

III. DİNAMİKA

3.1. Dinamikaya giriş

Dinamika nəzəri mexanikanın elə bir bölməsidir ki, burada cisimlərin hərəkəti onlara təsir edən qüvvələrdən asılı olaraq öyrənilir. Dinamika statika və kinematikaya nisbətən daha geniş bölmədir və müasir texnikanın bir çox məsələlərinin həlli üçün mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Dinamikanın banisi böyük italyan alimi Qaliley (1564-1642) hesab olunur. Qaliley birinci dəfə olaraq cismin qeyri-müntəzəm düzxətli hərəkətində sürət və təcil anlayışlarını təklif etmişdir. O, eyni zamanda müəyyən etmişdir ki, verilmiş müşahidə yerində boşluqda cisimlərin hamısı eyni təcillə düşür.

Dahi ingilis alimi Nyuton (1643-1727) özünün məşhur «Təbii fəlsəfənin riyazi əsasları» əsərində dinamikanın əsaslarının sistemli izahını vermişdir. Sonralar dinamika digər alimlərin əsərlərində inkişaf etdirilmişdir.

Nəzəri mexanika fənninin dinamika bölməsini adətən iki hissəyə bölürlər: maddi nöqtə dinamikası və maddi sistem dinamikası.

Dinamikanın iki əsas məsələsi vardır. Birinci əsas məsələdə maddi nöqtənin, yaxud sistemin hərəkəti verilir, təsir edən qüvvələri tapmaq tələb olunur. İkinci əsas məsələdə isə maddi nöqtəyə, yaxud sistemə təsir edən qüvvələr verilir. Hərəkətin kinematik tənliklərini tapmaq isə tələb olunur.

Dinamika məsələlərini həll edərkən statika və kinematikada rast gəlinən anlayışlardan əlavə kütlə, hərəkət miqdarı, kinetik enerji, inersiya momenti və digər anlayışlardan da istifadə edəcəyik.

3.2. Dinamikanın əsas qanunları

Dinamikanın əsas qanunları birinci dəfə olaraq Nyuton tərəfindən sistemli şəkildə izah edilmişdir. Ona görə də bu qanunlara çox vaxt Nyuton qanunları deyirlər. Nyuton qanunlarını bəzən klassik mexanika qanunları da adlandırırlar. Əgər verilmiş koordinat sisteminə nəzərən Nyuton qanunları öz dolğunluğunu saxlayırsa, bu sistem inersial hesabaparma sistemi adlanır. Bir çox praktiki hesablamalar üçün Yer kürəsi ilə bağlı koordinat sistemini inersial sistem saymaq olar.

Birinci qanun (inersiya qanunu). Əgər maddi nöqtəyə heç bir qüvvə təsir etmirsə o öz sükunət, yaxud bərabərsürətli düzxətli hərəkət halını saxlayır.

Əvvəllər qeyd etdiyimiz kimi, maddi nöqtə elə cismə deyilir ki, baxılan məsələnin şərtləri daxilində onun ölçülərini nəzərdən atmaq mümkün olsun.

Fərz edək ki, $\vec{F}$ – baxılan maddi nöqtəyə təsir edən qüvvə, $\vec{V}$ isə bu maddi nöqtənin sürətidir. Onda birinci qanunu belə də ifadə edə bilərəik: əgər $\vec{F} = 0$ olarsa $\vec{V} = \overline{const}$ olar.

Maddi nöqtənin qüvvə təsiri olmurda öz sükunət, yaxud bərabərsürətli düzxətli hərəkət halını saxlaması xassəsinə inersiya (ətalət) xassəsi deyilir. Cisimlərin inersiya xassəsi Qaliley tərəfindən kəşf edilmişdir.

Birinci qanundan belə bir maraqlı nəticə çıxır ki, əgər maddi nöqtə dəyişən sürətlə, yaxud əyrixətli trayektoriya üzrə hərəkət edirsə, ona hökmən hansısa bir, yaxud da bir neçə qüvvə təsir edir.

İkinci qanun (dinamikanın əsas qanunu). Maddi nöqtənin kütləsinin onun təcilinə olan hasili qiymət və istiqamətcə bu maddi nöqtəyə təsir edən qüvvəyə bərabərdir.

İkinci qanunun riyazi ifadəsi

$$m\vec{W} = \vec{F}, \quad (1)$$

burada m və $\overline{W}$ – uyğun olaraq maddi nöqtənin kütləsi və mütləq təcili, $\overline{F}$ isə ona təsir edən qüvvədir.

Kütlə skalyar kəmiyyət olub maddi nöqtənin inersiyalılıq (ətalətlilik) ölçüsüdür. Cismın kütləsi onu təşkil edən maddi nöqtələrin kütlələrinin cəminə bərabərdir.

(1) ifadəsi dinamikanın əsas tənliyi adlanır. Bu tənliyi Yer səthi yaxınlığında boşluqda sərbəst düşən cismə tətbiq edərək yazı bilərik: $mg = P$. Onda

$$m = \frac{P}{g}, \quad (2)$$

burada P – cismın çəkisi, g isə sərbəst düşmə təcildir. Beləliklə, kütlə cismın çəkisinin sərbəst düşmə təcilinə nisbətində bərabərdir.

Klassik mexanikada verilmiş cismın kütləsi sabit kəmiyyət hesab olunur.

Üçüncü qanun (təsirin əks təsirə bərabərliyi qanunu). Hər hansı iki maddi nöqtə bir-birinə qiymətcə bərabər və bir düz xətt boyunca əks tərəflərə yönəlmiş qüvvələrlə təsir edir.

Üçüncü qanun statikanın dördüncü aksiomuna uyğun gəlir.

Dördüncü qanun (qüvvələr təsirinin bir-birindən asılı olmaması qanunu). Maddi nöqtənin eyni zamanda bir neçə qüvvənin təsiri altında aldığı təcil bu qüvvələrin həmin maddi nöqtəyə ayrı-ayrılıqda tətbiqi nəticəsində yaranan təcillərin həndəsi cəminə bərabərdir.

Dördüncü qanunu riyazi olaraq belə ifadə etmək olar:

$$\overline{W} = \overline{W}_1 + \overline{W}_2 + \dots + \overline{W}_n, \quad (3)$$

burada $\overline{W}$ – maddi nöqtəyə $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n$ qüvvələrinin birlikdə təsiri nəticəsində yaranan təcil; $\overline{W}_1, \overline{W}_2, \dots, \overline{W}_n$ – bu maddi nöqtəyə həmin qüvvələrin ayrı-ayrılıqda tətbiqi nəticəsində yaranan təcillərdir.

(3) bərabərliyinin hər iki tərəfini maddi nöqtənin kütləsi m - ə vuraq:

$$m\overline{W} = m\overline{W}_1 + m\overline{W}_2 + \dots + m\overline{W}_n. \quad (4)$$

İkinci qanunu nəzərə alaraq (4) ifadəsinə əsasən yazsa bilirik: $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \dots + \overline{F}_n$, yaxud

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^n \overline{F}_i, \quad (5)$$

burada $\overline{F} = \overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n$ qüvvələrinin əvəzləyicisidir.

Əgər $\overline{W} = 0$ olarsa $\overline{F} = 0$, yaxud $\sum_{i=1}^n \overline{F}_i = 0$ alırıq. Bu

halda maddi nöqtəyə təsir edən qüvvələr müvazinətləşmiş sistem təşkil edir.

3.3. Maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənlikləri

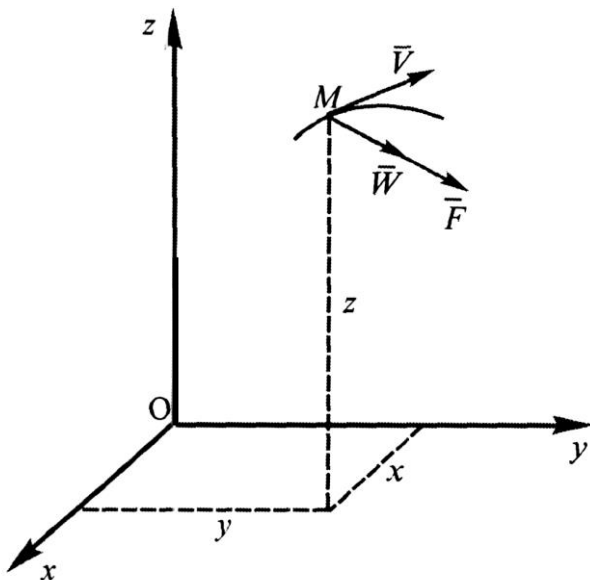
Fərz edək ki, m kütləli M maddi nöqtəsi verilmiş $\overline{F}$ qüvvəsinin təsiri altında tərpənməz $Oxyz$ sistemində nəzərən hərəkət edir (şək.3.1). Bu maddi nöqtə üçün dinamikanın əsas tənliyini yazsaq:

$$m\overline{W} = \overline{F}, \quad (1)$$

burada $\overline{W}$ – baxılan maddi nöqtənin təcildir.

(1) vektorial ifadəsini koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq alarıq:

$$\left. \begin{aligned} mW_x &= F_x, & mW_y &= F_y, & mW_z &= F_z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



Şək.3.1.

Kinematikadan məlumdur ki,

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ W_y &= \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ W_z &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Burada V_x, V_y, V_z – maddi nöqtənin sürətinin proyeksiyaları;
 x, y, z – maddi nöqtənin koordinatlarıdır.

(3) ifadələrini (2)-də nəzərə alsaq aşağıdakı bərabərlikləri
 əldə edirik:

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_x, \quad m \frac{dV_y}{dt} = F_y, \quad m \frac{dV_z}{dt} = F_z \left. \vphantom{\frac{dV_x}{dt}} \right\}, \quad (4)$$

yaxud

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z \left. \vphantom{\frac{d^2 x}{dt^2}} \right\}, \quad (5)$$

burada F_x, F_y, F_z maddi nöqtəyə təsir edən qüvvənin uyğun
 olaraq x, y və z oxları üzərindəki proyeksiyalarıdır.

(5) ifadələri maddi nöqtənin hərəkətinin düzbucaqlı
 dekart koordinat sistemində diferensial tənlikləri adlanır.
 Əslində (4) ifadələri də maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial
 tənlikləridir, və onlar (5) ifadələrindən ancaq formaca
 fərqlənilirlər.

Əgər maddi nöqtənin trayektoriyası əvvəlcədən məlum
 olarsa onun hərəkətinin təbii tənliklərindən istifadə etmək daha
 sərfəli olur.

(1) ifadəsini təbii koordinat oxları üzərinə
 proyeksiyalasaq alırıq:

$$mW_\tau = F_\tau, \quad mW_n = F_n, \quad mW_b = F_b \left. \vphantom{mW_\tau} \right\}, \quad (6)$$

burada W_τ, W_n, W_b maddi nöqtənin təcilinin, F_τ, F_n, F_b isə bu
 maddi nöqtəyə təsir edən qüvvənin uyğun olaraq təbii
 koordinat oxları (toxunan, baş normal və binormal) üzərindəki
 proyeksiyalarıdır. Kinematikadan məlumdur ki,

$$\left. \begin{aligned} W_\tau &= \frac{dV_\tau}{dt}, & W_n &= \frac{V^2}{\rho}, & W_b &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

burada V_τ və V – uyğun olaraq maddi nöqtənin sürətinin toxunan üzərindəki proyeksiyası və modulu; ρ – maddi nöqtənin trayektoriyasının əyrilik radiusudur. Bu ifadələri (6) – da yerinə yazaq:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV_\tau}{dt} &= F_\tau, & m \frac{V^2}{\rho} &= F_n, & 0 &= F_b. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8) ifadələrini maddi nöqtənin hərəkətinin təbii tənlikləri, yaxud təbii formada diferensial tənlikləri adlandırırlar.

Prinsipcə maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənliklərini digər koordinat sistemlərində də tərtib etmək mümkündür.

Bəzən maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənliklərinə maddi nöqtənin hərəkətinin dinamik tənlikləri də deyirlər.

3.4. Maddi nöqtə dinamikasının iki əsas məsələsi

Maddi nöqtə dinamikasının iki əsas məsələsi vardır (düz məsələ və tərs məsələ).

Birinci əsas məsələ (düz məsələ). Bu məsələdə maddi nöqtənin kütləsi və kinematik hərəkət tənlikləri verilir, ona təsir edən qüvvəni tapmaq isə tələb olunur.

Fərz edək ki, m kütləli maddi nöqtənin hərəkətinin kinematik tənlikləri düzbucaqlı dekart koordinat sistemində verilmişdir:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)\}, \quad (1)$$

burada x, y, z – baxılan maddi nöqtənin koordinatlarıdır. Bu halda maddi nöqtəyə təsir edən qüvvənin proyeksiyaları aşağıdakı ifadələrlə tapıla bilər:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= m \frac{d^2 x}{dt^2}, & F_y &= m \frac{d^2 y}{dt^2}, & F_z &= m \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Maddi nöqtəyə təsir edən qüvvənin modulu və istiqaməti isə uyğun olaraq bu ifadələrlə təyin edilir:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{F}, x) &= \frac{F_x}{F}, & \cos(\bar{F}, y) &= \frac{F_y}{F}, & \cos(\bar{F}, z) &= \frac{F_z}{F}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

İkinci əsas məsələ (tərs məsələ). Bu məsələdə maddi nöqtənin kütləsi, təsir edən qüvvə və hərəkətin başlanğıc şərtləri verilir, hərəkətin kinematik tənliklərini tapmaq isə tələb olunur.

Maddi nöqtəyə təsir edən qüvvə ümumi halda zamandan, bu maddi nöqtənin fəzadakı vəziyyətindən və sürətindən asılı ola bilər, yəni

$$\bar{F} = \bar{F}(t, \bar{r}, \bar{V}), \quad (5)$$

burada $\bar{r}$ – maddi nöqtənin radius–vektorudur.

(5) ifadəsi analitik formada aşağıdakı kimi yazılar:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_x(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z), \\ F_y &= F_y(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z), \\ F_z &= F_z(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Bu ifadələri maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənliklərində yerinə yazsaq alarıq:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(7) diferensial tənliklərinin integrallanması nəticəsində

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

düsturlarını əldə edərik. Burada $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ integrallama sabitləridir. (8) ifadələrini zamana görə diferensiallasaq taparıq:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= f_4(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ V_y &= f_5(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ V_z &= f_6(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Hərəkətin başlanğıc şərtləri bu şəkildə verilir: $t = 0$ olduqda

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0, \quad V_x = V_{ox}, \\ y &= y_0, \quad V_y = V_{oy}, \\ z &= z_0, \quad V_z = V_{oz}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

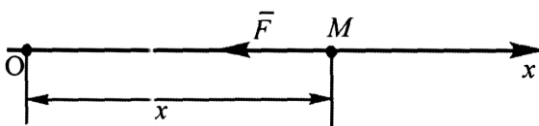
(10) şərtlərini (8) və (9) bərabərliklərində nəzərə alaraq $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ integrallama sabitlərini təyin edə bilərik. $x_o, y_o, x_o, V_{ox}, V_{oy}, V_{oz}$ kəmiyyətləri əvvəlcədən verilməlidir.

Qeyd edək ki, maddi nöqtə dinamikasının birinci əsas məsələsi diferensiasillama, ikinci əsas məsələsi isə integrallama əməliyyatı ilə əlaqədardır. Ona görə də riyazi baxımdan ümumi halda ikinci əsas məsələnin həlli daha çətin olur.

Bu səbəbdən adətən xüsusi halları (qüvvə sabitdir, yaxud zaman, koordinat və sürət amillərinin ancaq birindən asılıdır) nəzərdən keçirirlər.

3.5. Maddi nöqtənin sərbəst rəqs hərəkəti

Fərz edək ki, m kütləli M maddi nöqtəsi verilmiş $\vec{F}$ qüvvəsinin təsiri altında düzxətli trayektoriya üzrə hərəkət edir (şək. 3.2). Tutaq ki, bu qüvvə daim həmin trayektoriya üzərində yerləşən tərpənməz O mərkəzinə tərəf yönəlir və qiymətcə özünün bu mərkəzdən olan məsafəsinə mütənasib olur. Bu cür xassələri olan qüvvəyə bərpəədici qüvvə deyirlər. O nöqtəsi rəqslər mərkəzi adlanır (şək. 3.2).



