

II. KINEMATİKA

2.1. Kinematikaya giriş

Kinematika nəzəri mexanikanın elə bir bölməsidir ki, burada cisimlərin hərəkəti həndəsi nöqtəyi-nəzərdən, yəni onların kütlələri və təsir edən qüvvələr nəzərə alınmadan öyrənilir.

Kinematikada hərəkət edən cismə müəyyən həndəsi obraz kimi baxılır. Ona görə də kinematika bütövlükdə həndəsə müddəalarına əsaslanır və həndəsədən ancaq zaman anlayışından istifadə etməklə fərqlənir.

Kinematika dinamikanı öyrənmək üçün əsas təşkil edir. Bununla yanaşı, kinematikanın özünün də ayrıca tətbiqi əhəmiyyəti vardır. Məsələn, bir çox mexanizmlərin layihələndirilməsində kinematika qaydalarından geniş istifadə olunur.

Cismin hərəkətinin kinematik olaraq verilməsi dedikdə zamanın istənilən anında bu cismin vəziyyətinin baxılan hesabatparma sisteminə nəzərən məlum olması nəzərdə tutulur. Bu isə cismin hərəkətinin kinematik qanununun verilməsi deməkdir.

Kinematikanın əsas məqsədi cismin hərəkət qanununu bilərək onun özünün və ayrı-ayrı nöqtələrinin hərəkətini xarakterizə edən kinematik kəmiyyətləri təyin etməkdir.

Kinematikada « t anı» və « Δt zaman fasiləsi» anlayışlarından geniş istifadə olunur. « t anı» dedikdə başlanğıc andan baxılan ana qədər keçən vaxtın miqdarı (saniyələrlə, dəqiqələrlə və s.) nəzərdə tutulur. Başlanğıc anda $t = 0$. « Δt zaman fasiləsi» dedikdə isə iki zaman anını (t_1 və t_2) bir-birindən ayıran vaxtın miqdarı nəzərdə tutulur, belə ki, $\Delta t = t_2 - t_1$.

Kinematikanın öyrənilməsini nöqtənin hərəkətinin öyrənilməsindən, yəni nöqtə kinematikasından başlamaq məq-

sədəuyğun olur. Nöqtə kinematikasında «nöqtənin trayektoriyası» anlayışına tez-tez rast gəlinir. Nöqtənin trayektoriyası onun hərəkəti zamanı fəzada (verilmiş koordinat sistemində) tutduğu ardıcıl vəziyyətlərin həndəsi yerinə deyilir. Trayektoriya həm düzxətli, həm də əyrixətli ola bilər.

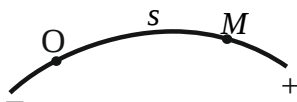
2.2. Nöqtənin hərəkətinin verilmə üsulları

Nöqtənin hərəkəti əsasən üç üsulla verilə bilər: təbii üsul, koordinat üsulu, vektor üsulu.

1) Təbii üsul. Nöqtənin hərəkətinin təbii üsulla verilməsində onun trayektoriyası, hesabaparmanın başlanğıcı və müsbət istiqaməti, həmçinin nöqtənin trayektoriya boyunca hərəkət tənliyi əvvəlcədən məlum olmalıdır (şək. 21). Dedi-yimiz hərəkət tənliyi adətən bu şəkildə verilir:

$$s = f(t), \quad (1)$$

burada s - hərəkət edən nöqtənin qövsü koordinatıdır ($s = \cup OM$). Trayektoriyanın üzərində götürülmüş tərpənməz O nöqtəsi hesabaparmanın başlanğıcı adlanır.



Şək. 2.1

Hesabaparmanın müsbət, yaxud mənfi istiqamətinin seçilməsi şərtidir. $s = f(t)$ funksiyasının qrafikinə nöqtənin hərəkət qrafiki deyirlər.

Qeyd etmək lazımdır ki, nöqtənin qövsü koordinatı və getdiyi yolun uzunluğu ümumi halda eyni şey demək deyildir. Məsələn, əgər hərəkət edən nöqtə O başlanğıcından çıxaraq M vəziyyətinə gəlib, sonra yenə O başlanğıcına qayıdıbsa, onun

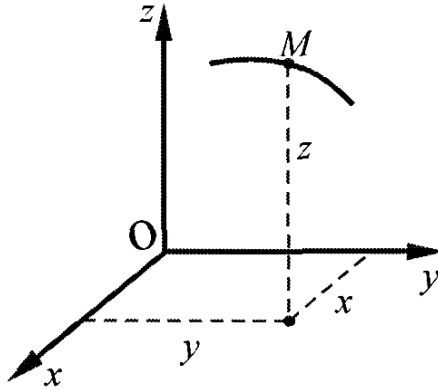
qövsü koordinatı $s = 0$, getdiyi yolun uzunluğu isə OM qövsünün uzunluğunun ikiqat mislinə bərabər olar.

2) Koordinat üsulu. Nöqtənin hərəkəti müxtəlif koordinat sistemlərində verilə bilər. Məsələn olaraq nöqtənin hərəkətinin düzbucaqlı dekart koordinat sistemində, sferik, silindrik, yaxud qütb koordinat sistemində verilməsini göstərmək olar.

Əksər halda nöqtənin hərəkəti düzbucaqlı dekart koordinat sistemində aşağıdakı ifadələrlə verilir:

$$\{x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)\}, \quad (2)$$

burada x, y, z - hərəkət edən nöqtənin koordinatlarıdır (şək.2.2). Əgər nöqtə müstəvi üzərində hərəkət edərsə (2) ifadələrinin ikisindən, düzxətli hərəkətdə isə birindən istifadə etmək kifayətdir.



Şək. 2.2

3) Vektor üsulu. Nöqtənin fəzadakı vəziyyəti tərpənməz qəbul olunmuş O başlanğıcından bu nöqtəyə çəkilmiş bir vektorla da müəyyən edilə bilər. Bu vektora nöqtənin radius - vektoru deyirlər.

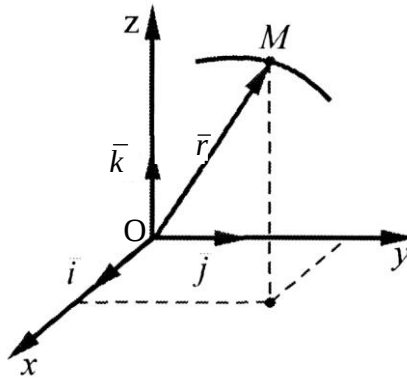
Hərəkət edən nöqtənin radius – vektoru $\bar{r}$ ümumi halda həm qiymət, həm də istiqamətcə zamanın funksiyası olur, yəni

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \quad (3)$$

$\bar{r}(t)$ funksiyası vektor–funksiya adlanır.

Nöqtənin hərəkətinin verilməsinin koordinat və vektor üsulları arasında əlaqə aşağıdakı ifadənin köməyi ilə yaradılır:

$$\bar{r} = \bar{i}r_x + \bar{j}r_y + \bar{k}r_z. \quad (4)$$



Şək. 2.3

burada $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ –statikada olduğu kimi koordinat oxlarının vahid vektorları (ortları) (şək.2.3); r_x, r_y, r_z – $\bar{r}$ radius-vektorunun proyeksiyalarıdır. Baxılan halda

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z \quad \} \quad (5)$$

olduğu üçün (4) ifadəsini bu şəkildə də yazı bilərik:

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z. \quad (6)$$

Bu bərabərlik nöqtənin hərəkətinin verilməsinin koordinat və vektor üsulları arasında əlaqəni ifadə edir.

$\vec{r}$ radius-vektorunun qodoqrafi, yəni onun uc M nöqtəsinin fəzada tutduğu ardıcıl vəziyyətlərin həndəsi yeri hərəkət edən nöqtənin trayektoriyasını müəyyən edir.

2.3. Nöqtənin hərəkəti vektor üsulu ilə verildikdə onun sürət və təcili

Sürət, verilmiş koordinat sistemində baxılan anda nöqtənin hərəkətinin yeyinliyini və istiqamətini göstərən vektorial kəmiyyətə deyilir.

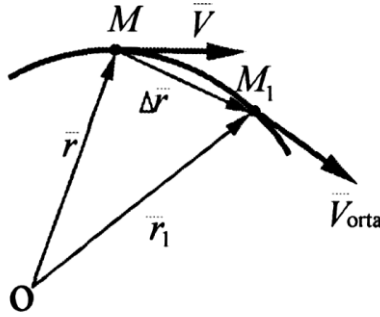
Fərz edək ki, baxılan nöqtə zamanın t anında M vəziyyətini tutaraq $\vec{r}$ radius-vektoruna, $t_1 = t + \Delta t$ anında isə M_1 vəziyyətinə keçərək $\vec{r}_1$ radius-vektoruna malik olur (şek.2.4). Şəklə əsasən yazı bilərik:

$$\overline{OM_1} = \overline{OM} + \overline{MM_1}, \quad (1)$$

yaxud

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}, \quad (2)$$

burada $\Delta\vec{r}$ – nöqtənin radius – vektorunun, yəni $\vec{r}$ – in Δt zaman fasiləsindəki artımıdır.



