ni bərabərləşdirsək,

$$\mu = r \cdot \left(\frac{2\pi r^2}{T} \right)$$

(8)

alırıq. h enerji sabitini təyin etmək üçün sürətin (2) ifadəsindəki qiymətini (2.2)-də yerinə yazsaq, onda

$$h = u^2 - \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2$$

(9)

alırıq. (8) və (9)-u (6)-da yerinə yazıb,

$$a = \frac{r}{1 - \left(\frac{rU}{2\pi r} \right)^2}$$

(10)

Ellipsin a yarımoxunun (10) ifadəsini Keplerin III qanununda yerinə yazsaq,

$$T_1 = \frac{T}{\left[1 - \left(\frac{rU}{2\pi r} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

(11)

alırıq.

Məsələ 51.36

Peyk T zamanda bir dövr edərək radiusu r olan dairəvi orbit üzrə hərəkət edir. Tankensial (toxunan) istiqamətdə u sürət impulsu alması nəticəsində nöqtə elliptik orbitə keçir. Nöqtənin elliptik orbit üzrə dövretmə T periodunu tapmalı.

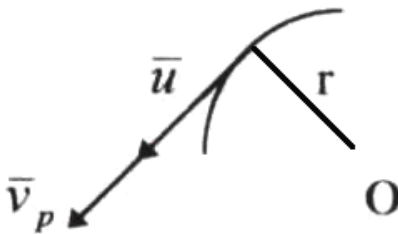
Verilir:

r, T , toxunan istiqamətdə $\bar{u}$ sürət impulsu

T

-

?



Həlli: göstəriş.

Bu halda sürət üçün

$$v^2 = \left(\frac{2\pi r}{T} + u \right)^2$$

(1)

olacaq. Sürətin bu qiymətini uyğun h enerji sabitini hesablayıb, məsələni həll etmək olar.

Ə D Ə B İ Y Y A T

1. Meşşerski İ.V. Nəzəri mexanika məsələləri. Bakı, 1984.
2. Tarq S.M. Nəzəri mexanikanın qısa kursu. Bakı, 1983.
3. Ayzenberq T.B., Voronkob İ.M., Oseçkiy V.M. Руководство к решению задач по теоретической механике. М., 1968.

4. Бать М.И., Джанелизаде Г.Ю., Кельзон А.С.
Теоритическая механика в примерах и задачах. Ч.І.
и П.М., 1984.