Şək. 3.2

Dediklərimizə görə $\vec{F}$ qüvvəsinin modulu

$$F = c \cdot OM = c|x|, \quad (1)$$

x oxu üzərindəki proyeksiyası isə

$$F_x = -cx \quad (2)$$

kimi ifadə olunar. Burada c sabit əmsaldır. Bəzi hallarda c -ni sərtlilik əmsalı, yaxud sərtlilik adlandırırlar. Ölçü vahidi N/m şəklində verilə bilər.

M maddi nöqtəsinin hərəkətinin diferensial tənliyini yazaq:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x. \quad (3)$$

(2) bərabərliyini (3)-də nəzərə alaraq:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx. \quad (4)$$

Buradan

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} x = 0. \quad (5)$$

İşarə edək:

$$\frac{c}{m} = k^2. \quad (6)$$

Onda

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0. \quad (7)$$

Alınmış ifadə maddi nöqtənin sərbəst rəqs hərəkətinin diferensial tənliyi adlanır. Bu tənliyi həll etmək üçün onun xarakteristik tənliyini yazırıq:

$$r^2 + k^2 = 0. \quad (8)$$

Xarakteristik tənliyin kökləri $r_{1,2} = \pm ik$. Burada i xəyali vahiddir. Diferensial tənliklər nəzəriyyəsindən məlumdur ki, baxılan halda (7) diferensial tənliyinin həllini bu formada yazmaq olar:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (9)$$

burada C_1 və C_2 integrallama sabitləridir. Bu sabitlər hərəkətin aşağıdakı başlanğıc şərtlərindən tapılır: $t = 0$ olduqda

$$x = x_0, \quad V_x = V_{ox}. \quad \} \quad (10)$$

M maddi nöqtəsinin sürətinin x oxu üzərindəki proyeksiyasını tapmaq üçün (9) ifadəsindən zamana görə törəmə alırıq:

$$V_x = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (11)$$

(10) şərtlərini (9) və (11)-də nəzərə alaraq tapa bilərik:
 $C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{V_{ox}}{k}$. Onda (9) həllini bu şəkildə yazmaq olar:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{V_{ox}}{k} \sin kt. \quad (12)$$

(7) diferensial tənliyinin həllini başqa formada da vermək mümkündür. Bu məqsədlə qəbul edək: $C_1 = a \sin \alpha$, $C_2 = a \cos \alpha$. Burada a və α yeni sabit kəmiyyətlərdir. C_1 və C_2 –nin bu qiymətlərini (9)-da yerinə yazsaq alarıq:

$$x = a \sin \alpha \cos kt + a \cos \alpha \sin kt, \quad (13)$$

yaxud

$$x = a \sin(kt + \alpha). \quad (14)$$

Bu ifadə maddi nöqtənin harmonik rəqs hərəkətinin kinematik tənliyidir. Burada a –rəqslərin amplitudu (rəqslər mərkəzindən ən böyük uzaqlaşma); $(kt + \alpha)$ – rəqslərin fazası; α – başlanğıc faza adlanır. Baxılan halda

$$V_x = \frac{dx}{dt} = ak \cos(kt + \alpha). \quad (15)$$

(10) şərtlərini (14) və (15)-də istifadə edərək $x_o = a \sin \alpha$, $\frac{V_{ox}}{k} = a \cos \alpha$ bərabərliklərini ala bilərik. Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə bölməklə, sonra isə kvadrata yüksəldib tərəf-tərəfə toplamaqla α və a sabitlərinin tapılması üçün aşağıdakı ifadələri əldə edə bilərik:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{kx_o}{V_{ox}}, & a &= \sqrt{x_o^2 + \frac{V_{ox}^2}{k^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

İndi M maddi nöqtəsinin rəqslərinin periodunu təyin edək. Rəqslərin periodu T bir tam rəqsə sərf olunan zamana deyilir.

Məlumdur ki, sinus və kosinusun periodu 2π -yə bərabərdir. Ona görə də T zamanı ərzində rəqslərin fazası 2π qədər artmalıdır, yəni

$$[k(t+T) + \alpha] - (kt + \alpha) = 2\pi. \quad (17)$$

Buradan

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (18)$$

k ədədi rəqslərin dairəvi tezliyi adlanır. O, 2π saniyədə baş verən rəqslərin sayına bərabərdir (adi tezlik isə $\frac{1}{T}$ -yə, yaxud bir saniyədə baş verən rəqslərin sayına bərabərdir). (18)-dən $k = \frac{2\pi}{T}$.

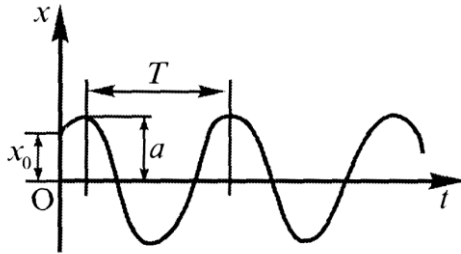
(6)-nı (18)-də nəzərə alsaq

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (19)$$

yaza bilərik.

Maddi nöqtənin sərbəst rəqs hərəkətinin nə periodu, nə də dairəvi tezliyi hərəkətin başlanğıc şərtlərindən asılı deyildir.

Şək. 3.3-də maddi nöqtənin sərbəst rəqslərinin qrafiki göstərilmişdir.



Şək. 3.3.

3.6. Maddi nöqtənin sönən rəqs hərəkəti

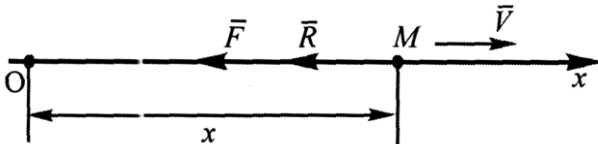
Fərz edək ki, kütləsi m olan M maddi nöqtəsi bərpəedici $\vec{F}$ qüvvəsinin təsiri altında müqavimətli mühitdə düzxətli hərəkət edir. Tutaq ki, mühitin müqavimət qüvvəsi maddi nöqtənin sürətinin əksinə yönələn və

$$\vec{R} = -\mu\vec{V} \quad (1)$$

ifadəsi ilə təyin olunan özlü sürtünmə qüvvəsindən ibarətdir (şək.3.4). Burada μ sabit əmsaldır. Ölçü vahidi N·san/m şəklində verilə bilər.

(1) ifadəsini x oxu üzərində proyeksiyalayaq:

$$R_x = -\mu V_x = -\mu \frac{dx}{dt}. \quad (2)$$



Şək. 3.4

Maddi nöqtənin sərbəst rəqs hərəkətindən məlumdur ki, bərpəedici $\overline{F}$ qüvvəsinin x oxu üzərindəki proyeksiyası

$$F_x = -cx. \quad (3)$$

Bu ifadədə c sabit əmsaldır.

Baxılan maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənliyini yazaq:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = R_x + F_x, \quad (4)$$

burada (2) və (3) ifadələrini nəzərə alsaq

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu \frac{dx}{dt} - cx, \quad (5)$$

yaxud

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{c}{m} x = 0 \quad (6)$$

olar. İşarə edək:

$$\frac{\mu}{m} = 2n, \quad (7)$$

$$\frac{c}{m} = k^2. \quad (8)$$

Onda (6) tənliyi bu şəkllə düşər:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = 0. \quad (9)$$

Alınmış ifadə maddi nöqtənin sönən rəqs hərəkətinin diferensial tənliyi adlanır. Bu diferensial tənliyin xarakteristik tənliyini yazaq:

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0. \quad (10)$$

Bu tənliyin kökləri

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (11)$$

Əvvəlcə $k > n$ olan halı nəzərdən keçirək. İşarə edək:

$$\sqrt{k^2 - n^2} = k_1. \quad (12)$$

Onda

$$r_{1,2} = -n \pm ik_1 \quad (13)$$

olar. Burada i xəyali vahiddir. Diferensial tənliklər nəzəriyyəsindən məlumdur ki, bu halda (9) diferensial tənliyinin həlli

$$x = ae^{-nt} \sin(k_1t + \alpha) \quad (14)$$

şəklində yazıla bilər. Burada a və α hərəkətin başlanğıc şərtlərindən tapılan sabitlərdir. Bu ifadədən zamana görə törəmə alsaq maddi nöqtənin sürətinin x oxu üzərindəki proyeksiyasını tapırıq:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = ae^{-nt} [k_1 \cos(k_1 t + \alpha) - n \sin(k_1 t + \alpha)]. \quad (15)$$

a və α sabitlərini təyin etmək üçün hərəkətin aşağıdakı başlanğıc şərtlərindən istifadə edirik: $t = 0$ olduqda $x = x_o$, $V_x = V_{ox}$. Bu şərtləri (14) və (15)-də nəzərə alaraq tapa bilirik:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{x_o}{a}, & \cos \alpha &= \frac{V_{ox} + nx_o}{ak_1}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Bu ifadələri tərəf-tərəfə bölməklə

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1 x_o}{V_{ox} + nx_o}, \quad (17)$$

kvadrata yüksəldib tərəf-tərəfə toplamaqla isə

$$a = \sqrt{x_o^2 + \frac{(V_{ox} + nx_o)^2}{k_1^2}} \quad (18)$$

olduğunu təyin etmək olar.

k_1 rəqslərin dairəvi tezliyi (2π saniyədəki rəqslərin sayı), n – sönmə əmsalı, ae^{-nt} isə rəqslərin amplitudu adlanır. Göründüyü kimi, rəqslərin amplitudu zaman keçdikcə azalır. Bu səbəbdən də belə rəqs hərəkətinə sönən rəqs hərəkəti deyirlər.

Sönən rəqslərin periodu

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (19)$$

Bu ifadədən görünür ki, sönən rəqslərin periodu zamandan asılı deyildir. Eyni şərtlər daxilində sönən rəqslərin periodu sərbəst rəqslərin periodundan böyük olur.

Sönən rəqslərin qrafiki x oxuna nəzərən simmetrik yerləşən və tənlikləri $x_1 = ae^{-nt}$, $x_2 = -ae^{-nt}$ şəklində verilən iki əyri ilə sərhədlənir (şək.3.5).

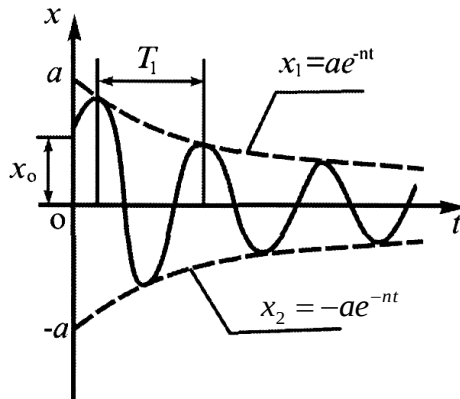
Sönən rəqslərin amplitudlarının ardıcıl qiymətlərindən belə bir sıra düzəltmək olar: $a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots$. Burada

$$a_i = ae^{-nt_i}, \quad (20)$$

$$a_{i+1} = ae^{-n(t_i + \frac{T_1}{2})}. \quad (21)$$

Onda

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{ae^{-n(t_i + \frac{T_1}{2})}}{ae^{-nt_i}} = e^{-n\frac{T_1}{2}}. \quad (22)$$



Şək.3.5

Buradan görünür ki, sönən rəqslərin amplitudlarının ardıcıl qiymətləri orta q vuruğu $e^{-n\frac{T_1}{2}}$ olan azalan həndəsi silsilə əmələ gətirir. Bu orta q vuruq sönən rəqslərin dekrementi, onun natural loqarifmi olan $-n\frac{\pi}{2}$ ədədi isə loqarifmik dekrement adlanır.

Sübut olunmuşdur ki, $n \geq k$ olan hallarda maddi nöqtənin hərəkəti rəqs xarakteri daşımır və buna görə də həmin hallar burada nəzərdən keçirilmir.

3.7. Maddi nöqtənin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teorem

Teorem. Maddi nöqtənin hərəkət miqdarının hər hansı zaman fasiləsində dəyişməsi bu maddi nöqtəyə təsir edən qüvvənin həmin zaman fasiləsindəki impulsuna bərabərdir.

Teoremin riyazi ifadəsi:

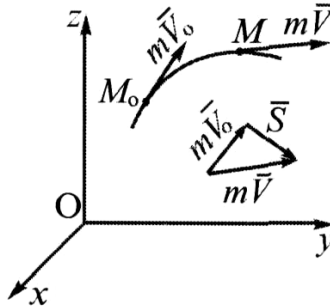
$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \int_0^t \bar{F} dt,$$

burada $m\bar{V}_0$ və $m\bar{V}$ - maddi nöqtənin baxılan zaman fasiləsinin uyğun olaraq başlanğıc və sonundakı hərəkət miqdarı; $\int_0^t \bar{F} dt$ – bu maddi nöqtəyə təsir edən qüvvənin həmin zaman fasiləsindəki impulsudur. Maddi nöqtənin hərəkət miqdarı və qüvvənin impulsu – hər ikisi vektorial kəmiyyətdir.

İsbatı. Fərz edək ki, baxılan M maddi nöqtəsi $\bar{F}$ qüvvəsinin təsiri altında tərpənməz Oxy sisteminə nəzərən

hərəkət edir (şək.3.6). Bu maddi nöqtə üçün dinamikanın əsas tənliyini yazaq:

$$m\overline{W} = \overline{F} . \quad (1)$$



Şək.3.6

Kinematikadan məlumdur ki, $\overline{W} = \frac{d\overline{V}}{dt}$. Onda $m \frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{F}$, yaxud $\frac{d(m\overline{V})}{dt} = \overline{F}$ yazı bilərik. Axırını ifadədən

$$d(m\overline{V}) = \overline{F} dt . \quad (2)$$

Buradan görünür ki, maddi nöqtənin hərəkət miqdarının diferensialı bu maddi nöqtəyə təsir edən qüvvənin elementar impulsuna bərabərdir. (2) bərabərliyi maddi nöqtənin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teoremi diferensial formada ifadə edir.

(2) ifadəsini baxılan sərhədlər daxilində integrallasaq alırıq:

$$m\overline{V} - m\overline{V}_o = \int_o^t \overline{F} dt . \quad (3)$$

Teorem isbat olundu.

Bəzən qüvvənin impulsunu $\bar{S}$ ilə işarə edirlər, yəni

$\int_0^t \bar{F} dt = \bar{S}$. Onda teoremin riyazi ifadəsi belə yazılır:

$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \bar{S}. \quad (4)$$

Bu ifadənin qrafiki təsviri şəkl. 3.6-da göstərilmişdir.

(3), yaxud (4) bərabərliklərini koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq baxılan teoremin analitik ifadələrini alarıq:

$$\left. \begin{aligned} mV_x - mV_{0x} &= \int_0^t F_x dt, \\ mV_y - mV_{0y} &= \int_0^t F_y dt, \\ mV_z - mV_{0z} &= \int_0^t F_z dt, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

yaxud

$$\left. \begin{aligned} mV_x - mV_{0x} &= S_x, \\ mV_y - mV_{0y} &= S_y, \\ mV_z - mV_{0z} &= S_z. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Qüvvənin impulsunun modulu və istiqaməti isə uyğun olaraq aşağıdakı ifadələrlə təyin edilir:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{S}, x) &= \frac{S_x}{S}, \quad \cos(\bar{S}, y) = \frac{S_y}{S}, \quad \cos(\bar{S}, z) = \frac{S_z}{S}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3.8. Maddi nöqtənin hərəkət miqdarı momentinin dəyişməsi haqqında teorem

Teorem. Maddi nöqtənin hərəkət miqdarının hər hansı tərpənməz mərkəzə nəzərən vektor-momentindən zamana görə alınmış törəmə bu maddi nöqtəyə təsir edən qüvvənin həmin mərkəzə nəzərən vektor-momentinə bərabərdir.

Teoremin riyazi ifadəsi:

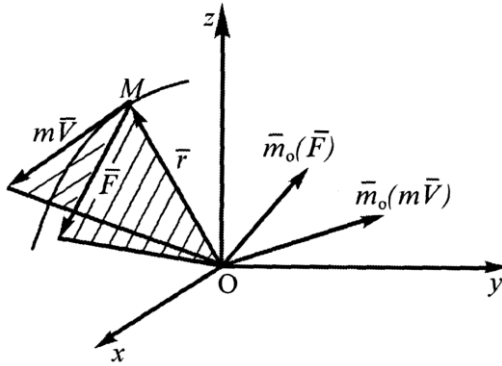
$$\frac{d}{dt} \bar{m}_o(m\bar{V}) = \bar{m}_o(\bar{F}).$$

Burada $\bar{m}_o(m\bar{V})$ – maddi nöqtənin hərəkət miqdarının ixtiyari tərpənməz O mərkəzinə nəzərən vektor-momenti; $\bar{m}_o(\bar{F})$ – bu maddi nöqtəyə təsir edən qüvvənin həmin mərkəzə nəzərən vektor-momentidir.