Şək. 2.4

$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ nisbəti nöqtənin Δt zaman fasiləsindəki orta sürət vektoru adlanır. Deməli

$$\vec{V}_{orta} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (3)$$

Orta sürət vektoru $\vec{V}_{orta}$ -nın istiqaməti $\Delta \vec{r}$ vektorunun istiqaməti ilə üst-üstə düşür.

Δt zaman fasiləsini sonsuz olaraq kiçildərək limitə keçsək nöqtənin zamanın t anına uyğun gələn sürət vektoru $\vec{V}$ -ni alarıq:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{orta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (4)$$

Riyaziyyat kursundan məlumdur ki, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Bunu (4) ifadəsində nəzərə alsaq taparıq:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (5)$$

(5)-dən görünür ki, nöqtənin sürəti onun radius-vektorundan zamana görə alınmış birinci tərtib törəməyə bərabərdir.

Δt zaman fasiləsi sıfıra yaxınlaşdıqda nöqtənin M_1 vəziyyəti onun M vəziyyətinə yaxınlaşır. Onda MM_1 vətəri sonsuz olaraq M nöqtəsində trayektoriyaya çəkilmiş toxunana yaxınlaşır. Buradan belə nəticə çıxır ki, nöqtənin sürət vektoru onun trayektoriyasına çəkilmiş toxunan boyunca hərəkət istiqamətində yönəlir.

Təcil, verilmiş koordinat sistemində baxılan anda nöqtənin sürətinin qiymət və istiqamətcə dəyişməsini göstərən vektorial kəmiyyətə deyilir.

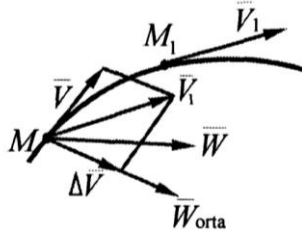
Fərz edək ki, baxılan nöqtə zamanın t anında M vəziyyətini tutaraq $\bar{V}$ sürətinə, $t_1 = t + \Delta t$ anında isə M_1 vəziyyətinə keçərək $\bar{V}_1$ sürətinə malik olur (şək. 2.5). Onda Δt zaman fasiləsi ərzində nöqtənin sürəti

$$\Delta \bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V} \quad (6)$$

artımını alır. $\frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}$ nisbəti nöqtənin Δt zaman fasiləsindəki orta təcil vektoru adlanır, yəni

$$\bar{W}_{orta} = \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}. \quad (7)$$

Orta təcil vektoru $\bar{W}_{orta}$ –nın istiqaməti $\Delta \bar{V}$ vektorunun istiqaməti ilə üst-üstə düşür.



Şək. 2.5

Δt zaman fasiləsini sonsuz olaraq kiçildərək limitə keçsək nöqtənin zamanın t anına uyğun gələn təcil vektoru $\overline{W}$ - ni alırıq:

$$\overline{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{W}_{orta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overline{V}}{\Delta t}. \quad (8)$$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overline{V}}{\Delta t} = \frac{d\overline{V}}{dt}$ olduğunu nəzərə alaraq (8) –dən tapırıq:

$$\overline{W} = \frac{d\overline{V}}{dt}. \quad (9)$$

(5) ifadəsini burada nəzərə aldıqda isə

$$\overline{W} = \frac{d^2 \overline{r}}{dt^2} \quad (10)$$

bərabərliyini əldə edirik.

Beləliklə, nöqtənin təcil vektoru onun sürət vektorundan zamana görə alınmış birinci tərtib törəməyə, yaxud radius-

vektorundan zamana görə alınmış ikinci tərtib törəməyə bərabərdir.

Nöqtənin təcil vektoru onun trayektoriyasının çökük tərəfinə doğru yönəlir.

2.4. Nöqtənin hərəkəti koordinat üsulu ilə verildikdə onun sürət və təcili

Fərz edək ki, nöqtənin hərəkəti tərpənməz qəbul edilmiş $Oxyz$ sisteminə nəzərən aşağıdakı ifadələrlə verilmişdir:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)\}, \quad (1)$$

burada x, y, z – hərəkət edən nöqtənin koordinatlarıdır (şək. 2.6). Həmin nöqtənin radius–vektoru

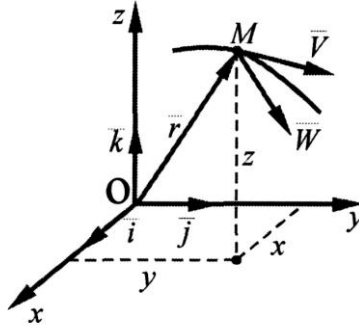
$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \quad (2)$$

Məlumdur ki, nöqtənin sürəti

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (3)$$

Koordinat oxlarının vahid vektorları olan $\vec{i}$, $\vec{j}$ və $\vec{k}$ -nin həm qiymət, həm də istiqamətcə sabit olduğunu bilərək (2)-ni (3)-də nəzərə alsaq taparıq:

$$\vec{V} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}. \quad (4)$$



Şək. 2.6

(4) ifadəsini koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq sürətin proyeksiyalarını alarıq:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt}, & V_y &= \frac{dy}{dt}, & V_z &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Bu bərabərlikləri (4)-də nəzərə alaraq sürəti belə də ifadə etmək olar:

$$\vec{V} = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z. \quad (6)$$

Nöqtənin sürətinin modulu

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (7)$$

Nöqtənin sürətinin istiqaməti isə aşağıdakı ifadələrlə təyin edilir:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{V}, x) &= \frac{V_x}{V}, & \cos(\vec{V}, y) &= \frac{V_y}{V}, & \cos(\vec{V}, z) &= \frac{V_z}{V}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

İndi nöqtənin təcilini təyin edək. Məlumdur ki, nöqtənin təcili

$$\overline{W} = \frac{d\overline{V}}{dt}. \quad (9)$$

(6)-nı burada nəzərə alaq:

$$\overline{W} = \bar{i} \frac{dV_x}{dt} + \bar{j} \frac{dV_y}{dt} + \bar{k} \frac{dV_z}{dt}. \quad (10)$$

Təcilin proyeksiyalarını tapmaq üçün (10)-u koordinat oxları üzərinə proyeksiyalayırıq:

$$W_x = \frac{dV_x}{dt}, \quad W_y = \frac{dV_y}{dt}, \quad W_z = \frac{dV_z}{dt}. \quad \left. \vphantom{\frac{dV_x}{dt}} \right\} \quad (11)$$

(5)-i bu ifadələrdə nəzərə alsaq

$$W_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad W_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad W_z = \frac{d^2 z}{dt^2}. \quad \left. \vphantom{\frac{d^2 x}{dt^2}} \right\} \quad (12)$$

olar.

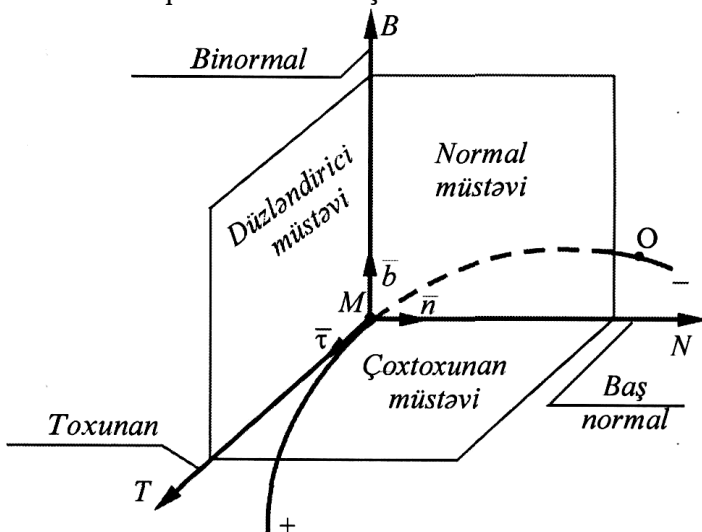
Nöqtənin təcilinin modulu və istiqaməti isə uyğun olaraq aşağıdakı ifadələrlə təyin edilir:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}, \quad (13)$$

$$\cos(\overline{W}, x) = \frac{W_x}{W}, \quad \cos(\overline{W}, y) = \frac{W_y}{W}, \quad \cos(\overline{W}, z) = \frac{W_z}{W}. \quad (14)$$

2.5. Təbii koordinat oxları. Əyrilik vektoru

Əyrinin verilmiş nöqtəsində ona çəkilmiş toxunandan və bu əyrinin həmin nöqtəsinə sonsuz yaxın ikinci bir nöqtəsindən keçən müstəviyə çoxtoxunan müstəvi deyilir. Əyrinin verilmiş nöqtəsində ona çəkilmiş toxunana perpendikulyar keçirilmiş müstəvi normal müstəvi adlanır. Əyrinin verilmiş nöqtəsində ona çəkilmiş çoxtoxunan və normal müstəvilərə perpendikulyar keçirilmiş müstəviyə isə düzləndirici müstəvi deyirlər. Bu müstəvilər şək.2.7-də göstərilmişdir. Deyilən müstəvilərin hər biri əyrinin ancaq baxılan nöqtəsinə aiddir. Əgər əyri bir müstəvi üzərində yerləşərsə onda həmin müstəvi əyrinin bütün nöqtələrində onun çoxtoxunan müstəvisi olar.