İsbatı. Fərz edək ki, baxılan M maddi nöqtəsi $\bar{F}$ qüvvəsinin təsiri altında tərpənməz $Oxyz$ sisteminə nəzərən $\bar{V}$ sürəti ilə hərəkət edir (şəkl.3.7). Bu maddi nöqtənin hərəkət miqdarının tərpənməz O başlanğıcına (mərkəzinə) nəzərən vektor-momenti

$$\bar{m}_o(m\bar{V}) = \bar{r} \times m\bar{V}, \quad (1)$$

burada $\bar{r}$ – maddi nöqtənin O başlanğıcına nəzərən radius-vektoru.



Şəkl. 3.7

(1) vektorial bərabərliyini zamana görə diferensiallayaq:

$$\frac{d}{dt} \bar{m}_o(m\bar{V}) = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{V} + \bar{r} \times \frac{d(m\bar{V})}{dt}. \quad (2)$$

Burada

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{dt} &= \bar{V}, & \frac{d(m\bar{V})}{dt} &= \bar{F}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Onda

$$\frac{d}{dt} \bar{m}_o(m\bar{V}) = \bar{V} \times m\bar{V} + \bar{r} \times \bar{F}. \quad (4)$$

$\bar{V}$ və $m\bar{V}$ vektorları bir düz xətt boyunca yönəlir. Bu səbəbdən $\bar{V} \times m\bar{V} = 0$ olar. Statikadan isə məlumdur ki, $\bar{r} \times \bar{F} = \bar{m}_o(\bar{F})$. Nəticədə (4) ifadəsi bu şəkllə düşər:

$$\frac{d}{dt} \bar{m}_o(m\bar{V}) = \bar{m}_o(\bar{F}). \quad (5)$$

Teorem isbat olundu.

(5) vektorial bərabərliyini koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq baxılan teoremin analitik ifadələrini alarıq:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} m_x(m\bar{V}) &= m_x(\bar{F}), \\ \frac{d}{dt} m_y(m\bar{V}) &= m_y(\bar{F}), \\ \frac{d}{dt} m_z(m\bar{V}) &= m_z(\bar{F}). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Xüsusi halda maddi nöqtəyə tətbiq olunmuş qüvvənin təsir xətti hərəkət ərzində verilmiş tərpənməz O mərkəzindən keçə bilər. Onda $\bar{m}_o(\bar{F}) = 0$ olar və nəticədə (5)-ə uyğun olaraq $\bar{m}_o(m\bar{V}) = \overline{const}$ alınar. Başqa xüsusi halda qüvvənin oxa, məsələn x oxuna nəzərən momenti baxılan zaman fasiləsində sıfır bərabər ola bilər, yəni $m_x(\bar{F}) = 0$. Onda da (6) ifadələrinə uyğun olaraq $m_x(m\bar{V}) = const$ alarıq.

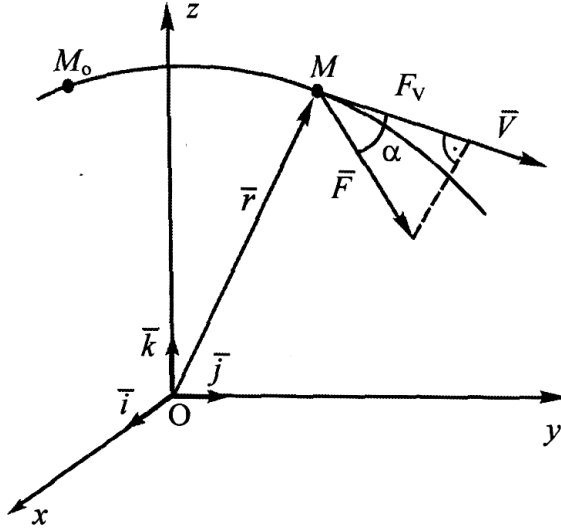
3.9. Qüvvənin işi

Fərz edək ki, verilmiş $\bar{F}$ qüvvəsinin M tətbiq nöqtəsi tərpənməz $Oxyz$ sisteminə nəzərən $\bar{V}$ sürəti ilə hərəkət edir (şəkl.3.8).

Qüvvənin öz tətbiq nöqtəsinin sürət vektoru üzərindəki proyeksiyasının bu nöqtənin elementar yerdəyişməsinə olan hasilinə həmin qüvvənin elementar işi deyilir.

Tərifə görə

$$dA = F_v ds, \quad (1)$$



Şək. 3.8

burada dA – qüvvənin elementar işi; F_v – qüvvənin öz tətbiq nöqtəsinin sürət vektoru üzərindəki proyeksiyası; ds – qüvvənin tətbiq nöqtəsinin elementar yerdəyişməsidir. Elementar yerdəyişmə nöqtənin qövsü koordinatının diferensialından fərqli olaraq həmişə müsbət hesab olunur. Şək.3.8-dən $F_v = F \cos \alpha$ yazı bilərik. Onda

$$dA = F \cos \alpha ds, \quad (2)$$

burada α – $\vec{F}$ və $\vec{V}$ vektorları arasında qalan bucaqdır.

Qüvvənin tətbiq nöqtəsinin M_0M sonlu yerdəyişməsində bu qüvvənin gördüyü iş M_0M qövsü boyunca hesablanmış əyrixətli integralla bərabərdir:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M)} F \cos \alpha ds . \quad (3)$$

Kinematikadan məlumdur ki, $ds = Vdt$. Bunu nəzərə alaraq (2) ifadəsini bu şəkildə də yazıa bilərik:

$$dA = FV \cos \alpha dt . \quad (4)$$

Bu halda

$$A = \int_0^t FV \cos \alpha dt . \quad (5)$$

Baxdığımız ifadələrdən görünür ki, qüvvənin işi skalyar kəmiyyət olub həm müsbət, həm də mənfi qiymət ala bilər.

Məlumdur ki, $FV \cos \alpha$ $\vec{F}$ və $\vec{V}$ vektorlarının skalyar hasilinə bərabərdir, yəni $FV \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{V}$. Bu bərabərliyi (4)-də nəzərə alaq:

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{V} dt . \quad (6)$$

Kinematikadan bilirik ki, $\vec{V}dt = d\vec{r}$. Onda

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7)$$

burada $d\vec{r}$ – qüvvənin tətbiq nöqtəsinin radius-vektorunun diferensialıdır. $\vec{F}$ və $\vec{r}$ vektorları öz proyeksiyaları vasitəsilə aşağıdakı kimi ifadə oluna bilər:

$$\vec{F} = \bar{i}F_x + \bar{j}F_y + \bar{k}F_z , \quad (8)$$

$$\vec{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z . \quad (9)$$

Bu ifadələri (7)-də yerinə yazsaq alarıq:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz . \quad (10)$$

(10) bərabərliyi qüvvənin elementar işinin analitik ifadəsi adlanır. Bu bərabərliyin sağ tərəfi formaca nöqtənin koordinatlarının müəyyən funksiyasının tam diferensialına oxşayır. Ancaq ümumi halda qüvvənin elementar işi hansısa funksiyanın tam diferensialı deyildir. Yalnız bəzi xüsusi hallarda elementar iş tam diferensial ola bilər. Deyilənləri nəzərə alaraq mövcud ədəbiyyatda bəzən elementar işi dA ilə yox, $d'A$, yaxud δA ilə işarə edirlər.

Qüvvənin vahid zamanda gördüyü iş güc deyilir. Güc belə ifadə olunur:

$$N = \frac{dA}{dt} . \quad (11)$$

(6) ifadəsini burada yerinə yazsaq alarıq

$$N = \vec{F} \cdot \vec{V} . \quad (12)$$

Bu bərabərlikdən görünür ki, güc qüvvə vektoru ilə onun tətbiq olunduğu nöqtənin sürət vektorunun skalyar hasilinə bərabərdir. Güc skalyar kəmiyyətdir.

Beynəlxalq SI sistemində əsas iş vahidi coul ($1c = 1N \cdot m$), güc vahidi isə vattdır ($1Vt = 1 \frac{c}{san}$). Bəzən güc vahidi olaraq at qüvvəsindən (a.q.) də istifadə edirlər: $1a.q. = 75 \frac{kQ \cdot m}{san} = 736Vt$.

3.10. Ağırlıq və elastiklik qüvvələrinin işi

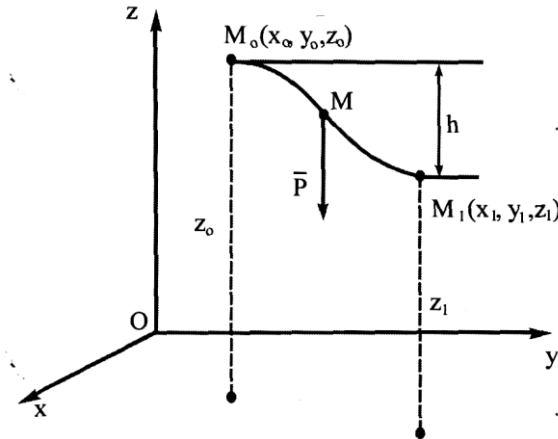
Qüvvənin işinin hesablanmasına tipik misal olaraq ağırlıq və elastiklik qüvvələrinin işinin tapılmasını göstərmək olar.

1. Ağırlıq qüvvəsinin işi. Fərz edək ki, M maddi nöqtəsi $\bar{P}$ ağırlıq qüvvəsinin təsiri altında tərpənməz $Oxyz$ sisteminə nəzərən hərəkət edərək $M_0(x_0, y_0, z_0)$ vəziyyətindən $M_1(x_1, y_1, z_1)$ vəziyyətinə keçmişdir (şək.3.9). Bu yerdəyişmədə maddi nöqtənin $\bar{P}$ ağırlıq qüvvəsinin gördüyü işi təyin edək. z oxunun şaquli olaraq yuxarıya tərəf yönəldiyini nəzərə alaraq yazsaq bilərik:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= 0, & P_y &= 0, & P_z &= -P. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$\bar{P}$ qüvvəsinin elementar işi

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz. \quad (2)$$



Şək.3.9

(1) bərabərliklərinə burada nəzərə alsaq

$$dA = -Pdz \quad (3)$$

olar. Onda $M_o M_1$ yerdəyişməsində $\bar{P}$ qüvvəsinin gördüyü iş

$$A = \int_{z_0}^{z_1} P_z dz = -P \int_{z_0}^{z_1} dz = -P(z_1 - z_0) = P(z_0 - z_1). \quad (4)$$

İşarə edək: $z_0 - z_1 = h$. Burada h – maddi nöqtənin düşmə hündürlüyüdür. Nəticədə alırıq:

$$A = Ph. \quad (5)$$

Beləliklə, maddi nöqtənin hər hansı yerdəyişməsində onun ağırlıq qüvvəsinin gördüyü iş bu maddi nöqtənin trayektoriyasının nə formasından, nə də uzunluğundan asılı olmayıb ancaq düşmə hündürlüyündən asılı olur. Düşmə hündürlüyü təyin edilərkən z_0 və z_1 kəmiyyətləri istənilən üfüqi müstəvidən ölçülə bilər. Aydındır ki, əgər $z_1 > z_0$ olarsa h mənfi qiymət aldığından ağırlıq qüvvəsinin işi də mənfi qiymət alır. Maddi nöqtənin trayektoriyası qapalı olduqda isə onun ağırlıq qüvvəsinin gördüyü iş sıfıra bərabər olar.

2. Elastiklik qüvvəsinin işi. Fərz edək ki, A ucundan tərpənməz sistemə birləşdirilmiş AB yayı B ucundan dartılır (şək.3.10). Bu vaxt yayı dartan cismə bu yayın reaksiya qüvvəsi, yəni elastiklik qüvvəsi $\bar{R}$ təsir edəcəkdir. Hesab edirik ki, yayın xarakteristikası xəttidir, yəni elastiklik qüvvəsinin qiyməti yayın uzantısı ilə düz mütənasibdir. Koordinat başlanğıcını yayın deformasiya olunmamış halına uyğun gələn B nöqtəsində qəbul edərək yazı bilərik:

$$R_x = -cx, \quad (6)$$

burada c – yayın sərtlilik əmsəlidir.

Elastiklik qüvvəsinin elementar işi

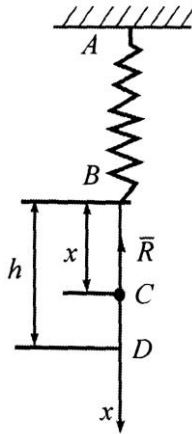
$$dA = R_x dx + R_y dy + R_z dz. \quad (7)$$

Baxılan halda

$$R_y = 0, \quad R_z = 0. \quad (8)$$

(6) və (8) ifadələrini (7)-də nəzərə alaq:

$$dA = -cxdx. \quad (9)$$



Şək.3.10

Elastiklik qüvvəsinin sonlu $BD = h$ yerdəyişməsində gördüyü iş

$$A_{BD} = -c \int_0^h x dx = -\frac{ch^2}{2}. \quad (10)$$

$ch = R_{\max}$ olduğu üçün

$$A_{BD} = -\frac{R_{\max} h}{2}. \quad (11)$$

Yayın deformasiyası artarkən onun elastiklik qüvvəsinin işi mənfi, azalarkən isə müsbət olur. Bu halda

$$A_{DB} = -A_{BD} = \frac{R_{\max} h}{2}. \quad (12)$$

3.11. Maddi nöqtənin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teorem

Teorem. Maddi nöqtənin hər hansı yerdəyişməsində onun kinetik enerjisinin dəyişməsi bu maddi nöqtəyə təsir edən qüvvənin həmin yerdəyişmədə gördüyü işə bərabərdir.

Teoremin riyazi ifadəsi:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A.$$

Burada $\frac{mV_0^2}{2}$ və $\frac{mV^2}{2}$ – maddi nöqtənin yerdəyişmənin uyğun olaraq əvvəlində və sonunda malik olduğu kinetik enerji; A – baxılan yerdəyişmədə maddi nöqtəyə tətbiq olunmuş qüvvənin gördüyü işdir. Kinetik enerji skalyar kəmiyyətdir.

İsbatı. Fərz edək ki, m kütləli maddi nöqtə verilmiş $\vec{F}$ qüvvəsinin təsiri altında fəzada hərəkət edərək M_0 vəziyyətindən M vəziyyətinə keçmişdir. Tutaq ki, bu nöqtənin

M_o vəziyyətində onun sürəti $\bar{V}_o$, M vəziyyətində isə $\bar{V}$ olmuşdur. $\bar{W} = \frac{d\bar{V}}{dt}$ olduğunu nəzərə alaraq maddi nöqtə üçün dinamikanın əsas tənliyini yazaq:

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}, \quad (1)$$

buradan

$$m d\bar{V} = \bar{F} dt. \quad (2)$$

Alınmış bərabərliyin hər iki tərəfini skalyar olaraq $\bar{V}$ vektoruna vuraq:

$$m \bar{V} \cdot d\bar{V} = \bar{F} \cdot \bar{V} dt. \quad (3)$$

Bu bərabərliyin sol və sağ tərəflərini ayrı-ayrılıqda nəzərdən keçirək:

$$m \bar{V} \cdot d\bar{V} = d\left(\frac{m \bar{V}^2}{2}\right) = d\left(\frac{m V^2}{2}\right), \quad (4)$$

$$\bar{F} \cdot \bar{V} dt = \bar{F} \cdot d\bar{r} = dA. \quad (5)$$

(5)-də $\bar{V} dt = d\bar{r}$ olduğu nəzərə alınmışdır. (4) və (5) ifadələrini (3)-də yerinə yazaq:

$$d\left(\frac{m V^2}{2}\right) = dA. \quad (6)$$

Buradan görünür ki, maddi nöqtənin kinetik enerjisinin diferensialı bu maddi nöqtəyə təsir edən qüvvənin elementar işinə bərabərdir. (6) bərabərliyi maddi nöqtənin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teoremi diferensial formada ifadə edir.

(6) ifadəsini baxılan sərhədlər daxilində integrallasaq alarıq:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A. \quad (7)$$

Teorem isbat olundu.

3.12. Qeyri-sərbəst maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənlikləri

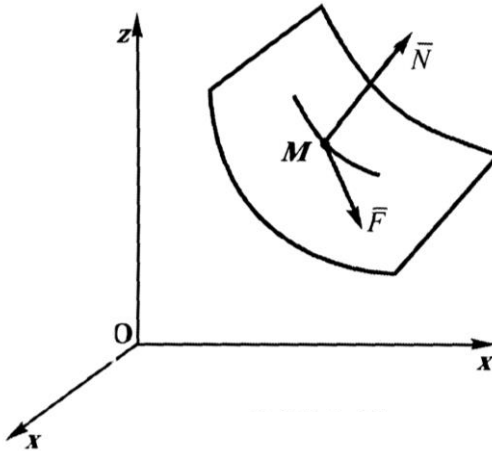
Fəzadakı yerdəyişmələri müəyyən şərtlərlə məhdudlaşdırılan maddi nöqtəyə qeyri-sərbəst maddi nöqtə deyilir. Maddi nöqtənin yerdəyişmələrini (hərəkətini) məhdudlaşdıran səbəblər rabitələr adlanır.

Qeyri-sərbəst maddi nöqtəyə misal olaraq tərpənməz səth üzrə verilmiş $\vec{F}$ qüvvəsinin təsiri altında hərəkət edən maddi nöqtəni göstərmək olar (şək.3.11). Tutaq ki, bu səth ideal hamardır (yəni səthlə maddi nöqtə arasında sürtünmə qüvvəsi yoxdur) və onun tənliyi aşağıdakı şəkildə verilmişdir:

$$f(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

Baxılan halda səthin reaksiya qüvvəsi $\vec{N}$ bu səthin normalı boyunca yönələcəkdir.

Səth üzrə hərəkəti öyrənilən M maddi nöqtəsi üçün dinamikanın əsas tənliyini yazaq:



Şək. 3.11

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{N}. \quad (2)$$

Bu ifadəni koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq alarıq:

$$\left. \begin{aligned} mW_x &= F_x + N_x, \\ mW_y &= F_y + N_y, \\ mW_z &= F_z + N_z. \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

burada

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{d^2x}{dt^2}, \quad W_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad W_z = \frac{d^2z}{dt^2}, \\ N_x &= N \cos(\bar{N}, x), \quad N_y = N \cos(\bar{N}, y), \\ N_z &= N \cos(\bar{N}, z). \end{aligned}$$

Onda

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + N \cos(\bar{N}, x), \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + N \cos(\bar{N}, y), \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + N \cos(\bar{N}, z). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Diferensial həndəsədən məlumdur ki,

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{N}, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}, \quad \cos(\bar{N}, y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}, \quad \cos(\bar{N}, z) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f} \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

burada

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \quad (6)$$

Δf baxılan f funksiyanın birinci diferensial parametri adlanır.

(5) ifadələrini (4) bərabərliklərində yerinə yazaq:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

İşarə edək: $\frac{N}{\Delta f} = \lambda$ (λ – Laqranc vuruğu adlanır). Onda

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8) tənlikləri qeyri-sərbəst maddi nöqtənin hərəkətinin Laqranc formada diferensial tənlikləri adlanır. Bu tənlikləri səthin (1) tənliyi ilə birlikdə həll edərək x, y, z və λ məchullarını zamanın funksiyaları kimi tapa bilərik. Tapılmış $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ ifadələri maddi nöqtənin

hərəkətinin kinematik tənlikləri olur. Səthin normal reaksiya qüvvəsi isə $N = \lambda \cdot \Delta f$ düsturundan təyin edilir.

Bəzi hallarda (2) vektorial ifadəsini təbii koordinat oxları üzərinə proyeksiyalamaq daha məqsəduyğun olur. Onda alırıq:

$$mW_\tau = F_\tau + N_\tau, \quad mW_n = F_n + N_n, \quad mW_b = F_b + N_b \}, \quad (9)$$

burada τ, n və b indeksli kəmiyyətlər uyğun vektorial kəmiyyətlərin toxunan, baş normal və binormal üzərindəki proyeksiyalarıdır. Baxılan halda $N_\tau = 0$. Kinematikadan isə məlumdur ki,

$$W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad W_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad W_b = 0 \}, \quad (10)$$

burada s – maddi nöqtənin qövsü koordinatı, ρ isə onun trayektoriyasının baxılan nöqtəsindəki əyrilik radiusudur. Deyilənləri (9)-da nəzərə alsaq əldə edərik:

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = F_\tau, \quad m \frac{V^2}{\rho} = F_n + N_n, \quad 0 = F_b + N_b. \quad \} \quad (11)$$

Bu ifadələr qeyri-sərbəst maddi nöqtənin hərəkətinin təbii formada (Eyler formasında) diferensial tənlikləridir. Bunların birincisindən maddi nöqtənin $s = f(t)$ şəklində kinematik hərəkət qanununu, ikinci və üçüncüsündən isə $\bar{N}$ reaksiya qüvvəsinin toplananlarını tapmaq olar.

3.13. Maddi nöqtə üçün Dəlamber prinsipi

Prinsip. Maddi nöqtəyə təsir edən verilmiş qüvvənin, rəbitənin reaksiya qüvvəsinin və bu maddi nöqtənin inersiya qüvvəsinin həndəsi cəmi sıfıra bərabərdir.

Prinsipin riyazi ifadəsi:

$$\bar{F} + \bar{N} + \bar{F}^{in} = 0 .$$

Burada $\bar{F}$ – verilmiş qüvvə; $\bar{N}$ – rəbitənin reaksiya qüvvəsi; $\bar{F}^{in}$ – maddi nöqtənin inersiya qüvvəsidir.

Maddi nöqtə üçün Dalamber prinsipi aşağıdakı kimi əsaslandırılır.

Fərz edək ki, baxılan qeyri-sərbəst M maddi nöqtəsinə verilmiş $\bar{F}$ qüvvəsi və rəbitənin $\bar{N}$ reaksiya qüvvəsi təsir edir. Bu maddi nöqtə üçün dinamikanın əsas tənliyini yazaq:

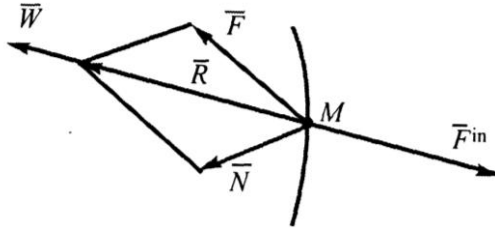
$$m\bar{W} = \bar{F} + \bar{N} . \quad (1)$$

$\bar{F}$ və $\bar{N}$ qüvvələrinin əvəzləyicisini $\bar{R}$ ilə işarə edək (şəkl. 3.12). Yəni

$$\bar{F} + \bar{N} = \bar{R} . \quad (2)$$

İndi fərz edək ki, M maddi nöqtəsinə qiymətçə $|m\bar{W}|$ –yə bərabər, istiqamətçə isə $\bar{W}$ –nin (beləliklə də $\bar{R}$ –in) əksinə yönəlmiş əlavə bir qüvvə də tətbiq edilmişdir. Həmin bu əlavə qüvvəni maddi nöqtənin inersiya qüvvəsi adlandırırlar. Deyilənlərə əsasən yaza bilərik:

$$\bar{F}^{in} = -m\bar{W} . \quad (3)$$



Şək. 3.12

(1) ifadəsindən

$$\vec{F} + \vec{N} + (-m\vec{W}) = 0. \quad (4)$$

(3)-ü burada nəzərə alsaq maddi nöqtə üçün Dalamber prinsipinin riyazi ifadəsini əldə edərik:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{in} = 0. \quad (5)$$

Əgər maddi nöqtə sərbəstdirsə $\vec{N} = 0$ olar, və nəticədə Dalamber prinsipi bu şəkildə yazılar:

$$\vec{F} + \vec{F}^{in} = 0. \quad (6)$$

(3) bərabərliyini düzbucaqlı dekart koordinat sisteminin oxları üzərinə proyeksiyalasaq inersiya qüvvəsinin analitik ifadələrini alarıq:

$$\left. \begin{aligned} F_x^{in} &= -mW_x = -m \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ F_y^{in} &= -mW_y = -m \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ F_z^{in} &= -mW_z = -m \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(3) bərabərliyini təbii oxlar üzərinə proyeksiyaladıqda isə əldə edərik:

$$\left. \begin{aligned} F_{\tau}^{in} &= -mW_{\tau} = -m \frac{dV_{\tau}}{dt}, \\ F_n^{in} &= -mW_n = -m \frac{V^2}{\rho}, \\ F_b^{in} &= -mW_b = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Burada F_{τ}^{in} və F_n^{in} uyğun olaraq toxunan və normal inersiya qüvvələri adlanır. Normal inersiya qüvvəsinə bəzən mərkəzdənqaçma qüvvəsi də deyirlər. (8) ifadələrinə görə maddi nöqtənin inersiya qüvvəsi həmişə çoxtoxunan müstəvi üzərində yerləşir.

Hər hansı dinamika məsələsinin Dalamber prinsipinin köməyi ilə həll edilməsinə kinetostatika üsulu deyirlər. Kinetostatika üsulu bir sıra dinamika məsələlərinin statika qaydaları ilə həll edilməsinə imkan verir.

Qeyd etmək lazımdır ki, inersiya qüvvəsi maddi nöqtənin özünə yox, ona təcil verən cismə tətbiq olunur.

İnersiya qüvvəsinin mahiyyəti barədə alimlər arasında uzun müddət mübahisələr olmuşdur.

3.14. Maddi nöqtənin nisbi hərəkətinin diferensial tənlikləri

Biz indiyə qədər maddi nöqtənin hərəkətini tərpənməz (inersial) sistemə nəzərən öyrənirdik. İndi isə maddi nöqtənin tərpənən (ümumi halda qeyri-inersial) sistemə nəzərən hərəkətini tədqiq edək. Fərz edək ki, m kütləli M maddi nöqtəsi verilmiş $\bar{F}$ qüvvəsinin və rəbitənin $\bar{N}$ reaksiya qüvvəsinin təsiri altında tərpənən $Oxyz$ sisteminə nəzərən, bu

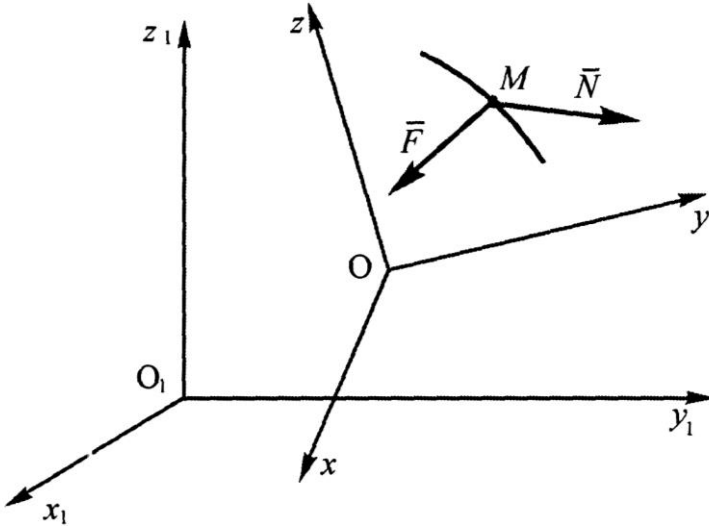
sistem isə öz növbəsində tərpənməz $O_1x_1y_1z_1$ sisteminə nəzərən hərəkət edir (şək. 3.13). Bu maddi nöqtənin tərpənən $Oxyz$ sisteminə nəzərən hərəkəti nisbi, tərpənməz $O_1x_1y_1z_1$ sisteminə nəzərən hərəkəti isə mütləq hərəkət olacaqdır. M maddi nöqtəsinin tərpənməz sistemə nəzərən hərəkəti üçün dinamikanın əsas tənliyini yazaq:

$$m\overline{W}_a = \overline{F} + \overline{N}, \quad (1)$$

burada $\overline{W}_a$ – maddi nöqtənin mütləq təcildir. Kinematikadan məlumdur ki,

$$\overline{W}_a = \overline{W}_e + \overline{W}_r + \overline{W}_k. \quad (2)$$

Bu ifadədə $\overline{W}_e, \overline{W}_r$ və $\overline{W}_k$ – uyğun olaraq maddi nöqtənin köçürmə, nisbi və Koriolis təciləridir.



Şək. 3.13

(2) ifadəsini (1) bərabərliyində yerinə yazaq:

$$m\overline{W}_e + m\overline{W}_r + m\overline{W}_k = \overline{F} + \overline{N}. \quad (3)$$

Buradan

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} + (-m\overline{W}_e) + (-m\overline{W}_k). \quad (4)$$

İşarə edək:

$$-m\overline{W}_e = \overline{F}_e^{in}, \quad -m\overline{W}_k = \overline{F}_k^{in} \}, \quad (5)$$

Burada $\overline{F}_e^{in}$ və $\overline{F}_k^{in}$ – maddi nöqtənin uyğun olaraq köçürmə və Koriolis inersiya qüvvələri adlanır.

Sonuncu ifadələri (4)-də nəzərə alsaq əldə edərik:

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} + \overline{F}_e^{in} + \overline{F}_k^{in}. \quad (6)$$

Bu ifadə maddi nöqtənin nisbi hərəkətinin əsas tənliyi adlanır.

(6)-nı tərpənən sistemin oxları üzərinə proyeksiyalasaq maddi nöqtənin nisbi hərəkətinin diferensial tənliklərini alarıq:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + N_x + F_{ex}^{in} + F_{kx}^{in}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + N_y + F_{ey}^{in} + F_{ky}^{in}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + N_z + F_{ez}^{in} + F_{kz}^{in}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Burada x, y, z – maddi nöqtənin tərpənən sistemdəki koordinatlarıdır.

Kinematikadan məlumdur ki, $\overline{W}_k = 2(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r)$ ($\overline{\omega}_e$ – tərpənən sistemin bucaq sürəti; $\overline{V}_r$ – maddi nöqtənin nisbi sürəti). Onda (5)-ə görə $\overline{F}_k^{in} = -2m(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r)$ olar.

Bəzi xüsusi halları nəzərdən keçirək.

1. Tərpənən sistem irəliləmə hərəkəti edir. Bu halda $\overline{W}_k = 0$ olduğu üçün $\overline{F}_k^{in} = 0$ alınır. Nəticədə maddi nöqtənin nisbi hərəkətinin əsas tənliyi bu şəkllə düşür:

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} + \overline{F}_e^{in}. \quad (8)$$

2. Tərpənən sistem bərabərsürətli düzxətli irəliləmə hərəkəti edir. Bu halda $\overline{W}_k = 0$, $\overline{W}_e = 0$. Onda $\overline{F}_k^{in} = 0$, $\overline{F}_e^{in} = 0$ və

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} \quad (9)$$

alınır. (1) və (9) ifadələrinin müqayisəsindən görünür ki, bu halda nisbi hərəkətin əsas tənliyi mütləq hərəkətin əsas tənliyi ilə üst-üstə düşür. Bu isə onu göstərir ki, baxılan halda tərpənən sistem də inersial sistem olur. Bu nəticə klassik mexanikanın nisbilik prinsipi adlanır. Bu prinsip birinci dəfə olaraq Qaliley tərəfindən kəşf edilmişdir.

3. $\overline{V}_r = 0$, $\overline{W}_r = 0$ olan halda $\overline{F}_k^{in} = 0$, və (6) ifadəsinə görə

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{F}_e^{in} = 0 \quad (10)$$

olar. Bu bərabərliyə maddi nöqtənin nisbi müvazinət (nisbi sükunət) tənliyi deyilir.

3.15. Maddi sistem və ona təsir edən qüvvələr

Bir-biri ilə müəyyən şərtlərlə bağlı olan maddi nöqtələr yığımına maddi sistem deyilir. Maddi sistemi maddi nöqtələr sistemi, yaxud sadəcə olaraq sistem də adlandırırlar.

Əgər sistemin maddi nöqtələrinin fəzadakı yerdəyişmələrinə heç bir məhdudiyyət qoyulmazsa (sistemin öz maddi nöqtələrinin qarşılıqlı təsirindən əlavə), o, sərbəst sistem adlanır. Əks halda sistem qeyri-sərbəst sistem hesab olunur.

Sistemin maddi nöqtələrinin fəzadakı yerdəyişmələrini məhdudlaşdıran səbəblərə rabitələr deyilir. Əgər rabitənin tənliyi zamandan aşkar şəkildə asılıdırsa, o, qeyri-stasionar, asılı deyilsə stasionar rabitə adlanır. Rabitənin tənliyi sürətdən aşkar şəkildə asılı olduqda isə ona qeyri-holonom rabitə deyirlər. Əks halda rabitə holonom olur. Sistemin maddi nöqtələrinin yerdəyişmələrini məhdudlaşdıran həndəsi xarakterli şərtlər həndəsi rabitələr adlanır.