Şək. 2.7

Çoxtoxunan, normal və düzləndirici müstəvilərin üçünə birlikdə təbii üçüzlü deyirlər.

Əyrinin verilmiş nöqtəsindən keçərək bu nöqtədə ona
 çəkilmiş normal müstəvi üzərində yerləşən istənilən düz xətt
 əyrinin həmin nöqtəsindəki normalı adlanır. Çoxtoxunan və

normal müstəvilərin kəsişmə xəttinə əyrinin həmin nöqtəsindəki baş normalı deyilir. Düzləndirici və normal müstəvilərin kəsişmə xətti isə binormal adlanır.

Təbii koordinat oxları dedikdə bir-birinə perpendikulyar olaraq yönələn və başlanğıcları hərəkət edən nöqtə ilə üst-üstə düşən aşağıdakı üç ox nəzərdə tutulur: Toxunan (MT), baş normal (MN) və binormal (MB). Toxunan nöqtənin qövsü koordinatının artması istiqamətində, baş normal isə trayektoriyanın çökük tərəfinə doğru yönəlir. Binormal elə yönəlir ki, əvvəlki iki oxla sağ koordinat sistemi təşkil etsin.

$\bar{\tau}$, $\bar{n}$ və $\bar{b}$ təbii koordinat oxlarının vahid vektorlarıdır. Bu vektorlar modulca sabit (vahidə bərabər) olsalar da nöqtənin əyrixətli hərəkətində istiqamətcə dəyişən olurlar. Ancaq nöqtənin trayektoriyası müstəvi əyrisi olan halda $\bar{b}$ -nin istiqaməti dəyişmir.

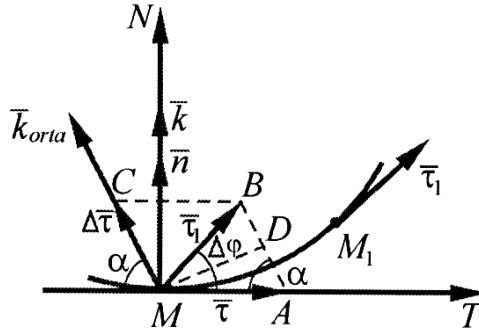
Nöqtənin hərəkətinin təbii üsulla verilməsində onun təcilini təyin edərkən ayrılık radiusu anlayışından istifadə etmək lazım gəlir. Bu anlayışın nə olduğunu müəyyən edək. Tutaq ki, verilmiş əyrinin M nöqtəsinə bu əyriyə həmin nöqtədə toxunan istiqamətdə yönəlmiş $\bar{\tau}$ vahid vektoru, M_1 nöqtəsinə isə $\bar{\tau}_1$ vahid vektoru uyğun gəlir (şək. 2.8).

İşarə edək:

$$\bar{\tau}_1 - \bar{\tau} = \Delta \bar{\tau}, \quad \cup MM_1 = \Delta s.$$

$\frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s}$ nisbəti orta ayrılık vektoru adlanır, yəni

$$\bar{k}_{orta} = \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s}. \quad (1)$$



Şək. 2.8

Əyrinin M nöqtəsinə uyğun gələn əyrilik vektoru belə tapılır:

$$\bar{k} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \bar{k}_{orta} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s}. \quad (2)$$

Məlumdur ki, $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}$. Deməli

$$\bar{k} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}. \quad (3)$$

İndi əyrilik vektorunun modulunu təyin edək. (2) düsturuna əsasən əyrilik vektorunun modulunu belə ifadə etmək olar:

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{\tau}|}{\Delta s} \quad (4)$$

MAB üçbucağı bərabəryanlıdır, çünki $|\bar{\tau}| = |\bar{\tau}_1| = 1$. Bu halda

$$|\Delta \bar{\tau}| = 2(AD) = 2|\bar{\tau}| \sin \frac{\Delta \varphi}{2}. \quad (5)$$

Δs qövsü kiçikdir. Onda $\Delta \varphi$ bucağı da kiçik olar, yəni $\sin \frac{\Delta \varphi}{2} \approx \frac{\Delta \varphi}{2}$. Nəticədə yazı bilərik:

$$|\Delta \bar{\tau}| = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\Delta \varphi}{2} = \Delta \varphi. \quad (6)$$

(6)-nı (4)-də yerinə yazaq:

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}. \quad (7)$$

Diferensial həndəsədən məlumdur ki, $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}$.

Burada ρ - əyrinin əyrilik radiusudur. Onda

$$k = \frac{1}{\rho}. \quad (8)$$

Şək. 2.8-dən yazı bilərik:

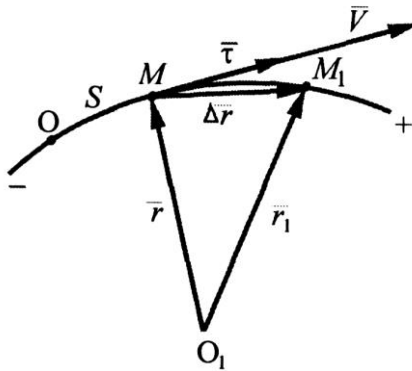
$$\alpha = 90^\circ - \frac{\Delta \varphi}{2}. \quad (9)$$

Aydınır ki, $\Delta \varphi \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 90^\circ$, $\bar{k}_{orta} \rightarrow \bar{k}$. Buradan görünür ki, $\bar{\tau}$ və $\bar{k}$ vektorları bir-birinə perpendikulyar istiqamətdə yönəlir, yəni əyrilik vektorunun istiqaməti baş normalla üst-üstə düşür. Bunu və (8) bərabərliyini nəzərə alaraq əyrilik vektorunu belə də ifadə etmək olar:

$$\bar{k} = \bar{n} \frac{1}{\rho}. \quad (10)$$

2.6. Nöqtənin hərəkəti təbii üsulla verildikdə onun sürəti

Fərz edək ki, nöqtənin trayektoriyası və onun bu trayektoriya boyunca $s = f(t)$ şəklində hərəkət tənliyi verilmişdir. Tutaq ki, bu nöqtə zamanın t anında M vəziyyətini tutaraq s qövsü koordinatına və $\bar{r}$ radius-vektoruna, $t_1 = t + \Delta t$ anında isə M_1 vəziyyətinə keçərək s_1 qövsü koordinatına və $\bar{r}_1$ radius-vektoruna malik olur (şək. 2.9). Onda Δt zaman fasiləsi ərzində nöqtənin qövsü koordinatı $\Delta s = s_1 - s$, radius-vektoru isə $\Delta \bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}$ artımını almış olur. Baxılan halda $s = \cup OM$, $s_1 = \cup OM_1$, $\Delta s = \cup MM_1$.



Şək. 2.9

Məlumdur ki, nöqtənin sürət vektoru belə ifadə olunur:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (1)$$

Bu bərabərliyi aşağıdakı şəkildə də yazmaq olar:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}. \quad (2)$$

Burada $\frac{d\bar{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}.$

MM_1 qövsünü sonsuz olaraq kiçiltəndə onun uzunluğu, yəni Δs , sonsuz olaraq MM_1 vətərinin uzunluğuna, yəni $|\Delta \bar{r}|$ –ə yaxınlaşır. Deməli

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = 1. \quad (3)$$

Dediklərimizə görə, $\frac{d\bar{r}}{ds}$ vektoru modulca vahidə bərabər olub toxunan boyunca qövsü koordinatın artması istiqamətində yönəlir. Deməli, $\frac{d\bar{r}}{ds}$ toxunan istiqamətdə yönələn vahid vektordur, yəni $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$. Bunu (2) ifadəsində nəzərə alsaq nöqtənin hərəkətinin təbii üsulla verilişində sürət vektorunun əsas ifadəsini əldə edirik:

$$\bar{V} = \bar{\tau} \frac{ds}{dt}. \quad (4)$$

Bu bərabərliyi toxunan üzərinə proyeksiyalasaq nöqtənin sürətinin bu toxunan üzərindəki proyeksiyasını alırıq:

$$V_{\tau} = \frac{ds}{dt}. \quad (5)$$

Nöqtənin sürətinin modulu isə belə ifadə olunur:

$$V = |V_{\tau}| = \left| \frac{ds}{dt} \right|. \quad (6)$$

2.7. Nöqtənin hərəkəti təbii üsulla verildikdə onun təcili

Məlumdur ki, nöqtənin sürət və təcili aşağıdakı kimi ifadə oluna bilər:

$$\bar{V} = \bar{\tau} V_{\tau}, \quad (1)$$

$$\bar{W} = \frac{d\bar{V}}{dt}, \quad (2)$$

burada $\bar{\tau}$ - nöqtənin trayektoriyasının toxunanı istiqamətində yönəlmiş vahid vektor; V_{τ} - nöqtənin sürətinin toxunan üzərindəki proyeksiyasıdır. (1)-i (2)-də nəzərə alsaq

$$\bar{W} = \frac{d\bar{\tau}}{dt} V_{\tau} + \bar{\tau} \frac{dV_{\tau}}{dt} \quad (3)$$

bərabərliyini əldə edərək.