Maddi sistemə təsir edən qüvvələri daxili və xarici olmaqla iki qrupa bölmək olar. Sistemin öz maddi nöqtələri arasında yaranan qüvvələr daxili qüvvələr adlanır. Verilmiş daxili qüvvəni $\vec{F}^i$ ilə işarə edəcəyik. Sistemin maddi nöqtələri ilə bu sistemə daxil olmayan maddi nöqtələr arasında yaranan qarşılıqlı təsir qüvvələrinə isə xarici qüvvələr deyilir. Verilmiş xarici qüvvəni $\vec{F}^e$ ilə işarə edəcəyik.

Sistemin daxili qüvvələrinin aşağıdakı xassələri vardır:

1. Sistemin daxili qüvvələrinin baş vektoru, yəni həndəsi cəmi sıfıra bərabərdir.

Daxili qüvvələrin bu xassəsi dinamikanın üçüncü əsas qanunu ilə izah olunur. Məlum olduğu kimi, bu qanuna görə istənilən iki maddi nöqtə bir-birinə qiymətcə bərabər və bir düz xətt boyunca əks tərəflərə yönəlmiş qüvvələrlə təsir edir. Bunu sistemin maddi nöqtələrinin hamısı üçün ümumiləşdirərək yazı bilərik:

$$\sum \bar{F}_i^j = 0. \quad (1)$$

(1) bərabərliyi sistemin daxili qüvvələrinin birinci xassəsini ifadə edir. (1) ifadəsini koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq alarıq:

$$\sum F_{ix}^j = 0, \quad \sum F_{iy}^j = 0, \quad \sum F_{iz}^j = 0. \quad \} \quad (2)$$

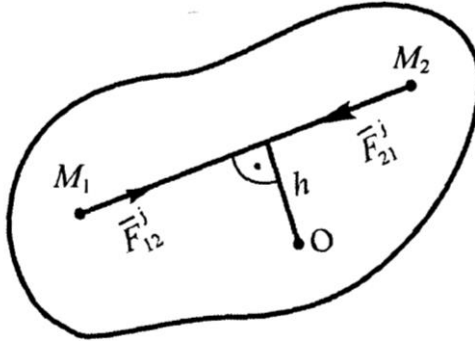
Deməli, sistemin daxili qüvvələrinin istənilən ox üzərindəki proyeksiyalarının cəmi sıfır bərabərdir.

2. Sistemin daxili qüvvələrinin istənilən mərkəzə nəzərən baş momenti, yəni vektor-momentlərinin həndəsi cəmi sıfır bərabərdir.

Fərz edək ki, sistemin ixtiyari olaraq götürülmüş M_1 və M_2 maddi nöqtələrinin qarşılıqlı təsir qüvvələri $\bar{F}_{12}^j$ və $\bar{F}_{21}^j$ –dir (şək. 3.14). $\bar{F}_{12}^j = -\bar{F}_{21}^j$ olduğu üçün baxılan halda (bu qüvvələrin hər hansı mərkəzə nəzərən qolları da eynidir)

$$\bar{m}_0(\bar{F}_{12}^j) + \bar{m}_0(\bar{F}_{21}^j) = 0, \quad (3)$$

burada $\bar{m}_0(\bar{F}_{12}^j)$ və $\bar{m}_0(\bar{F}_{21}^j)$ - uyğun olaraq $\bar{F}_{12}^j$ və $\bar{F}_{21}^j$ qüvvələrinin ixtiyari O mərkəzinə nəzərən vektor-momentləridir.



Şək.3.14

(3) ifadəsini sistemin maddi nöqtələrinin hamısı üçün ümumiləşdirərək yazı bilərik (daxili qüvvələrin ikinci xassəsi):

$$\sum \bar{m}_0(\bar{F}_i^j) = 0. \quad (4)$$

Bu vektorial bərabərliyi analitik formada belə ifadə etmək olar:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_x(\bar{F}_i^j) &= 0, \\ \sum m_y(\bar{F}_i^j) &= 0, \\ \sum m_z(\bar{F}_i^j) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(5) ifadələrinə görə sistemin daxili qüvvələrinin istənilən oxa nəzərən momentlərinin cəmi, yəni baş momenti sıfıra bərabərdir.

3.16. Sistemin kütlələr mərkəzinin hərəkəti haqqında teorem

Teorem. İstənilən sistemin kütlələr mərkəzinin hərəkətinə maddi nöqtənin hərəkəti kimi baxmaq olar, bu şərtlə ki, həmin

maddi nöqtənin kütləsi sistemin kütləsinə bərabər hesab olunsun və ona sistemə təsir edən xarici qüvvələrin baş vektoru tətbiq edilsin.

Teoremin riyazi ifadəsi:

$$M\overline{W}_c = \overline{R}^e.$$

Burada M – sistemin kütləsi; $\overline{W}_c$ – sistemin kütlələr mərkəzi olan C nöqtəsinin təcili; $\overline{R}^e$ – sistemə təsir edən xarici qüvvələrin baş vektorudur. Məlumdur ki, $\overline{R}^e = \sum \overline{F}_i^e$.

Sistemin kütləsi onu təşkil edən maddi nöqtələrin kütlələrinin cəminə bərabərdir, yəni $M = \sum m_i$.

İsbatı. Əvvəlcə sistemin kütlələr mərkəzi anlayışının nə olduğunu müəyyən edək. Sistemin kütlələr mərkəzi elə bir həndəsi nöqtəyə deyilir ki, onun istənilən tərpənməz nöqtəyə nəzərən radius-vektoru bu ifadə ilə təyin edilsin:

$$\overline{r}_c = \frac{\sum m_i \overline{r}_i}{M}, \quad (1)$$

burada m_i – sistemin ixtiyari i maddi nöqtəsinin kütləsi; $\overline{r}_i$ – həmin maddi nöqtənin radius-vektorudur. $\overline{r}_i$ və $\overline{r}_c$ radius-vektorlarının başlanğıcı eyni tərpənməz nöqtədə yerləşir. (1) -dən yazı bilərik:

$$M \overline{r}_c = \sum m_i \overline{r}_i. \quad (2)$$

Bu ifadədən zamana görə iki dəfə törəmə alaq:

$$M \frac{d^2 \overline{r}_c}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2 \overline{r}_i}{dt^2}. \quad (3)$$

Kinematika qaydalarına görə

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} &= \bar{W}_c, & \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} &= \bar{W}_i. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Burada $\bar{W}_i$ – sistemin i maddi nöqtəsinin təcildir.

(4) ifadələrini (3)-də yerinə yazsaq alarıq:

$$M\bar{W}_c = \sum m_i \bar{W}_i. \quad (5)$$

Nyutonun ikinci qanununa görə

$$m_i \bar{W}_i = \bar{F}_i^e + \bar{F}_i^j. \quad (6)$$

$\bar{F}_i^e$ və $\bar{F}_i^j$ – uyğun olaraq sistemin i maddi nöqtəsinə təsir edən xarici və daxili qüvvələrdir.

(6) bərabərliyini sistemin maddi nöqtələrinin hamısı üçün tərtib edib cəmləsək alarıq:

$$\sum m_i \bar{W}_i = \sum \bar{F}_i^e + \sum \bar{F}_i^j \quad (7)$$

Məlumdur ki, sistemin daxili qüvvələrinin həndəsi cəmi sıfıra bərabərdir, yəni $\sum \bar{F}_i^j = 0$. Onda

$$\sum m_i \bar{W}_i = \sum \bar{F}_i^e \quad (8)$$

olar. $\sum \bar{F}_i^e = \bar{R}^e$ olduğuna görə $\sum m_i \bar{W}_i = \bar{R}^e$. Bu ifadəni (5) –də yerinə yazsaq əldə edərik:

$$M\bar{W}_c = \bar{R}^e. \quad (9)$$

Teorem isbat olundu. Bu teoremi aşağıdakı şəkildə də yazı bilərik:

$$M\overline{W}_c = \sum \overline{F}_i^e. \quad (10)$$

Alınmış bərabərliyi koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq baxılan teoremin analitik ifadələrini alırıq:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x_c}{dt^2} &= \sum F_{ix}^e, \\ M \frac{d^2 y_c}{dt^2} &= \sum F_{iy}^e, \\ M \frac{d^2 z_c}{dt^2} &= \sum F_{iz}^e. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Burada x_c, y_c, z_c – sistemin kütlələr mərkəzinin koordinatlarıdır. (11) ifadələri sistemin kütlələr mərkəzinin hərəkətinin diferensial tənlikləri adlanır.

Sistemin kütlələr mərkəzinin hərəkəti haqqında teoremə görə daxili qüvvələr kütlələr mərkəzinin hərəkətinə bilavasitə təsir etmir. Ona görə də xarici qüvvələr olmadıqda sistemin kütlələr mərkəzi ya tərpənməz qalır, ya da bərabərsürətli düzxətli hərəkət edir.

3.17. Sistemin hərəkət miqdarı haqqında teorem

Teorem. Sistemin hərəkət miqdarından zamana görə alınmış törəmə bu sistemə təsir edən xarici qüvvələrin baş vektoruna bərabərdir.

Teoremin riyazi ifadəsi:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{R}^e .$$

Burada $\bar{K}$ – sistemin hərəkət miqdarı ($\bar{K} = \sum m_i \bar{V}_i$); $\bar{R}^e$ – sistemə təsir edən xarici qüvvələrin baş vektorudur ($\bar{R}^e = \sum \bar{F}_i^e$). Sistemin hərəkət miqdarı vektorial kəmiyyətdir. $\bar{V}_i$ – sistemin ixtiyari i maddi nöqtəsinin sürətidir.

İsbatı. Sistemin ixtiyari olaraq götürülmüş i maddi nöqtəsi üçün dinamikanın əsas tənliyini yazaq:

$$m_i \bar{W}_i = \bar{F}_i^e + \bar{F}_i^j , \quad (1)$$

burada $\bar{F}_i^e$ və $\bar{F}_i^j$ – uyğun olaraq sistemin i maddi nöqtəsinə təsir edən xarici və daxili qüvvələrdir.

Kinematikadan məlumdur ki, $\bar{W}_i = \frac{d\bar{V}_i}{dt}$. Onda

$$m \bar{W}_i = m \frac{d\bar{V}_i}{dt} = \frac{d}{dt} m_i \bar{V}_i . \quad (2)$$

Bunu (1) –də nəzərə alaq:

$$\frac{d}{dt} m_i \bar{V}_i = \bar{F}_i^e + \bar{F}_i^j . \quad (3)$$

(3) ifadəsini sistemin maddi nöqtələrinin hamısı üçün tərtib edib cəmləsək alarıq:

$$\sum \frac{d}{dt} m_i \bar{V}_i = \sum \bar{F}_i^e + \sum \bar{F}_i^j , \quad (4)$$

burada

$$\sum \frac{d}{dt} m_i \bar{V}_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \bar{V}_i = \frac{d\bar{K}}{dt};$$

$$\sum \bar{F}_i^e = \bar{R}^e; \quad \sum \bar{F}_i^j = 0.$$

Onda (4) ifadəsinə görə

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{R}^e \quad (5)$$

olar. Bununla da teorem isbat olundu.

(5) bərabərliyini koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq baxılan teoremin analitik ifadələrini əldə edərik:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= R_x^e, & \frac{dK_y}{dt} &= R_y^e, & \frac{dK_z}{dt} &= R_z^e \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Qeyd edək ki, sistemin hərəkət miqdarını belə də ifadə etmək olar:

$$\bar{K} = \sum m_i \bar{V}_i = \sum m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \bar{r}_i. \quad (7)$$

Məlumdur ki, $\sum m_i \bar{r}_i = M \bar{r}_c$. Onda

$$\bar{K} = \frac{d}{dt} M \bar{r}_c = M \frac{d\bar{r}_c}{dt} = M \bar{V}_c. \quad (8)$$

Bu ifadələrdə $\bar{r}_i$ və $\bar{r}_c$ – uyğun olaraq sistemin ixtiyari i maddi nöqtəsinin və bu sistemin kütlələr mərkəzinin radius-vektorları; $\bar{V}_c$ – kütlələr mərkəzinin sürətidir.

3.18. İmpulslar teoremi

Teorem. Sistemin hərəkət miqdarının müəyyən zaman fasiləsində dəyişməsi bu sistemə təsir edən xarici qüvvələrin həmin zaman fasiləsindəki impulslarının həndəsi cəminə bərabərdir.

Teoremin riyazi ifadəsi:

$$\bar{K} - \bar{K}_0 = \sum \bar{S}_i^e .$$

Burada $\bar{K}_0$ və $\bar{K}$ – baxılan zaman fasiləsinin uyğun olaraq başlanğıc və sonunda sistemin hərəkət miqdarı; $\sum \bar{S}_i^e$ – sistemə təsir edən xarici qüvvələrin həmin zaman fasiləsindəki impulslarının həndəsi cəmidir.

İsbatı. Sistemin hərəkət miqdarı haqqındakı teoremə görə $\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{R}^e$. Xarici qüvvələrin baş vektoru $\bar{R}^e = \sum \bar{F}_i^e$. Onda

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \sum \bar{F}_i^e , \quad (1)$$

buradan

$$d\bar{K} = \sum \bar{F}_i^e dt . \quad (2)$$

Bu ifadəni uyğun sərhədlər daxilində integrallasaq alaraq:

$$\bar{K} - \bar{K}_0 = \sum \int_0^t \bar{F}_i^e dt . \quad (3)$$

İşarə edək: $\int_0^t \bar{F}_i^e dt = \bar{S}_i^e$. Bu halda (3) ifadəsi belə

yazılar:

$$\bar{K} - \bar{K}_0 = \sum \bar{S}_i^e. \quad (4)$$

Teorem isbat olundu.

(4) bərabərliyini koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq baxılan teoremin analitik ifadələrini əldə edirik:

$$\left. \begin{aligned} K_x - K_{ox} &= \sum S_{ix}^e, \\ K_y - K_{oy} &= \sum S_{iy}^e, \\ K_z - K_{oz} &= \sum S_{iz}^e. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Bu teoremi bəzən sistemin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teorem də adlandırırlar.

3.19. Sistemin kinetik momenti haqqında teorem

Teorem. Sistemin hər hansı tərpənməz mərkəzə nəzərən kinetik momentindən zamana görə alınmış törəmə bu sistemə təsir edən xarici qüvvələrin həmin mərkəzə nəzərən baş momentinə bərabərdir.

Teoremin riyazi ifadəsi:

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \bar{M}_o^e.$$

Burada $\bar{L}_o$ – sistemin hər hansı tərpənməz O mərkəzinə nəzərən kinetik momentidir. Kinetik moment sistemin maddi nöqtələrinin hərəkət miqdarlarının həmin O mərkəzinə nəzərən vektor-momentlərinin həndəsi cəminə, yəni baş momentinə bərabərdir. Deməli $\bar{L}_o = \sum \bar{m}_o(m_i \bar{V}_i)$. $\bar{M}_o^e$ – sistemə təsir edən xarici qüvvələrin O mərkəzinə nəzərən baş momentidir və belə ifadə olunur: $\bar{M}_o^e = \sum \bar{m}_o(\bar{F}_i^e)$.

İsbatı. Sistemin ixtiyari olaraq götürülmüş i maddi nöqtəsi üçün hərəkət miqdarının momenti haqqındakı teoremi yazaq:

$$\frac{d}{dt} \bar{m}_0(m_i \bar{V}_i) = \bar{m}_0(\bar{F}_i^e) + \bar{m}_0(\bar{F}_i^j), \quad (1)$$

burada $\bar{m}_0(m_i \bar{V}_i)$ – sistemin həmin i maddi nöqtəsinin hərəkət miqdarının hər hansı tərpənməz O mərkəzinə nəzərən vektor-moment; $\bar{m}_0(\bar{F}_i^e)$ və $\bar{m}_0(\bar{F}_i^j)$ sistemin i maddi nöqtəsinə təsir edən xarici və daxili qüvvələrin həmin O mərkəzinə nəzərən vektor-momentləridir.

(1) ifadəsini sistemin maddi nöqtələrinin hamısı üçün tərtib edib cəmləsək alarıq:

$$\sum \frac{d}{dt} \bar{m}_0(m_i \bar{V}_i) = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_i^e) + \sum \bar{m}_0(\bar{F}_i^j). \quad (2)$$

Məlumdur ki, sistemin daxili qüvvələrinin istənilən mərkəzə nəzərən vektor-momentlərinin həndəsi cəmi sıfıra bərabərdir. Deməli $\sum \bar{m}_0(\bar{F}_i^j) = 0$. Onda

$$\sum \frac{d}{dt} \bar{m}_0(m_i \bar{V}_i) = \frac{d}{dt} \sum \bar{m}_0(m_0 \bar{V}_i)$$

olduğunu nəzərə alaraq (2) ifadəsindən

$$\frac{d}{dt} \sum \bar{m}_0(m_i \bar{V}_i) = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_i^e) \quad (3)$$

bərabərliyini alarıq. Burada

$$\sum \bar{m}_0(m_i \bar{V}_i) = \bar{L}_o; \quad \sum m_0(\bar{F}_i^e) = \bar{M}_o^e \} \quad (4)$$

Bu ifadələri (3)-də nəzərə alaq:

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \bar{M}_o^e. \quad (5)$$

Teorem isbat olundu.

(5) bərabərliyini koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq baxılan teoremin analitik ifadələrini əldə edərik:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= M_x^e, & \frac{dL_y}{dt} &= M_y^e, & \frac{dL_z}{dt} &= M_z^e. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Xüsusi hallarda sistemə təsir edən xarici qüvvələrin verilmiş mərkəzə, yaxud oxa nəzərən baş momenti müəyyən zaman fasiləsi ərzində sıfıra bərabər ola bilər. Onda (5) və (6) ifadələrinə uyğun olaraq sistemin həmin mərkəzə, yaxud oxa nəzərən kinetik momenti bu zaman fasiləsi ərzində sabit qalar.

3.20. Sistemin kinetik enerjisi (Keniq teoremi)

Sistemin kinetik enerjisi ümumi halda Keniq teoreminə əsasən hesablanı bilər.

Teorem. Sistemin kinetik enerjisi kütləsi bu sistemin kütləsinə bərabər hesab olunan kütlələr mərkəzinin kinetik enerjisi ilə sistemin həmin mərkəz ətrafındakı nisbi hərəkətində malik olduğu kinetik enerjinin cəminə bərabərdir.

Teoremin riyazi ifadəsi:

$$T = \frac{MV_c^2}{2} + \sum \frac{m_i V_{ri}^2}{2}.$$

Burada T – sistemin kinetik enerjisi; M – sistemin kütləsi; V_c – sistemin kütlələr mərkəzinin sürəti; m_i – sistemin ixtiyari i maddi nöqtəsinin kütləsi; V_{ri} – həmin maddi nöqtənin sistemin kütlələr mərkəzi ətrafında nisbi hərəkətindəki sürətidir.

İsbatı. Baxılan sistemin ixtiyari olaraq götürülmüş i maddi nöqtəsi üçün kinetik enerjinin ifadəsini yazaq:

$$T_i = \frac{m_i V_i^2}{2}, \quad (1)$$

Burada V_i – sistemin i maddi nöqtəsinin mütləq sürətidir. Sistemin kinetik enerjisi isə onun ayrı-ayrı maddi nöqtələrinin kinetik enerjilərinin cəminə bərabərdir, yəni

$$T = \sum T_i = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}. \quad (2)$$

Baxılan halda i maddi nöqtəsinin mütləq sürəti

$$\bar{V}_i = \bar{V}_c + \bar{V}_{ri}. \quad (3)$$

Onda

$$V_i^2 = \bar{V}_i \cdot \bar{V}_i = (\bar{V}_c + \bar{V}_{ri}) \cdot (\bar{V}_c + \bar{V}_{ri}) = V_c^2 + 2\bar{V}_c \cdot \bar{V}_{ri} + V_{ri}^2. \quad (4)$$

Bu ifadəni (2)-də yerinə yazaq:

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{m_i V_c^2}{2} + \sum m_i \bar{V}_c \cdot \bar{V}_{ri} + \sum \frac{m_i V_{ri}^2}{2} = \\ &= \frac{V_c^2}{2} \sum m_i + \bar{V}_c \cdot \sum m_i \bar{V}_{ri} + \sum \frac{m_i V_{ri}^2}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

burada $\sum m_i = M, \quad \sum m_i \bar{V}_{ri} = \sum m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \bar{r}_i.$

Məlumdur ki, $\sum m_i \bar{r}_i = M \bar{r}_c.$ Onda $\sum m_i \bar{V}_{ri} = \frac{d}{dt} M \bar{r}_c$ və

$$T = \frac{MV_c^2}{2} + \bar{V}_c \cdot \frac{d}{dt} M \bar{r}_c + \sum \frac{m_i V_{ri}^2}{2}. \quad (6)$$

Baxılan halda radius-vektorların başlanğıcı sistemin kütlələr mərkəzi olan C nöqtəsində götürülür. Deməli, $\bar{r}_c = 0.$ Nəticədə (6) bərabərliyindən alarıq:

$$T = \frac{MV_c^2}{2} + \sum \frac{m_i V_{ri}^2}{2}. \quad (7)$$

Teorem isbat olundu.

3.21. Sistemin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teorem

Teorem. Sistemin hər hansı yerdəyişməsində onun kinetik enerjisinin dəyişməsi bu sistemə təsir edən xarici və daxili qüvvələrin həmin yerdəyişmədə gördükləri işlərin cəminə bərabərdir.

Teoremin riyazi ifadəsi:

$$T - T_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^j .$$

Burada T_0 və T – yerdəyişmənin uyğun olaraq başlanğıcında və sonunda sistemin kinetik enerjisi; $\sum A_i^e$ və $\sum A_i^j$ – uyğun olaraq xarici və daxili qüvvələrin sistemin baxılan yerdəyişməsində gördükləri işlərin cəmləridir.

İsbatı. Sistemin ixtiyari olaraq seçilmiş i maddi nöqtəsi üçün kinetik enerjinin dəyişməsi haqqındakı teoremi yazaq:

$$\frac{m_i V_i^2}{2} - \frac{m_i V_{oi}^2}{2} = A_i^e + A_i^j , \quad (1)$$

burada $\frac{m_i V_{oi}^2}{2}$ və $\frac{m_i V_i^2}{2}$ – sistemin baxılan yerdəyişməsinin uyğun olaraq başlanğıcında və sonunda onun ixtiyari i maddi nöqtəsinin kinetik enerjisi; A_i^e və A_i^j – uyğun olaraq həmin yerdəyişmədə i maddi nöqtəsinə təsir edən xarici və daxili qüvvələrin işləridir.

(1) ifadəsini sistemin maddi nöqtələrinin hamısı üçün tərtib edib cəmləsək alarıq:

$$\sum \frac{m_i V_i^2}{2} - \sum \frac{m_i V_{oi}^2}{2} = \sum A_i^e + \sum A_i^j. \quad (2)$$

İşarə edək:

$$\left. \begin{aligned} \sum \frac{m_i V_i^2}{2} &= T, & \sum \frac{m_i V_{oi}^2}{2} &= T_0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Onda

$$T - T_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^j. \quad (4)$$

Teorem isbat olundu.

Sistemin daxili qüvvələri onun maddi nöqtələrinin ancaq qarşılıqlı yerdəyişmələrinə səbəb ola bilər. Mütləq bərk cismin nöqtələri arasında isə qarşılıqlı yerdəyişmələr mümkün deyil. Onda bu hal üçün $\sum A_i^j = 0$ olar. Nəticədə sistemin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teorem bərk cisim üçün belə yazılır:

$$T - T_0 = \sum A_i^e. \quad (5)$$

3.22. Sistem üçün Dalamber prinsipi

Prinsip. Sistemə təsir edən verilmiş qüvvələrin, rabitə reaksiyalarının və bu sistemin maddi nöqtələrinin inersiya qüvvələrinin baş vektorlarının həndəsi cəmi sıfıra bərabərdir, həmçinin həmin qüvvələrin hər hansı tərpəməz mərkəzə nəzərən baş momentlərinin həndəsi cəmi sıfıra bərabərdir.

Prinsipin riyazi ifadəsi:

$$\begin{aligned} F^* + \bar{N}^* + \bar{F}^{in*} &= 0, \\ \bar{M}_o^F + \bar{M}_o^N + \bar{M}_o^{F^{in}} &= 0. \end{aligned}$$

Burada $\bar{F}^*, \bar{N}^*, \bar{F}^{in*}$ – uyğun olaraq verilmiş qüvvələrin, rabitə reaksiyalarının və sistemin maddi nöqtələrinin inersiya qüvvələrinin baş vektorları; $\bar{M}_o^F, \bar{M}_o^N, \bar{M}_o^{F^{in}}$ – həmin qüvvələrin ixtiyari olaraq götürülmüş tərpənməz O mərkəzinə nəzərən baş momentləridir.

Sistem üçün Dalamber prinsipi aşağıdakı kimi əsaslandırılır.

Sistemin ixtiyari i maddi nöqtəsi üçün Dalamber prinsipini yazaq:

$$\bar{F}_i + \bar{N}_i + \bar{F}_i^{in} = 0, \quad (1)$$

burada $\bar{F}_i, \bar{N}_i$ və $\bar{F}_i^{in}$ – sistemin həmin i maddi nöqtəsinə təsir edən verilmiş qüvvə, rabitə reaksiyası və bu maddi nöqtənin inersiya qüvvələridir.

(1) ifadəsini sistemin maddi nöqtələrinin hamısı üçün tərtib edib cəmləsək alarıq:

$$\sum \bar{F}_i + \sum \bar{N}_i + \sum \bar{F}_i^{in} = 0, \quad (2)$$

burada

$$\sum \bar{F}_i = \bar{F}^*, \quad \sum \bar{N}_i = \bar{N}^*, \quad \sum \bar{F}_i^{in} = \bar{F}^{in*}, \quad (3)$$

Onda

$$\bar{F}^* + \bar{N}^* + \bar{F}^{in*} = 0 \quad (4)$$

bərabərliyini, yəni sistem üçün Dalamber prinsipinin birinci riyazi ifadəsini əldə edirik.

Sistemin i maddi nöqtəsinin ixtiyari tərpənməz O mərkəzinə nəzərən radius-vektorunu $\vec{r}_i$ ilə işarə edək. (1) bərabərliyini vektorial olaraq $\vec{r}_i$ -yə vuraq:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \vec{N}_i + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{in} = 0. \quad (5)$$

Statika qaydalarına görə

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{m}_0(\vec{F}_i), \quad \vec{r}_i \times \vec{N}_i = m_0(\vec{N}_i), \quad \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{in} = \vec{m}_0(\vec{F}_i^{in}) \} \quad (6)$$

Bu ifadələri (5)-də yerinə yazaq:

$$\vec{m}_0(\vec{F}_i) + m_0(\vec{N}_i) + \vec{m}_0(\vec{F}_i^{in}) = 0. \quad (7)$$

Alınmış bərabərliyi sistemin maddi nöqtələrinin hamısı üçün tərtib edib cəmləsək

$$\sum \vec{m}_0(\vec{F}_i) + \sum m_0(\vec{N}_i) + \sum \vec{m}_0(\vec{F}_i^{in}) = 0 \quad (8)$$

olar. Burada

$$\sum \vec{m}_0(\vec{F}_i) = \vec{M}_o^F, \quad \sum m_0(\vec{N}_i) = \vec{M}_o^N, \quad \sum \vec{m}_0(\vec{F}_i^{in}) = \vec{M}_o^{F^{in}} \} \quad (9)$$

(9)-u (8) –də yerinə yazsaq sistem üçün Dəlamber prinsipinin ikinci riyazi ifadəsini əldə edirik:

$$\vec{M}_o^F + \vec{M}_o^N + \vec{M}_o^{F^{in}} = 0. \quad (10)$$

3.23. Bərk cismin inersiya momentləri

İnersiya momenti bərk cismin fırlanma hərəkətində onun ətalət ölçüsüdür.

1. Bərk cismin oxla nəzərən inersiya momenti. Bərk cismin oxla nəzərən inersiya momenti skalyar kəmiyyət olub bu cismin hissəciklərinin kütlələrinin onların oxdan olan məsafələrinin kvadratına hasillərinin cəminə bərabərdir.

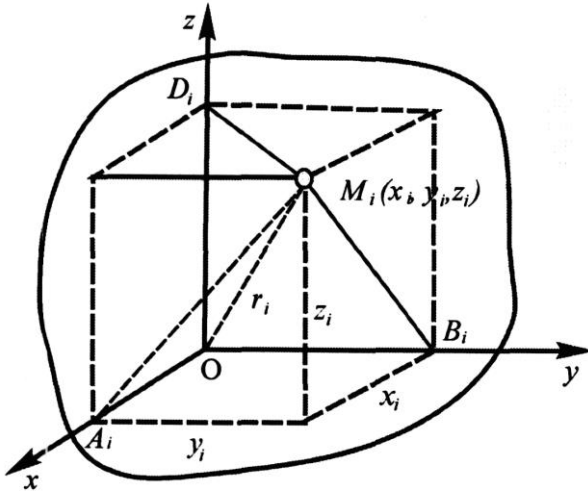
Verilmiş bərk cismin koordinat oxlarına nəzərən inersiya momentlərini təyin edək. Bu məqsədlə cisimdən m_i kütləli ixtiyari M_i hissəciyi ayıraq (şək.3.15).

Tərifə görə

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \sum m_i (M_i A_i)^2, \\ J_y &= \sum m_i (M_i B_i)^2, \\ J_z &= \sum m_i (M_i D_i)^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Burada J_x, J_y, J_z – baxılan cismin x, y və z oxlarına nəzərən inersiya momentləridir.

M_i hissəciyinin koordinatlarını x_i, y_i və z_i ilə işarə edərək şək. 3.15-ə əsasən yazıb bilirik:



Şək. 3.15

$$\left. \begin{aligned} (M_i A_i)^2 &= y_i^2 + z_i^2, \\ (M_i B_i)^2 &= x_i^2 + z_i^2 \\ (M_i D_i)^2 &= x_i^2 + y_i^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Bu ifadələri (1)-də yerinə yazsaq alarıq:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2), \\ J_y &= \sum m_i (x_i^2 + z_i^2), \\ J_z &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Bərk cismin oxa, məsələn, z oxuna nəzərən inersiya momentini bəzən bu cür ifadə edirlər:

$$J_z = M i_z^2, \quad (4)$$

burada M cismin kütləsidir, i_z isə cismin z oxuna nəzərən inersiya radiusu adlanır.

2. Bərk cismin qütbə (nöqtəyə) nəzərən inersiya momenti. Bərk cismin qütbə nəzər inersiya momenti skalyar kəmiyyət olub bu cismin hissəciklərinin kütlələrinin onların qütbdən olan məsafələrinin kvadratına hasillərinin cəminə bərabərdir.

Cismin O koordinat başlanğıcına nəzərən inersiya momentini təyin edək. Tərifə əsasən

$$J_o = \sum m_i (M_i O)^2 = \sum m_i r_i^2. \quad (5)$$

Şək.3.15-dən

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2. \quad (6)$$

Onda

$$J_o = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2). \quad (7)$$

(3) bərabərliklərini tərəf-tərəfə toplasaq alarıq:

$$J_x + J_y + J_z = 2 \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2). \quad (8)$$

(7)-ni burada nəzərə alsaq $J_x + J_y + J_z = 2J_o$ olar. Axırını ifadədən tapa bilərik:

$$J_o = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z). \quad (9)$$

3.24. Bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkətinin diferensial tənliyi

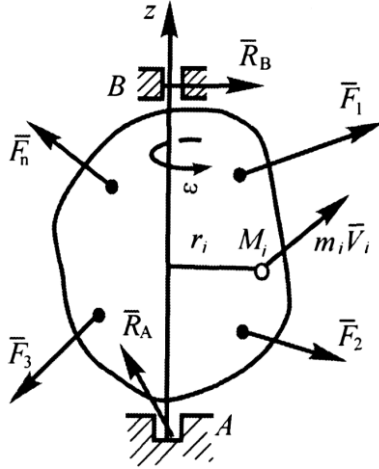
Tutaq ki, baxılan bərk cisim verilmiş xarici $\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ qüvvələrinin təsiri altında tərpənməz z oxu ətrafında ω bucaq sürəti ilə fırlanır (şəkl.3.16).