$\frac{d\bar{\tau}}{dt}$ törəməsini nəzərdən keçirək:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}. \quad (4)$$

Məlumdur ki,

$$\left. \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{k} = \bar{n} \frac{1}{\rho}, \quad \frac{ds}{dt} = V_{\tau} \right\}, \quad (5)$$

burada $\bar{k}$ və ρ - uyğun olaraq trayektoriyanın əyrilik vektoru və əyrilik radiusudur. (5)-i (4)-də yerinə yazaq:

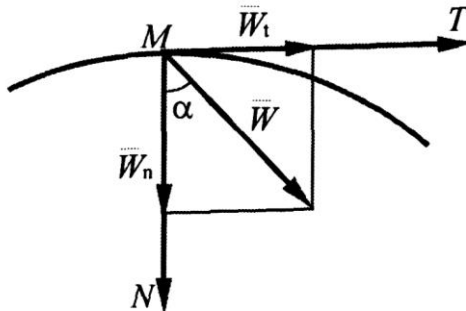
$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \bar{n} \frac{V_{\tau}}{\rho}. \quad (6)$$

$V_{\tau}^2 = V^2$ olduğunu bilərək (6) ifadəsini (3)- də nəzərə alsaq tapırıq:

$$\bar{W} = \bar{n} \frac{V^2}{\rho} + \bar{\tau} \frac{dV_{\tau}}{dt}. \quad (7)$$

Alınmış ifadədən görünür ki, nöqtənin təcil vektoru iki vektorun həndəsi cəminə bərabərdir. Bunlardan birincisi baş normal istiqamətində yönəlir və nöqtənin normal təcili adlanır. İkincisi isə toxunan istiqamətində yönəlir və toxunan, yaxud tangensial təcil adlanır (şək. 2.10).

Beləliklə,



Şək. 2.10

$$\overline{W} = \overline{W}_n + \overline{W}_t, \quad (8)$$

$$\overline{W}_n = \overline{n} \frac{V^2}{\rho}, \quad \overline{W}_t = \overline{\tau} \frac{dV_\tau}{dt}. \quad (9)$$

Normal, toxunan və tam təcillərin modulları uyğun olaraq aşağıdakı ifadələrlə təyin edilir:

$$W_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad (10)$$

$$W_t = \left| \frac{dV_\tau}{dt} \right|, \quad (11)$$

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_t^2} = \sqrt{\left(\frac{V^2}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{dV_\tau}{dt} \right)^2}. \quad (12)$$

(7) bərabərliyini baş normal və toxunan üzərinə proyeksiyalasaq alarıq:

$$\left. \begin{aligned} W_n &= \frac{V^2}{\rho}, & W_\tau &= \frac{dV_\tau}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Nöqtənin təcilinin baş normal üzərindəki proyeksiyası həmişə müsbətdir, toxunan üzərindəki proyeksiyası W_τ isə müsbət də ola bilər, mənfi də. $\overline{W}_t$ və $\overline{\tau}$ vektorlarının istiqaməti eyni olarsa, W_τ müsbət, əks halda mənfi olur.

Tam təcil vektorunun baş normala nəzərən istiqaməti bu ifadə ilə müəyyən olunur:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{W_t}{W_n}, \quad (14)$$

burada α - tam və normal təcil vektorları arasında qalan bucaqdır.

Normal təcil nöqtənin sürətinin ancaq istiqamətcə dəyişməsinə xarakterizə edir. Nöqtənin düzxətli hərəkətində onun normal təcili sıfıra bərabər olur. Normal təcil həmişə trayektoriyanın çökük tərəfinə doğru yönəlir.

Toxunan təcil nöqtənin sürətinin ancaq modulca dəyişməsinə xarakterizə edir. Belə ki, $V = \text{const}$ olduqda $W_t = 0$ olur.

Nöqtənin təcilinin onun trayektoriyasının binormalı üzərindəki proyeksiyası sıfıra bərabərdir. Bu, (7) ifadəsindən də bilinir.

2.8. Nöqtənin müntəzəm və müntəzəmdəyişən hərəkətləri

1) Nöqtənin müntəzəm hərəkəti. Nöqtənin müntəzəm hərəkəti elə hərəkətə deyilir ki, bu vaxt onun sürətinin toxunan üzərindəki proyeksiyası sabit qalır. Tərifə görə

$$V_\tau = \text{const} . \quad (1)$$

Məlumdur ki,

$$V_\tau = \frac{ds}{dt} . \quad (2)$$

Onda

$$ds = V_\tau dt . \quad (3)$$

(1) şərtini nəzərə alaraq bu ifadəni verilmiş sərhədlər daxilində inteqrallayaq:

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t V_t dt. \quad (4)$$

Buradan $s - s_0 = V_\tau t$. Deməli

$$s = s_0 + V_\tau t. \quad (5)$$

s_0 nöqtənin başlanğıc qövsü koordinatıdır. (5) ifadəsi nöqtənin müntəzəm hərəkətinin kinematik tənliyi adlanır.

$V_\tau = \text{const}$ şərtindən görünür ki, nöqtənin müntəzəm hərəkətində

$$W_t = \left| \frac{dV_\tau}{dt} \right| = 0, \quad W = W_n = \frac{V^2}{\rho}. \quad \left. \vphantom{\frac{dV_\tau}{dt}} \right\} \quad (6)$$

2) Nöqtənin müntəzəmdəyişən hərəkəti. Nöqtənin müntəzəmdəyişən hərəkəti elə hərəkətə deyilir ki, bu vaxt onun təcilinin toxunan üzərindəki proyeksiyası sabit qalır. Tərifə görə

$$W_\tau = \text{const}. \quad (7)$$

Məlumdur ki,

$$W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}. \quad (8)$$

Onda

$$dV_\tau = W_\tau dt. \quad (9)$$

Bu ifadəni integrallayaq:

$$\int_{V_{o\tau}}^{V_{\tau}} dV_{\tau} = \int_0^t W_{\tau} dt, \quad (10)$$

burada $V_{o\tau}$ – nöqtənin başlanğıc sürətinin toxunan üzərindəki proyeksiyasıdır. (7) şərtini nəzərə alaraq (10) - dan tapırıq:

$$V_{\tau} = V_{o\tau} + W_{\tau} t. \quad (11)$$

(2)- ni burada yerinə yazsaq

$$ds = V_{o\tau} dt + W_{\tau} t dt \quad (12)$$

bərabərliyini əldə edə bilərik. Bu bərabərliyi integrallayaq:

$$\int_{S_0}^S ds = \int_0^t V_{o\tau} dt + \int_0^t W_{\tau} t dt. \quad (13)$$

Buradan

$$s = s_0 + V_{o\tau} t + W_{\tau} \frac{t^2}{2}. \quad (14)$$

Axırıncı ifadə nöqtənin müntəzəmdəyişən hərəkətinin kinematik tənliyi adlanır.

2.9. Bərk cismin irəliləmə hərəkəti

Bərk cismin irəliləmə hərəkəti elə hərəkətə deyilir ki, bu vaxt onun üzərində götürülmüş istənilən düz xətt parçası

özünün başlanğıc vəziyyətinə paralel qalır. İrəliləmə hərəkəti edən cismin nöqtələri həm düzxətli, həm də əyrixətli trayektoriyalar cıza bilər.

Teorem. İrəliləmə hərəkəti edən cismin nöqtələrinin hamısı eyni cür trayektoriyalar cızır və zamanın istənilən anında eyni sürət və eyni təcilə malik olur.

İsbatı. Fərz edək ki, baxılan bərk cisim tərpənməz qəbul olunmuş $Oxyz$ sisteminə nəzərən irəliləmə hərəkəti edir. Bu cismin ixtiyari olaraq götürülmüş A və B nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçasının hərəkətini nəzərdən keçirək (şək. 2.11). Bu parçanın sonrakı n ardıcıl vəziyyətlərini $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ ilə işarə edək. A və B nöqtələrinin ardıcıl vəziyyətlərini bir-biri ilə şək. 2.11-də göstərildiyi kimi düz xətt parçaları və səlis ayrılər (trayektoriyalar) vasitəsilə birləşdirək. Cismin deformasiyaları nəzərə alınmadığına görə

$$AB = A_1B_1 = A_2B_2 = \dots = A_nB_n. \quad (1)$$

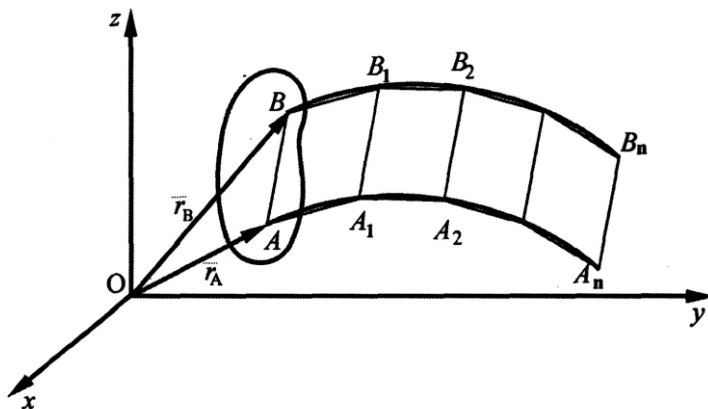
İrəliləmə hərəkətinin tərifinə görə isə

$$\overline{AB} \parallel \overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2} \parallel \dots \parallel \overline{A_nB_n}$$

Onda yazı bilərik:

$$AA_1 = BB_1, A_1A_2 = B_1B_2, \dots, A_{n-1}A_n = B_{n-1}B_n. \quad (2)$$

$$\overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1}, \overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n} \parallel \overline{B_{n-1}B_n}.$$



Şək. 2.11

Yazdıqlarımıza görə $AA_1A_2 \dots A_n$ və $BB_1B_2 \dots B_n$ sınıq xətləri bir-birinin üzərinə salına bilər. Bölgülərin sayını sonsuzluğa yaxınlaşdırsaq ($n \rightarrow \infty$) həmin sınıq xətlər uyğun olaraq A və B nöqtələrinin trayektoriyalarına çevrilər. Deməli bu nöqtələrin trayektoriyaları da üst-üstə salına bilər, yəni onlar eyni cürdür. A və B nöqtələri ixtiyari olaraq götürüldüyünə görə alınan bu nəticə cismin nöqtələrinin hamısına aiddir. Bununla teoremin birinci hissəsi isbat olunur.

Şəkildən yazı bilərik:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}, \quad (3)$$

burada $\bar{r}_A$ və $\bar{r}_B$ – cismin uyğun olaraq A və B nöqtələrinin radius-vektorlarıdır.

$\overline{AB} = \text{const}$ olduğunu nəzərə alaraq (3) ifadəsindən zamana görə törəmə alaq: $\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt}$. Burada $\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{V}_B$,

$\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{V}_A$. Onda

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A \quad (4)$$

bərabərliyini alırıq. Bu bərabərlikdən də zamana görə törəmə alaıq: $\frac{d\overline{V}_B}{dt} = \frac{d\overline{V}_A}{dt}$. $\frac{d\overline{V}_B}{dt} = \overline{W}_B$, $\frac{d\overline{V}_A}{dt} = \overline{W}_A$ olduğu üçün $\overline{W}_B = \overline{W}_A$ olur. Teoremin ikinci hissəsi də isbat olundu.

İrəliləmə hərəkəti edən bərk cismin nöqtələrinin hamısı eyni cür hərəkət etdiyinə görə onun ancaq bir nöqtəsinin hərəkətini öyrənmək kifayətdir. Bunu nəzərə alaraq bərk cismin irəliləmə hərəkətinin kinematik tənliklərini bu şəkildə yazmaq olar:

$$x_{o'} = f_1(t), \quad y_{o'} = f_2(t), \quad z_{o'} = f_3(t), \quad (5)$$

burada $x_{o'}, y_{o'}, z_{o'}$ – cismin üzərində ixtiyari olaraq götürülmüş O' qütbünün koordinatlarıdır. (5) ifadələri göstərir ki, irəliləmə hərəkəti edən cismin ümumi halda üç sərbəstlik dərəcəsi vardır.

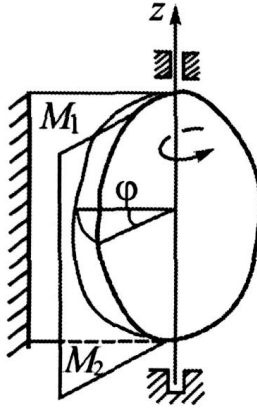
2.10. Bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkəti

Bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkəti elə hərəkətə deyilir ki, bu vaxt onun iki nöqtəsi tərpənməz qalır. Həmin tərpənməz nöqtələrdən keçən düz xətt cismin fırlanma oxu adlanır. Bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkətinə çox vaxt sadəcə olaraq fırlanma hərəkəti deyirlər.

Fırlanma hərəkəti zamanı cismin fırlanma oxu ilə üst-üstə düşən nöqtələri tərpənməz qalır, digər nöqtələri isə mərkəzləri bu ox üzərində olan çevrələr üzrə hərəkət edir. Bu çevrələrin müstəviləri fırlanma oxuna perpendikulyar olur.

Fərz edək ki, baxılan bərk cisim tərpənməz z oxu ətrafında fırlanma hərəkəti edir (şək.2.12).

Tutaq ki, z oxundan keçən M_1 müstəvisi tərpənməzdir, həmin oxdan keçən M_2 müstəvisi isə cisimlə sərt bağlıdır,



Şək. 2.12

yəni onunla birlikdə fırlanma hərəkəti edir. M_1 və M_2 müstəviləri arasında qalan φ bucağı cismin dönmə bucağı adlanır. Əgər fırlanma oxunun ucundan baxdıqda dönmə bucağı saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində qeyd olunmuş görünərsə o, müsbət, saat əqrəbi hərəkəti istiqamətində isə mənfi hesab olunur (şərti olaraq belə qəbul edilib).

Tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin bir sərbəstlik dərəcəsi vardır, belə ki, φ bucağı onun fəzadakı vəziyyətini tam müəyyən edir. Ona görə də

$$\varphi = f(t) \quad (1)$$

ifadəsi cismin fırlanma hərəkətinin kinematik tənliyi adlanır.

Fərz edək ki, fırlanan cismin φ dönmə bucağı Δt zaman fasiləsi ərzində $\Delta\varphi$ artımını almışdır. $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ nisbətində cismin Δt zaman fasiləsindəki orta bucaq sürəti deyilir, yəni

$$\omega_{orta} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} . \quad (2)$$

Δt zaman fasiləsini sonsuz olaraq kiçildərək limitə keçsək tərpənməz z oxu ətrafında fırlanan cismin baxılan andakı bucaq sürətini taparıq:

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{orta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} . \quad (3)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \text{ olduğu üçün}$$

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} . \quad (4)$$

Beləliklə, tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin bucaq sürəti onun dönmə bucağından zamana görə alınmış birinci tərtib törəməyə bərabərdir.

Tutaq ki, fırlanan cismin ω_z bucaq sürəti Δt zaman fasiləsi ərzində $\Delta\omega_z$ artımını almışdır. $\frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}$ nisbətində cismin Δt zaman fasiləsindəki orta bucaq təcili deyilir, yəni

$$\varepsilon_{orta} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} . \quad (5)$$

Cismin baxılan andakı bucaq təcilini təyin etmək üçün Δt zaman fasiləsini sonsuz olaraq kiçildərək limitə keçək. Onda

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{orta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} , \quad (6)$$

burada ε_z – cismin baxılan andakı bucaq təcildir.

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt}$ olduğu üçün nəticədə

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} \quad (7)$$

alırıq. (4) ifadəsini burada nəzərə alsaq

$$\varepsilon_z = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (8)$$

olar.

Axırıncı iki ifadədən görünür ki, fırlanan cismin bucaq təcili onun bucaq sürətindən zamana görə alınmış birinci tərtib törəməyə, yaxud dönmə bucağından zamana görə alınmış ikinci tərtib törəməyə bərabərdir.

Bucaq sürətini adətən $\frac{rad}{san}$, yaxud san^{-1} ilə ölçürlər. Texniki hesablamalarda isə çox vaxt sabit bucaq sürəti ilə fırlanan cismin bucaq sürətini n ilə işarə edib $\frac{d\omega_{\varphi}}{d\tau q}$ ilə ölçürlər (n - bir dəqiqədəki dövrlərin sayıdır). ω və n arasında əlaqə belə yaradılır:

$$\omega \frac{rad}{san} = n \frac{dövr}{d\tau z} = n \frac{2\pi rad}{60san}.$$

Buradan

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (9)$$

Fırlanan cismin bucaq təcili $\frac{rad}{san^2}$, yaxud san^{-2} ilə ölçürlər.