Sistemin kinetik momenti haqqında teoremə görə

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e, \quad (1)$$

burada M_z^e – verilmiş $\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ qüvvələrinin z oxuna nəzərən baş momentidir, yəni bu qüvvələrin z oxuna nəzərən momentlərinin cəminə bərabərdir. Deməli

$$M_z^e = \sum m_i (\bar{F}_i^e). \quad (2)$$



Şək. 3.16

Dayaq reaksiyalarının z oxuna nəzərən momentləri sıfıra bərabər hesab olunur (sürtünmə qüvvələri nəzərə alınmırsa reaksiya qüvvələrinin təsir xətləri z oxu ilə kəşifir). L_z – cismin z oxuna nəzərən kinetik momentidir. L_z –i təyin etmək üçün cisimdən elementar M_i hissəciyi ayıraq. Bu hissəciyin z oxundan olan məsafəsini r_i , kütləsini m_i , sürətini isə $\bar{V}_i$ ilə işarə edək. Onda yazı bilərik:

$$L_z = \pm \sum m_i V_i r_i \quad (3)$$

$V_i = \omega r_i$ olduğu üçün $L_z = \pm \omega \sum m_i r_i^2$ alınır. Məlumdur ki, $\sum m_i r_i^2$ cismin z oxuna nəzərən inersiya momentinə bərabərdir, yəni $\sum m_i r_i^2 = J_z$. Digər tərəfdən $\pm \omega = \omega_z$. Onda

$$L_z = J_z \omega_z. \quad (4)$$

L_z – in bu ifadəsini (1)-də yerinə yazaq:

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z^e. \quad (5)$$

Kinematikadan məlumdur ki, $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$. Bunu (5)-də nəzərə alsaq

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e \quad (6)$$

olar. Alınmış ifadə bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkətinin diferensial tənliyi adlanır.

3.25. Bərk cismin kinetik enerjisi

İstənilən maddi sistemin, o cümlədən bərk cismin kinetik enerjisi

$$T = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}, \quad (1)$$

burada m_i və V_i – sistemin (bərk cismin) ixtiyari i hissəciyinin uyğun olaraq kütləsi və sürətinin moduludur.

1. Bərk cismin irəliləmə hərəkəti. Məlumdur ki, irəliləmə hərəkəti edən cismin bütün nöqtələri baxılan anda eyni sürətə malik olur. Yəni $V_i = V$. Bunu (1) ifadəsində yerinə yazaq:

$$T = \sum \frac{m_i V^2}{2} = \frac{V^2}{2} \sum m_i. \quad (2)$$

$\sum m_i = M$ olduğunu (M – cismin kütləsi) nəzərə alaraq irəliləmə hərəkəti edən cismin kinetik enerjisini belə ifadə edə bilərik:

$$T = \frac{MV^2}{2}. \quad (3)$$

2. Bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkəti. Bu halda cismin ixtiyari olaraq götürülmüş i hissəciyinin sürəti

$$V_i = \omega r_i, \quad (4)$$

burada ω – fırlanan cismin bucaq sürəti; r_i – cismin baxılan i hissəciyinin fırlanma radiusudur. Bu ifadəni (1)-də yerinə yazsaq alarıq:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2. \quad (5)$$

Məlumdur ki, $\sum m_i r_i^2 = J_z$ (J_z – cismin z fırlanma oxuna nəzərən inersiya momenti). Onda

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}. \quad (6)$$

3. Bərk cismin müstəvi-paralel hərəkəti. Kinematikanın müddəalarına görə bu hərəkətə cismin C kütlələr mərkəzinin hərəkəti ilə bu mərkəz ətrafında baş verən fırlanma hərəkətinin cəmi kimi baxmaq olar. Onda Keniq teoreminə görə

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{J_{cz} \omega^2}{2}. \quad (7)$$

Burada J_{cz} – cismin C kütlələr mərkəzindən keçərək yastı fiqurun hərəkət müstəvisinə perpendikulyar yönələn z oxuna nəzərən inersiya momentidir.

4. Bərk cismin tərpənməz nöqtə ətrafında fırlanma hərəkəti (sferik hərəkət). Kinematikadan məlumdur ki, cismin sferik hərəkətinə zamanın hər bir anında tərpənməz nöqtədən keçən ani ox ətrafında fırlanma hərəkəti kimi baxmaq olar. Onda (6) ifadəsinə uyğun olaraq yazı bilərik:

$$T = \frac{J_{\omega} \omega^2}{2} . \quad (8)$$

Burada J_{ω} – cismin ani fırlanma oxuna nəzərən inersiya momentidir. Ümumi halda J_{ω} dəyişən kəmiyyətdir, çünki zaman keçdikcə ani fırlanma oxu cismə nəzərən öz yerini dəyişir.

5. Bərk cismin ixtiyari hərəkəti. Bu hərəkətə kütlələr mərkəzinin hərəkəti kimi irəliləmə hərəkəti ilə bu mərkəz ətrafında baş verən sferik hərəkətin cəmi kimi baxmaq olar. Onda Keniq teoreminə görə

$$T = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{J_{c\omega} \omega^2}{2} , \quad (9)$$

burada $J_{c\omega}$ – cismin kütlələr mərkəzindən keçən ani fırlanma oxuna nəzərən inersiya momentidir.

3.26. Maddi nöqtənin və sistemin mümkün yerdəyişmələri. İdeal rabitələr

Maddi nöqtənin mümkün yerdəyişməsi onun rabitələrinin imkan verdiyi istənilən sonsuz kiçik yerdəyişməsinə deyilir, bu

şərtlə ki, həmin andan etibarən sistemin rabitələri stasionar hesab olunsun.

Maddi nöqtənin mümkün yerdəyişməsini $\delta \vec{r}$ ilə işarə edəcəyik.

Maddi nöqtənin mümkün yerdəyişməsini onun həqiqi yerdəyişməsindən fərqləndirmək lazımdır. Məsələn, tərpənməz müstəvi üzərinə qoyulmuş maddi nöqtənin bu müstəvi üzərində təsəvvür olunan istənilən sonsuz kiçik yerdəyişməsi mümkün yerdəyişmədir. Həqiqi yerdəyişmə isə nöqtənin mümkün yerdəyişmələrindən biridir və ona təsin edən qüvvələrdən, həmçinin başlanğıc şərtlərdən asılı olaraq baş verir.

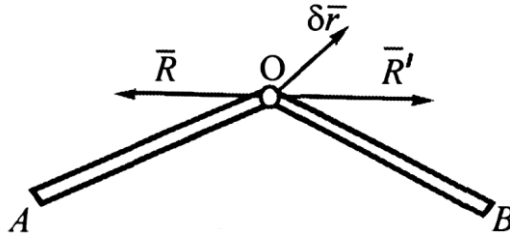
Sistemin mümkün yerdəyişməsi onun maddi nöqtələrinin baxılan anda malik olduqları mümkün yerdəyişmələrinin cəminə deyilir. Sistemin bir-birindən asılı olmayan mümkün yerdəyişmələrinin sayı bu sistemin sərbəstlik dərəcəsi adlanır.

İdeal rabitələr elə rabitələrə deyilir ki, sistemin istənilən mümkün yerdəyişməsində onların reaksiya qüvvələrinin işlərinin cəmi sıfıra bərabər olsun. Bu şərti adətən belə yazırlar: $\sum \delta A_N = 0$. İdeal rabitələrə misal olaraq sürtünməsiz oynaqları, üzərinə maddi nöqtə, yaxud cisim qoyulmuş tərpənməz hamar səthi, uzanmaz çəkisiz sapları, mütləq bərk cismin nöqtələri arasında olan rabitəni və s. göstərmək olar.

Misal olaraq iki çubuğu birləşdirən sürtünməsiz oynaqı nəzərdən keçirək (şək.3.17). Oynağın OA və OB çubuqlarına təsir edən reaksiya qüvvələrini uyğun olaraq $\vec{R}$ və $\vec{R}'$ ilə işarə edək.

Təsirin əks təsirə bərabər olması aksiomuna görə $\vec{R} = -\vec{R}'$. Buradan $\vec{R} + \vec{R}' = 0$. İndi O oynaqına hər hansı $\delta \vec{r}$ mümkün yerdəyişməsi verək. Bu yerdəyişmədə $\vec{R}$ qüvvəsinin elementar işi $\vec{R} \cdot \delta \vec{r} - \alpha$, $\vec{R}'$ qüvvəsinin işi isə $\vec{R}' \cdot \delta \vec{r} - \alpha$ bərabər olacaqdır. Bu işlərin cəmi

$$\vec{R} \cdot \delta \vec{r} + \vec{R}' \cdot \delta \vec{r} = (\vec{R} + \vec{R}') \cdot \delta \vec{r} = 0.$$



Şək. 3.17

Beləliklə rabitə (baxılan halda oynaq) ideal (sürtünməsiz) olduğuna görə onun reaksiya qüvvələrinin işlərinin cəmi sıfıra bərabər oldu.

3.27. Mümkün yerdəyişmələr prinsipi

Prinsip. İdeal rabitəli sistemin baxılan vəziyyətdə müvazinətdə olması üçün ona tətbiq olunmuş verilmiş qüvvələrin sistemin bu vəziyyətindən istənilən mümkün yerdəyişməsində gördüyü işlərin cəminin sıfıra bərabər olması zəruri və kafidir.

Prinsipin riyazi ifadəsi: $\sum \delta A_F = 0$.

Zərurilik şərtinin isbatı. Fərz edək ki, baxılan ideal rabitəli sistem verilmiş vəziyyətdə müvazinətdədir. Bu halda $\sum \delta A_F = 0$ şərtinin ödənildiyini isbat edək. Sistem müvazinətdə olduğu üçün onun ixtiyari M maddi nöqtəsi də müvazinətdə olacaqdır. Onda bu maddi nöqtəyə təsir edən verilmiş (aktiv) $\bar{F}$ qüvvəsi və $\bar{N}$ rabitə reaksiyası müvazinətləşmiş qüvvələr sistemi təşkil edəcəklər, yəni $\bar{F} = -\bar{N}$. Buradan

$$\bar{F} + \bar{N} = 0. \quad (1)$$

Sistemə hər hansı bir mümkün yerdəyişmə verək. Onda onun M maddi nöqtəsi müəyyən bir $\delta \vec{r}$ mümkün yerdəyişməsi alacaqdır (şək.3.18a). $\vec{F}$ və $\vec{N}$ qüvvələrinin bu yerdəyişmədəki elementar işləri uyğun olaraq $\delta A_F = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$ və $\delta A_N = \vec{N} \cdot \delta \vec{r}$ olar. Bu işlərin cəmi

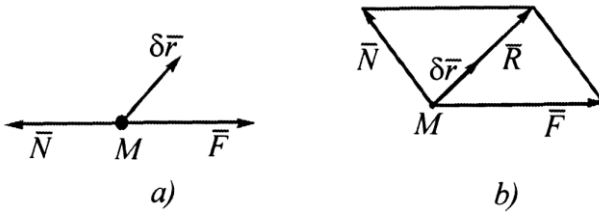
$$\delta A_F + \delta A_N = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} + \vec{N} \cdot \delta \vec{r} = (\vec{F} + \vec{N}) \cdot \delta \vec{r}. \quad (2)$$

(1) ifadəsini burada nəzərə alsaq

$$\delta A_F + \delta A_N = 0 \quad (3)$$

olar. Bu bərabərliyi sistemin maddi nöqtələrinin hamısı üçün yazmaq mümkündür. Həmin ifadələri tərəf-tərəfə toplasaq alarıq:

$$\sum \delta A_F + \sum \delta A_N = 0. \quad (4)$$



Şək. 3.18

Məlumdur ki, ideal rabitələrin reaksiya qüvvələrinin işlərinin cəmi sıfıra bərabərdir, yəni $\sum \delta A_N = 0$. Onda (4) ifadəsindən zərurilik şərtinin isbatını əldə edərik: $\sum \delta A_F = 0$.

Kafilik şərtinin isbatı. Fərz edək ki, $\sum \delta A_F = 0$ şərti ödənilir. İsbat edək ki, bu halda sükunətdə olan ideal rabitəli sistem hərəkətə gələ bilməz. Dediymizi sübut etmək üçün əks fərziyyədən istifadə edək. Tutaq ki, həmin halda sistem, o cümlədən onun ixtiyari M maddi nöqtəsi sükunətdən hərəkətə keçir. Bu maddi nöqtəyə təsir edən $\vec{F}$ və $\vec{N}$ qüvvələrinin əvəzləyicisini $\vec{R}$ ilə işarə edək (şək. 3.18b). Belə ki, $\vec{F} + \vec{N} = \vec{R}$. M maddi nöqtəsinin $\delta \vec{r}$ yerdəyişməsi $\vec{R}$ əvəzləyicisi istiqamətində olacaqdır. Onda

$$\delta A_F + \delta A_N = \delta A_R = \vec{R} \cdot \delta \vec{r} > 0. \quad (5)$$

Bütün sistem üçün yazı bilərik:

$$\sum \delta A_F + \sum \delta A_N > 0. \quad (6)$$

Sistemin rabitələri ideal olduğu üçün $\sum \delta A_N = 0$. Onda (6)-ya görə

$$\sum \delta A_F > 0$$

olar. Bu da yuxarıda göstərilən $\sum \delta A_F = 0$ şərtinə ziddir. Deməli, əks halda fərziyyə doğru deyil, və sistem baxılan halda sükunət vəziyyətindən hərəkətə keçə bilməz. Bununla da kafilik şərti isbat olunur.

$\sum \delta A_F = 0$ şərtini (sadəlik üçün indeksləri ataraq) $\sum \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = 0$ şəklində, yaxud aşağıdakı formada da yazmaq olar:

$$\sum (F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z) = 0, \quad (7)$$

burada F_x, F_y, F_z – sistemə təsir edən verilmiş (aktiv) qüvvələrin uyğun proyeksiyaları; $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ – sistemin maddi nöqtələrinin $\delta\vec{r}$ yerdəyişmələrinin proyeksiyalarıdır. Bəzən $\delta x, \delta y$ və δz – sistemin nöqtələrinin koordinatlarının variasiyaları da deyirlər.

(7) bərabərliyini statikanın ümumi tənliyi adlandırırlar.

3.28. Dinamikanın ümumi tənliyi

Sistem üçün Dalamber prinsipinə görə zamanın hər bir anında sistemə təsir edən verilmiş (aktiv) qüvvələr, rabitə reaksiyaları və bu sistemin maddi nöqtələrinin inersiya qüvvələri müvazinətləşmiş sistem təşkil edir. Onda mümkün yerdəyişmələr prinsipinə görə ideal rabitəli sistemin istənilən mümkün yerdəyişməsində bu qüvvələrin gördüyü işlərin cəmi sıfıra bərabər olmalıdır. Həmin yerdəyişmədə ideal rabitələrin reaksiya qüvvələrinin işlərinin cəminin sıfıra bərabər olduğunu nəzərə alaraq və yazılışın sadələyi üçün indeksləri ataraq deyilən nəticəni belə ifadə etmək olar:

$$\sum \bar{F} \cdot \delta \vec{r} + \sum \bar{F}^{in} \cdot \delta \vec{r} = 0 \quad (1)$$

burada $\bar{F}$ – sistemin ixtiyari maddi nöqtəsinə təsir edən verilmiş qüvvə; $\bar{F}^{in}$ və $\delta \vec{r}$ – həmin maddi nöqtənin inersiya qüvvəsi və mümkün yerdəyişməsidir. Bu bərabərlik analitik şəkildə belə yazılar:

$$\sum (F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z) + \sum (F_x^{in} \delta x + F_y^{in} \delta y + F_z^{in} \delta z) = 0, \quad (2)$$

yaxud

$$\sum [(F_x + F_x^{in}) \delta x + (F_y + F_y^{in}) \delta y + (F_z + F_z^{in}) \delta z] = 0, \quad (3)$$

burada $F_x, F_y, F_z, F_x^{in}, F_y^{in}, F_z^{in}$ – uyğun olaraq $\bar{F}$ və $\bar{F}^{in}$ qüvvələrinin proyeksiyaları; $\delta x, \delta y, \delta z$ – sistemin ixtiyari maddi nöqtəsinin $\delta \bar{r}$ mümkün yerdəyişməsinin proyeksiyalarıdır.

Məlumdur ki,

$$\left. \begin{aligned} F_x^{in} &= -m \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ F_y^{in} &= -m \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ F_z^{in} &= -m \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Burada x, y, z – sistemin həmin maddi nöqtəsinin koordinatlarıdır. (4) ifadələrini (3)-də yerinə yazsaq alarıq:

$$\sum \left[\left(F_x - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(F_y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(F_z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0. \quad (5)$$

Bu bərabərlik dinamikanın ümumi tənliyi adlanır.