2.11. Bərk cismin müntəzəm və müntəzəmdəyişən fırlanma hərəkətləri

1) Bərk cismin müntəzəm fırlanma hərəkəti. Bərk cismin müntəzəm fırlanma hərəkəti elə hərəkətə deyilir ki, bu vaxt onun bucaq sürəti sabit qalır. Tərifə görə

$$\omega_z = \text{const} . \quad (1)$$

Məlumdur ki, $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$. Buradan

$$d\varphi = \omega_z dt . \quad (2)$$

Bu ifadəni verilmiş sərhədlər daxilində inteqrallayaq:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_z dt , \quad (3)$$

burada φ_0 – cismin başlanğıc dönmə bucağıdır. (1) şərtini nəzərə alaraq (3) –dən tapırıq:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_z t . \quad (4)$$

Bu ifadə cismin müntəzəm fırlanma hərəkətinin kinematik tənliyi adlanır. Müntəzəm fırlanma hərəkətində bucaq sürəti sabit olduğuna görə bucaq təcili sıfıra bərabər olur $\left(\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = 0 \right)$.

2) Bərk cismin müntəzəmdəyişən fırlanma hərəkəti. Bərk cismin müntəzəmdəyişən fırlanma hərəkəti elə hərəkətə deyilir ki, bu vaxt onun bucaq təcili sabit qalır. Tərifə görə

$$\varepsilon_z = \text{const} . \quad (5)$$

Məlumdur ki, $\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}$. Buradan

$$d\omega_z = \varepsilon_z dt . \quad (6)$$

Bu ifadəni verilmiş sərhədlər daxilində inteqrallayaq:

$$\int_{\omega_{oz}}^{\omega_z} d\omega_z = \int_0^t \varepsilon_z dt , \quad (7)$$

burada ω_{oz} – cismin başlanğıc andakı bucaq sürətidir. (5) şərtini nəzərə alaraq (7) – dən tapırıq:

$$\omega_z = \omega_{oz} + \varepsilon_z t . \quad (8)$$

Bu ifadədə ω_z əvəzində $\frac{d\varphi}{dt}$ yazaraq aşağıdakı bərabərliyi ala bilərik:

$$d\varphi = \omega_{oz} dt + \varepsilon_z t dt . \quad (9)$$

Analoci interallama əməliyyatı aparaq:

$$\int_{\varphi_o}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_{oz} dt + \int_0^t \varepsilon_z t dt . \quad (10)$$

Buradan

$$\varphi = \varphi_o + \omega_{oz} t + \varepsilon_z \frac{t^2}{2} . \quad (11)$$

Bu ifadə cismin müntəzəmdəyişən fırlanma hərəkətinin kinematik tənliyi adlanır.

Qeyd edək ki, ω_z və ε_z uyğun olaraq bucaq sürəti və bucaq təcilinin cəbri qiymətləridir və həm müsbət, həm də mənfi ədədi qiymət ala bilərlər. Əgər ω_z və ε_z –in işarələri eyni olarsa fırlanma hərəkəti artan (yeyinləşən), əks halda azalan (yavaşayan) olur. Müntəzəmdəyişən fırlanma hərəkətində belə hallara uyğun olaraq müntəzəm artan və müntəzəm azalan fırlanma hərəkəti deyirlər.

2.12. Tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin nöqtələrinin sürət və təcili

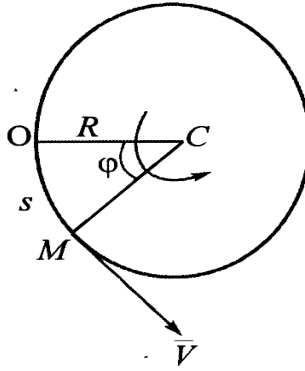
Məlumdur ki, tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin hər bir nöqtəsi mərkəzi fırlanma oxu üzərində olan çevrə üzrə hərəkət edir. Bunu nəzərə alaraq həmin cismin ixtiyari M nöqtəsinin hərəkətini nəzərdən keçirək (şək.2.13).

OM qövsünün uzunluğunu s ilə işarə edək. Şək. 2.13-dən

$$s = R\varphi, \quad (1)$$

burada s – M nöqtəsinin qövsü koordinatı; R – həmin nöqtənin fırlanma radiusudur (baxılan nöqtənin fırlanma oxundan olan məsafəsi); φ – məlum olduğu kimi, cismin dönmə bucağıdır.

(1) ifadəsindən zamana görə törəmə alaq:



Şək. 2.13

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2)$$

Məlumdur ki,

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= V_{\tau}, & \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Onda

$$V_{\tau} = R\omega_z. \quad (4)$$

Cismin ixtiyari M nöqtəsinin sürətinin modulu $V = |V_{\tau}| = R|\omega_z|$,

yaxud

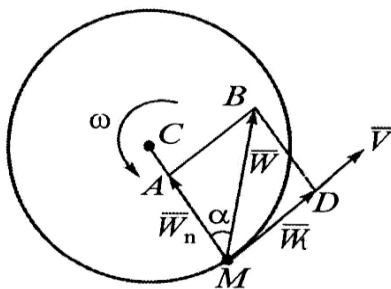
$$V = \omega R \quad (5)$$

olar.

modulları bu ifadələrlə təyin edilir: $W_n = \frac{V^2}{\rho}$, $W_t = \left| \frac{dV_\tau}{dt} \right|$.

$$W_n = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R, \quad (6)$$

$$W_t = R \left| \frac{d\omega_z}{dt} \right| = R |\mathcal{E}_z| = \varepsilon R. \quad (7)$$

$$W = \sqrt{W_t^2 + W_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (8)$$


Fırlanan cismin ixtiyari nöqtəsinin tam təcilinin vektorunun həmin nöqtənin fırlanma radiusu ilə əmələ gətirdiyi bucaq bu ifadədən tapıla bilər:

$$tg \alpha = \frac{AB}{MA} = \frac{W_t}{W_n}. \quad (9)$$

(6) və (7) düsturlarını burada nəzərə alsaq

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (10)$$

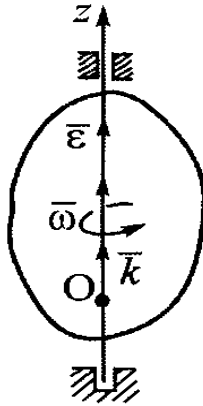
olar. Qeyd etmək lazımdır ki, α bucağı fırlanan cismin nöqtələrinin hamısı üçün eyni qiymətə malik olur. (5), (6), (7) və (8) ifadələrindən görünür ki, fırlanan cismin ixtiyari nöqtəsinin sürətinin, normal, toxunan və tam təcillərinin modulları bu nöqtənin fırlanma oxundan olan məsafəsi ilə düz mütənasibdir.

2.13. Tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin nöqtələrinin sürət və təcillərinin vektorial ifadələri

Tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin nöqtələrinin sürət və təcillərini vektorial kəmiyyətlərlə də ifadə etmək olar. Bunun üçün əvvəlcə fırlanan cismin bucaq sürəti və bucaq təcili vektoru anlayışlarına baxaq.

Fərz edək ki, baxılan cisim tərpənməz z oxu ətrafında fırlanır (şək.2.15). Bu cismin bucaq sürəti vektoru $\vec{\omega}$ z oxunun ixtiyari nöqtəsində tətbiq olunub bu ox boyunca elə yönəlir ki, onun ucundan baxdıqda cismin fırlanması saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində görünür. Bu vektorun modulu cismin dönmə bucağından zamana görə alınmış birinci tərtib törəmənin (yəni cismin cəbri bucaq sürətinin) mütləq qiymətinə bərabərdir, yəni

$$\omega = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|. \quad (1)$$



Şək. 2.15

z oxu boyunca bu oxun müsbət istiqamətində yönəlmiş $\bar{k}$ vahid vektorunu qəbul edək.

Deyilənləri nəzərə alaraq bucaq sürəti vektorunu belə ifadə edə bilərik:

$$\bar{\omega} = \bar{k} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2)$$

Bu ifadəni z oxu üzərinə proyeksiyalasaq alarıq:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3)$$

Göründüyü kimi, bucaq sürəti vektorunun fırlanma oxu üzərindəki proyeksiyası bu bucaq sürətinin cəbri qiymətinə bərabərdir. (3)-ü (2)-də nəzərə alaq:

$$\bar{\omega} = \bar{k} \omega_z. \quad (4)$$

Fırlanan cismin bucaq təcili vektorunu təyin etmək üçün sonuncu ifadədən zamana görə törəmə almaq lazımdır:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{k} \frac{d\omega_z}{dt} = \bar{k} \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (5)$$

Bucaq təcili vektorunun z oxu üzərindəki proyeksiyası

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (6)$$

(5) və (6) ifadələrinə əsasən

$$\bar{\varepsilon} = \bar{k} \varepsilon_z \quad (7)$$

bərabərliyini yaza bilərik.

Bucaq təcili vektorunun modulu

$$\varepsilon = |\varepsilon_z| = \left| \frac{d\omega_z}{dt} \right| = \left| \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right|. \quad (8)$$

Əgər $\bar{\omega}$ və $\bar{\varepsilon}$ vektorları eyni tərəfə yönəlsə fırlanma hərəkəti yeyinləşən, əks halda yavaşayan olar.

İndi z oxu ətrafında fırlanan cismin ixtiyari M nöqtəsinin sürət və təcilinin vektorial ifadələrini çıxaraq. M nöqtəsinin fırlanma radiusunu R ($R=MC$), z oxu üzərində götürülmüş ixtiyari O nöqtəsinə nəzərən radius-vektorunu isə $\bar{r}$ ilə işarə edək (şək. 2.16).

Məlumdur ki, cismin M nöqtəsinin sürətinin modulunu belə ifadə etmək olar:

$$V = \omega R. \quad (9)$$

Şək. 2.16-dan $R = r \sin \gamma$. Onda

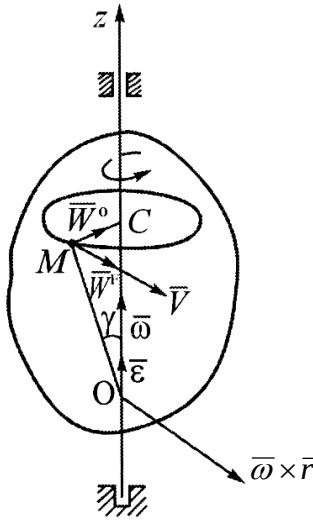
$$V = \omega r \sin \gamma, \quad (10)$$

burada γ – $\vec{\omega}$ və $\vec{r}$ vektorları arasında qalan bucaqdır.

Vektorlar cəbrinin qaydalarına görə

$$\omega r \sin \gamma = |\vec{\omega} \times \vec{r}|. \quad (11)$$

Bu ifadəni (10)-da yerinə yazaq:



Şək. 2.16

$$V = |\vec{\omega} \times \vec{r}|. \quad (12)$$

$\vec{\omega} \times \vec{r}$ vektorial hasili elə bir vektora bərabərdir ki, o, M nöqtəsinin sürət vektoruna paralel olaraq onunla eyni tərəfə

doğru yönəlidir. Bu, şəkl.2.16-dan da görünür. Onda bu deyilənləri və (12) bərabərliyini nəzərə alaraq yazsa bilərik:

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (13)$$

Beləliklə, tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin hər hansı nöqtəsinin sürət vektoru bu cismin bucaq sürəti vektoru ilə həmin nöqtənin fırlanma oxu üzərində götürülmüş ixtiyari nöqtəyə nəzərən radius-vektorunun vektorial hasilinə bərabərdir.

Cismin baxılan M nöqtəsinin təcilini təyin etmək məqsədilə (13) ifadəsindən zamana görə törəmə alırıq:

$$\bar{W} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (14)$$

Məlumdur ki,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}, \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Onda

$$\bar{W} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V}. \quad (16)$$

Beləliklə deyə bilərik ki, tərpənməz ox ətrafında fırlanan cismin hər hansı nöqtəsinin təcil vektoru iki vektorun həndəsi cəminə bərabərdir. Bu vektorlardan birincisi $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ vektorial hasilinə uyğun olaraq həmin nöqtənin sürət vektoru ilə bir düz xətt boyunca yönəlidir və bu nöqtənin fırlanma təcili adlanır. İkincisi isə $\bar{\omega} \times \bar{V}$ hasilinə uyğun olaraq fırlanma oxuna tərəf yönəlidir və cismin baxılan nöqtəsinin oxa doğru yönəlmə təcili adlanır. Deməli:

$$\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{W}^F, \quad \bar{\omega} \times \bar{V} = \bar{W}^O, \quad (17)$$

burada $\bar{W}^F$ – cismin baxılan nöqtəsinin fırlanma təcili, $\bar{W}^O$ – həmin nöqtənin oxa doğru yönəlmə təcildir. (17)-ni (16)-da yerinə yazsaq alırıq:

$$\overline{W} = \overline{W}^F + \overline{W}^O. \quad (18)$$

Baxılan halda cismin ixtiyari M nöqtəsinin fırlanma təcili bu nöqtənin toxunan təcilinə, oxa doğru yönəlmə təcili isə normal təcilinə bərabərdir.

2.14. Bərk cismin müstəvi-paralel hərəkəti

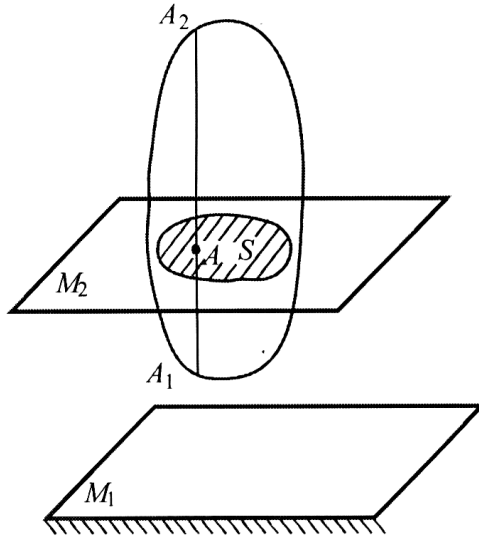
Bərk cismin müstəvi-paralel hərəkəti elə hərəkətə deyilir ki, bu vaxt onun nöqtələri verilmiş tərpənməz müstəviyə paralel müstəvilər üzərində hərəkət edir.

Müstəvi-paralel hərəkətə bəzən sadəcə olaraq müstəvi hərəkət deyirlər. Bu hərəkətə misal olaraq çarxqolu-sürgüqolu mexanizmində sürgüqolunun hərəkətini, düz yolla diyirlənən təkərin hərəkətini və s. göstərmək olar. Bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkəti müstəvi-paralel hərəkətin xüsusi halıdır.

Fərz edək ki, baxılan cisim tərpənməz M_1 müstəvisinə nəzərən müstəvi-paralel hərəkət edir (şək.2.17). Bu cismi M_1 -ə paralel M_2 müstəvisi ilə kəsək. Kəsikdə müəyyən bir S yastı (müstəvi) fiqurunu alırıq. Müstəvi-paralel hərəkətin tərifinə görə S fiquru həmişə M_2 müstəvisinin üzərində qalacaqdır.

Hərəkət edən cisimlə ayrılmaz sürətdə bağlı olan və S yastı fiquruna perpendikulyar yönələn A_1A_2 düz xətt parçasının hərəkətini nəzərdən keçirək. A_1A_2 parçası yastı fiqura perpendikulyar olduğuna görə o, eyni zamanda M_1 və M_2 müstəvilərinə də perpendikulyar olacaqdır. A_1A_2 parçası həmişə tərpənməz M_1 müstəvisinə perpendikulyar qaldığından o, özünün başlanğıc vəziyyətinə paralel hərəkət edəcəkdir. Onda, bərk cismin irəliləmə hərəkətinin kinematikasından məlum olduğu kimi, bu parçanın nöqtələrinin hamısı eyni cür hərəkət edəcəkdir. Buradan belə çıxır ki, həmin parçanın hərəkətini

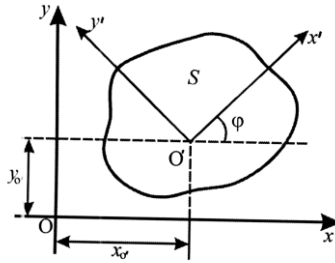
öyrənmək üçün onun ancaq bir nöqtəsinin, məsələn, yastı fiqurla A kəsişmə nöqtəsinin hərəkətini nəzərdən keçirmək kifayətdir. Bu ardıcılıqla mülahizə yürüdərək sübut etmək olar ki, baxılan cismin nöqtələrinin hərəkətinin öyrənilməsi yastı fiqurun nöqtələrinin hərəkətinin öyrənilməsinə gətirilir. Buradan görünür ki, bərk cismin müstəvi-paralel hərəkətini öyrənmək üçün yastı fiqurun hərəkətini tədqiq etmək tamamilə kifayətdir. Bu deyiləni nəzərə alaraq bundan sonra ancaq yastı fiqurun hərəkətini nəzərdən keçirəcəyik.



Şək. 2.17

Fərz edək ki, S yastı fiquru tərpənməz Oxy müstəvisi üzərində hərəkət edir (şək. 2.18). Yastı fiqurla eyni müstəvi üzərində yerləşən və onunla ayrılmaz sürətdə bağlı olan, yəni bu fiqurla birlikdə hərəkət edən $O'x'y'$ koordinat sistemini də qəbul edək. Yastı fiqurun tərpənməz Oxy sisteminə nəzərən

vəziyyəti $O'x'y'$ sisteminin bu sistemə nəzərən vəziyyəti ilə tamamilə müəyyən olunur.



Şək. 2.18

$O'x'y'$ sisteminin Oxy sisteminə nəzərən vəziyyəti isə O' başlanğıcının (qütbünün) koordinatları və φ dönmə bucağı vasitəsilə təyin edilir. Bu kəmiyyətlərin hər üçü ümumi halda zamanın funksiyaları olur, yəni

$$\left. \begin{aligned} x_{o'} &= f_1(t), \\ y_{o'} &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(1) ifadələri yastı fiqurun, yaxud bərk cismin müstəvi-paralel hərəkətinin kinematik tənlikləri adlanır. O' qütbünün yastı fiqur üzərində seçilməsi ixtiyaridir.