3.29. Sistemin ümumiləşmiş koordinatları

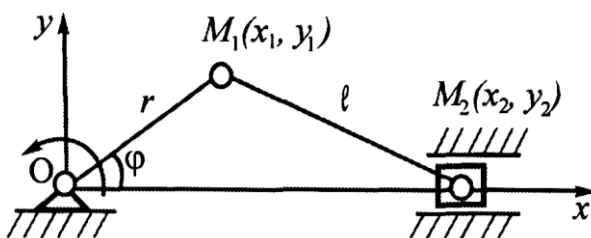
Maddi sistemin ümumiləşmiş koordinatları bir-birindən asılı olmayan, yəni sərbəst dəyişən elə parametrlərə deyilir ki, onlar bu sistemin fəzadakı vəziyyətini birmənalı şəkildə müəyyən edir. Ümumiləşmiş koordinatları bəzən Laqranc koordinatları da adlandırırlar.

Sistemin ümumiləşmiş koordinatlarının sayı onun sərbəstlik dərəcəsinin sayına bərabərdir.

Misal olaraq çarxqolu-sürüngəc mexanizmini nəzərdən keçirək (şək. 3.19). Bu mexanizmin vəziyyəti onun OM_1

çarxqolusunun φ dönmə bucağı ilə tamamilə təyin olunur. $OM = r$, $M_1M_2 = l$ olduğunu bilərək mexanizmin M_1 və M_2 nöqtələrinin koordinatlarını belə ifadə etmək olar:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi, & y_1 &= r \sin \varphi, \\ x_2 &= r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}, & y_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Şək. 3.19

Deyilənlər göstərir ki, bu mexanizmin ancaq bir sərbəstlik dərəcəsi vardır. Baxılan halda ümumiləşmiş koordinat rolunu φ bucağı oynayır.

İndi ümumi halı nəzərdən keçirək. Tutaq ki, k sərbəstlik dərəcəsi olan sistem n maddi nöqtədən ibarətdir. Sistemin ümumiləşmiş koordinatlarını $q_1, q_2, \dots, q_k$ ilə işarə edərək onun ixtiyari i maddi nöqtəsinin dekart koordinatlarını bu cür ifadə edə bilərik:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_k), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_k), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_k). \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

(2) ifadələrinin ümumi sayı $3n - \alpha$ bərabərdir. Bu tənliklər sistemini $q_1, q_2, \dots, q_k$ – ya görə həll edərək onları aradan çıxarsaq x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) koordinatları arasında $3n - k$ sayda asılılıq alarıq. Bu asılılıqlar sistemin rabitə tənlikləri olacaqdır.

Sistemin hərəkəti vaxtı onun ümumiləşmiş koordinatları zamandan asılı olaraq dəyişirlər, yəni

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad \dots, \quad q_k = q_k(t). \quad (3)$$

Bu ifadələrə sistemin hərəkətinin ümumiləşmiş koordinatlarda kinematik tənlikləri deyilir.

Ümumiləşmiş koordinatlardan zamana görə alınmış birinci törəmə sistemin ümumiləşmiş sürətləri, ikinci törəmə isə ümumiləşmiş təcilləri adlanır.

3.30. Sistemin ümumiləşmiş koordinatlarda müvazinət şərtləri

Fərz edək ki, k sərbəstlik dərəcəsi olan ideal stasionar rabitəli maddi sistem verilmiş qüvvələr sisteminin təsiri altında müvazinətdədir. Onda mümkün yerdəyişmələr prinsipinə uyğun olaraq yazı bilərik:

$$\sum \delta A_F = 0, \quad (1)$$

yaxud

$$\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0, \quad (2)$$

burada $\delta \bar{r}_i$ – sistemin ixtiyari i maddi nöqtəsinin bu sistemin mümkün yerdəyişməsində aldığı yerdəyişmədir, $\bar{r}_i$ isə həmin maddi nöqtənin radius-vektorudur. Bu radius-vektor sistemin ümumiləşmiş koordinatları $q_1, q_2, \dots, q_k$ – dan asılıdır, yəni

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k). \quad (3)$$

Onda radius-vektorun $\delta \bar{r}_i$ artımı (variasiyası) (3) şəklində verilən $\bar{r}_i$ funksiyasının tam diferensialı tapılan kimi tapıla bilər:

$$\delta \bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (4)$$

Burada $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$ – ümumiləşmiş koordinatların variasiyalarıdır.

(4)-ü (2)-də yerinə yazsaq alırıq:

$$\sum \left(\bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \sum \left(\bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \right) \delta q_2 + \dots + \sum \left(\bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0, \quad (5)$$

yaxud

$$\delta q_1 \sum \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} + \delta q_2 \sum \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} + \dots + \delta q_k \sum \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = 0. \quad (6)$$

İşarə edək:

$$\left. \sum \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} = Q_1, \quad \sum \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} = Q_2, \dots, \sum \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = Q_k \right\} \quad (7)$$

$Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ sistemin ümumiləşmiş qüvvələri adlanır.

(7) ifadələrini (6) bərabərliyində nəzərə alsaq əldə edirik:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k = 0. \quad (8)$$

(8) şərti ideal rabitəli sistemin istənilən mümkün yerdəyişməsində ödənməlidir. Bu isə o deməkdir ki, (8) bərabərliyi ümumiləşmiş koordinatların bir-birindən asılı olmayan $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$ variasiyalarının bütün qiymətlərində doğrudur. Bunun üçün isə $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ əmsalları sıfıra bərabər olmalıdır. Beləliklə,

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_k = 0. \quad \} \quad (9)$$

Alınmış ifadələr sistemin ümumiləşmiş koordinatlarda müvazinət şərtləri adlanır. Buradan görünür ki, ideal rabitəli sistemin verilmiş vəziyyətdə müvazinətdə olması üçün onun bu vəziyyətinə görə hesablanmış ümumiləşmiş qüvvələrin sıfıra bərabər olması zəruri və kafidir.

(9) ifadələrindən göründüyü kimi, müvazinət tənliklərinin sayı sistemin sərbəstlik dərəcəsinin sayına bərabərdir.

Ümumiləşmiş qüvvələri aşağıdakı metodika ilə hesablamaq məqsəduyğundur. Sistemə elə mümkün yerdəyişmə veririk ki, onun bir ümumiləşmiş koordinatı, məsələn, q_1 dəyişsin. Onda

$$\delta q_1 \neq 0, \quad \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_k = 0. \quad \} \quad (10)$$

Bu yerdəyişmədə elementar işlərin cəmi

$$\sum \delta A'_F = Q_1 \cdot \delta q_1. \quad (11)$$

Buradan

$$Q_1 = \frac{\sum \delta A'_F}{\delta q_1}. \quad (12)$$

Digər ümumiləşmiş qüvvələr də bu qayda ilə tapılır.

Qeyd edək ki, ümumiləşmiş qüvvənin ölçü vahidi adi qüvvənin ölçü vahidi ilə üst-üstə düşməyə bilər.

ƏDƏBİYYAT

1. Məmmədov H.Q. Nəzəri mexanika. Bakı, «Maarif». I h. 1965. 375 s.; II h. 1966. 288 s.
2. Qədirov N.B. Nəzəri mexanika kursu. Bakı, BDU nəşriyyatı. 1997, 550s.
3. Bağırzadə R.L., Fərəcov R.M. Nəzəri mexanika məsələlərinin həlli metodları. Bakı, «Maarif», 1998. 303 s.
4. Baxşəliyev V.İ. Nəzəri mexanikadan məsələ həlli. Statika. Kinematika. Bakı, «Nurlan», 2009. 222s.
5. Əliyev K.Ə. Nəzəri mexanikadan mühazirələr. I hissə. Bakı, 2010. 122s.
6. Kərimov Z.H., Qurbanov R.S., Kərimov M.Z. Nəzəri mexanika. Bakı, ADNA nəşriyyatı, 1995. 280s.
7. Quliyev S.Ə., Eyvazov E.B. Nəzəri mexanika (qısa kurs). Bakı, Azərnəşr, 2003. 391s.
8. Nəsimov N.A. Nəzəri mexanikanın sürtünmə məsələləri. Bakı, «Elm». Statika, 2001. 195s.; Dinamika, 2003. 207s.
9. Tarq S.M. Nəzəri mexanikanın qısa kursu. Bakı, «Maarif», 1983. 512s.
10. Butenin N.V, Lunü Ə.L., Merkin D.R. Kurs teoreticheskoy mexaniki. M., «Nauka». T.1. 1985. 239s.; T.2. 1985. 496s.
11. Voronkov İ.M. Kurs teoreticheskoy mexaniki. M., «Nauka». 1966. 596s.
12. Qurbanov R.S., İbrahimoğlu İ.X., Suleymanov T.S. Posobie k resheniyu zadach po teoreticheskoy mexanike. Baku, «Mutardcim», 1999. 701s.
13. Loytenskiy L.Q., Lurçe A.İ. Kurs teoreticheskoy mexaniki. M., «Nauka». T.1 1982. 352s.; T.2. 1983. 640s.
14. Nikitin N.N. Kurs teoreticheskoy mexaniki. M., «Vysşay şkola», 1990. 607s.

15. Starcinskiy V.M. Teoretiçeskə mexanika. M., «Nauka».1980.464s.
16. Əblonskiy A.A., Nikifirova V.M. Kurs teoretiçeskoy mexaniki. M., «Knorus», 2010. 603s.

M Ü N D Ə R İ C A T

	Səh.
Giriş.	
Nəzəri mexanikanın predmeti və əsas anlayışları.....	3
I. STATİKA	5
1.1 Statikaya giriş.....	5
1.2. Statikanın aksiomları.....	6
1.3. Paralel olmayan üç qüvvənin müvazinəti haqqında teorem.....	9
1.4. Rabitələr və onların reaksiya qüvvələri.....	11
1.5. Bir nöqtədə görüşən qüvvələr sistemi.....	15
1.6. Qüvvənin ox və müstəvi üzərində proyeksiyaları.....	18
.....	
1.7. Qüvvənin analitik üsulla verilməsi.....	20
1.8. Bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələrin analitik üsulla toplanması.....	21
1.9. Bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sisteminin analitik müvazinət şərtləri.....	23
1.10. İki paralel qüvvənin toplanması.....	24
1.11. Cüt qüvvə.....	28
1.12. Cütlərin ekvivalentliyi haqqında teorem.....	29
1.13. Cütün öz təsir müstəvisinə paralel müstəvi üzərinə köçürülməsi haqqında teorem.....	32
1.14. Cütün vektor-momentini.....	33
1.15. Cütlərin toplanması.....	35
1.16. Qüvvənin nöqtəyə nəzərən cəbri momenti və vektor-momentini.....	38

1.17.	Qüvvənin oxa nəzərən momenti.....	41
1.18.	Qüvvənin nöqtəyə və bu nöqtədən keçən oxa nəzərən momentləri arasında asılılıq.....	43
1.19.	Qüvvənin verilmiş mərkəzə gətirilməsi (Puanso metodu).....	45
1.20.	İxtiyari fəza qüvvələr sisteminin verilmiş mərkəzə gətirilməsi.....	47
1.21.	İxtiyari fəza qüvvələr sisteminin baş vektorunun və baş momentinin analitik təyini.....	49
1.22.	İxtiyari fəza qüvvələr sisteminin verilmiş mərkəzə gətirilməsinin xüsusi halları.....	51
1.23.	İxtiyari fəza qüvvələr sisteminin analitik müvazinət şərtləri.....	53
1.24.	İxtiyari müstəvi qüvvələr sisteminin analitik müvazinət şərtləri.....	55
1.25.	Sürtünmə.....	57
1.26.	Ağırlıq mərkəzi.....	61
1.27.	Bəzi sadə fiqurların ağırlıq mərkəzinin tapılması.....	62
		
	II. KİNEMATİKA.....	66
2.1.	Kinematikaya giriş.....	66
2.2.	Nöqtənin hərəkətinin verilmə üsulları.....	67
2.3.	Nöqtənin hərəkəti vektor üsulu ilə verildikdə onun sürət və təcili.....	70
2.4.	Nöqtənin hərəkəti koordinat üsulu ilə verildikdə onun sürət və təcili.....	74
2.5.	Təbii koordinat oxları. Əyrilik vektoru.....	77
2.6.	Nöqtənin hərəkəti təbii üsulla verildikdə onun sürəti.....	81
2.7.	Nöqtənin hərəkəti təbii üsulla verildikdə onun	

	təcili.....	83
2.8.	Nöqtənin müntəzəm və müntəzəmdəyişən hərəkətləri.....	86
2.9.	Bərk cismin irəliləmə hərəkəti.....	88
2.10	Bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkəti.....	91
2.11.	Bərk cismin müntəzəm və müntəzəmdəyişən fırlanma hərəkətləri.....	95
2.12.	Tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin nöqtələrinin sürət və təcili.....	97
2.13.	Tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin nöqtələrinin sürət və təcillərinin vektorial ifadələri.	100
2.14.	Bərk cismin müstəvi-paralel hərəkəti.....	105
2.15.	Yastı fiqur nöqtələrinin sürəti.....	108
2.16.	Yastı fiqurun ani sürətlər mərkəzi.....	111
2.17.	Yastı fiqur nöqtələrinin təcili.....	115
2.18.	Yastı fiqurun ani təcillər mərkəzi.....	117
2.19.	Nöqtənin mürəkkəb hərəkəti.....	121
2.20.	Mürəkkəb hərəkət edən nöqtənin mütləq sürəti.....	121
2.21.	Mürəkkəb hərəkət edən nöqtənin mütləq təcili	124
	III. DİNAMİKA.....	129
3.1.	Dinamikaya giriş.....	129
3.2.	Dinamikanın əsas qanunları.....	130
3.3.	Maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənlikləri.....	132
3.4.	Maddi nöqtə dinamikasının iki əsas məsələsi...	135
3.5.	Maddi nöqtənin sərbəst rəqs hərəkəti.....	138

3.6.	Maddi nöqtənin sönən rəqs hərəkəti.....	143
3.7.	Maddi nöqtənin hərəkət miqdarının dəyişməsi haqqında teorem.....	148
3.8.	Maddi nöqtənin hərəkət miqdarı momentinin dəyişməsi haqqında teorem.....	151
3.9.	Qüvvənin işi.....	154
3.10.	Ağırlıq və elastiklik qüvvələrinin işi.....	157
3.11.	Maddi nöqtənin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teorem.....	161
3.12.	Qeyri-sərbəst maddi nöqtənin hərəkətinin diferensial tənlikləri.....	163
3.13.	Maddi nöqtə üçün Dəlamber prinsipi.....	167
3.14.	Maddi nöqtənin nisbi hərəkətinin diferensial tənlikləri.....	169
3.15.	Maddi sistem və ona təsir edən qüvvələr.....	173
3.16.	Sistemin kütlələr mərkəzinin hərəkəti haqqında teorem.....	175
3.17.	Sistemin hərəkət miqdarı haqqında teorem.....	178
3.18.	İmpulslar teoremi.....	181
3.19.	Sistemin kinetik momenti haqqında teorem....	182
3.20.	Sistemin kinetik enerjisi (Keniq teoremi).....	184
3.21.	Sistemin kinetik enerjisinin dəyişməsi haqqında teorem.....	186
3.22.	Sistem üçün Dəlamber prinsipi.....	188
3.23.	Bərk cismin inersiya momentləri.....	190
3.24.	Bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkətinin diferensial tənliyi.....	193
3.25.	Bərk cismin kinetik enerjisi.....	195
3.26.	Maddi nöqtənin və sistemin mümkün yerdə- yişmələri. İdeal rabitələr.....	197
3.27.	Mümkün yerdəyişmələr prinsipi.....	199
3.28.	Dinamikanın ümumi tənliyi.....	201

3.29. Sistemin ümumiləşmiş koordinatları.....	203
3.30. Sistemin ümumiləşmiş koordinatlarda müvazinət şərtləri.....	205
Ədəbiyyat	208

NƏSİBOV NƏSİB AYVAZ oğlu
ŞAYEV ZƏKAY ŞABAN oğlu

NƏZƏRİ MEXANİKADAN MÜHAZİRƏLƏR

Ali texniki məktəblərin bakalavr pilləsi üçün

Yığılmağa verilib: 10.01.13. Çapa imzalanıb: 25.01.13.

Format 60x84 $\frac{1}{16}$, F.ç.v.13,4. Sifariş № 106.

Kağız əla növ. Tirac 250 nüsxə. Qiyməti müqavilə ilə.

“Politex” MMC-nin mətbəəsi