(1) ifadələrindən görünür ki, yastı fiqurun hərəkətini iki hərəkətin cəmi kimi təsəvvür etmək mümkündür. Bu hərəkətlərin birincisi O' qütbünün hərəkəti kimi irəliləmə hərəkəti, ikincisi isə bu qütb ətrafında fırlanma hərəkətidir. Aydındır ki, bu hərəkətlərin hamısı yastı fiqur müstəvisi üzərində baş verir. Dediymiz irəliləmə hərəkəti qütbün vəziyyətindən asılıdır, fırlanma hərəkəti isə asılı deyildir.

Yastı fiqurun bucaq sürətinin və bucaq təcilinin cəbri qiymətləri bərk cismin tərpənməz ox ətrafında fırlanma hərəkətində olduğu kimi tapılır, yəni

$$\left. \begin{aligned} \omega_z = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

2.15. Yastı fiqur nöqtələrinin sürəti

Teorem. Yastı fiqurun hər hansı nöqtəsinin sürəti bu fiqur üzərində götürülmüş ixtiyari qütbün sürəti ilə fiqurun qütb ətrafında fırlanmasında həmin nöqtənin aldığı sürətin həndəsi cəminə bərabərdir.

Teoremin riyazi ifadəsi:

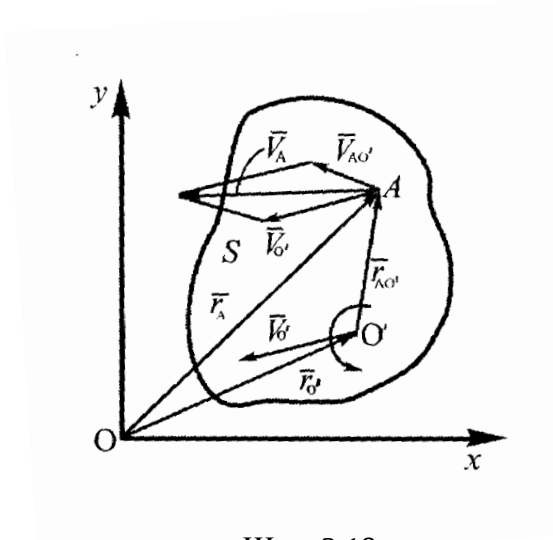
$$\bar{V}_A = \bar{V}_{O'} + \bar{V}_{AO'},$$

burada $\bar{V}_A$ – fiqurun hər hansı A nöqtəsinin sürəti; $\bar{V}_{O'}$ – fiqur üzərində götürülmüş ixtiyari O' qütbünün sürəti; $\bar{V}_{AO'}$ – fiqurun O' qütübü ətrafında fırlanmasında onun A nöqtəsinin aldığı sürətdir.

İsbatı. Fərz edək ki, baxılan S yastı fiquru tərpənməz Oxy müstəvisi üzərində hərəkət edir (şək. 2.19). Bu fiqur üzərində götürülmüş ixtiyari A nöqtəsinin tərpənməz O başlanğıcına nəzərən radius-vektoru

$$\bar{r}_A = \bar{r}_{O'} + \bar{r}_{AO'}, \quad (1)$$

burada $\bar{r}_{O'}$ – fiqur üzərində götürülmüş hər hansı O' qütbünün O başlanğıcına nəzərən radius-vektoru; $\bar{r}_{AO'}$ – A nöqtəsinin O' qütübünə nəzərən radius-vektordur.



Шяк. 2.19

(1) ifadəsindən zamana görə törəmə alaq:

$$\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \frac{d\bar{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\bar{r}_{AO'}}{dt}, \quad (2)$$

burada

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{r}_A}{dt} &= \bar{V}_A, & \frac{d\bar{r}_{O'}}{dt} &= \bar{V}_{O'}, & \frac{d\bar{r}_{AO'}}{dt} &= \bar{V}_{AO'} \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

$|\bar{r}_{AO'}| = \text{const}$ olduğu üçün $\bar{V}_{AO'}$ fırlanma hərəkətində yaranan sürətdir, belə ki,

$$\bar{V}_{AO'} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{AO'}, \quad (4)$$

burada $\bar{\omega}$ – yastı fiqurun bucaq sürəti vektorudur (yastı fiqura perpendikulyar yönəlir).

(3) ifadələrini (2) – də yerinə yazsaq alarıq:

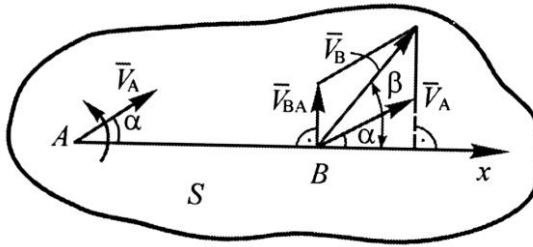
$$\vec{V}_A = \vec{V}_{O'} + \vec{V}_{AO'}. \quad (5)$$

Teorem isbat olundu.

Nəticə. Yastı fiqurun hər hansı iki nöqtəsinin sürətlərinin bu nöqtələrdən keçən ox üzərindəki proyeksiyaları bərabərdir.

İsbatı. Verilmiş S yastı fiqurunun ixtiyari olaraq götürülmüş A və B nöqtələrinin hərəkətini nəzərdən keçirək (şək. 2.20). A nöqtəsini qütb qəbul edərək yuxarıdakı teoremə əsasən B nöqtəsinin sürətini belə ifadə etmək olar:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \quad (6)$$



Şək. 2.20

$\vec{V}_{BA} \perp \overline{AB}$ olduğunu nəzərə alaraq (6) ifadəsini A və B nöqtələrindən keçən x oxu üzərinə proyeksiyalayaq:

$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha + V_{BA} \cdot \cos 90^\circ. \quad (7)$$

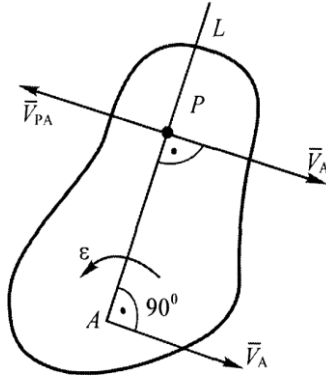
Buradan

$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha. \quad (8)$$

Nəticə isbat olundu.

2.16. Yastı fiqurun ani sürətlər mərkəzi

Ani sürətlər mərkəzi yastı fiqurun elə nöqtəsinə deyilir ki, baxılan anda həmin nöqtənin sürəti sıfıra bərabər olur. Yastı fiqurun ani sürətlər mərkəzinin mövcud olduğunu isbat edək. Fərz edək ki, yastı fiqurun baxılan andakı bucaq sürəti ω və onun hər hansı A nöqtəsinin sürəti $\vec{V}_A$ verilmişdir (şək.2.21). $\vec{V}_A$ vektoruna perpendikulyar olan AL düz xəttini çəkək. Bu düz xətti A nöqtəsindən başlayaraq o tərəfə doğru çəkirik ki, $\vec{V}_A$ vektorunu A nöqtəsi ətrafında fiqurun fırlanması istiqamətində 90° döndərdikdə o , həmin düz xəttin üzərinə düşsün.



Şək. 2. 21

Sonra AL düz xətti üzərində elə bir P nöqtəsi götürürük ki, onun vəziyyəti bu şərti ödəsin:

$$AP = \frac{V_A}{\omega}. \quad (1)$$

P nöqtəsinin sürətini yastı fiqur nöqtələrinin sürətləri haqqında teoremə əsasən belə ifadə etmək olar (A nöqtəsinə qütb qəbul edərək):

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA}. \quad (2)$$

Məlumdur ki, $V_{PA} = \omega \cdot AP$. (1)-dən $V_A = \omega \cdot AP$. Bu ifadələrdən görünür ki, $V_{PA} = V_A$. Digər tərəfdən, $\vec{V}_A$ və $\vec{V}_{PA}$ vektorları bir-birinə paralel olaraq əks tərəflərə yönəlir. Deyilənləri nəzərə alaraq yazsaq $\vec{V}_{PA} = -\vec{V}_A$. Bunu (2)-də yerinə yazsaq

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A - \vec{V}_A = 0 \quad (3)$$

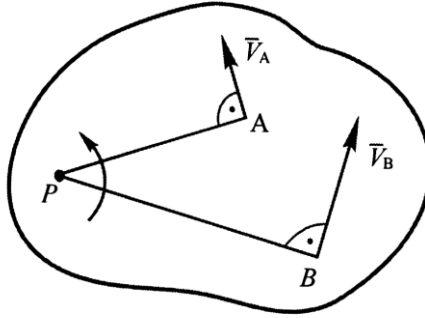
alırıq. Bununla da P nöqtəsinin baxılan yastı fiqurun ani sürətlər mərkəzi olduğu isbat olunur.

P nöqtəsinə qütb qəğul edərək yastı fiqurun ixtiyari B nöqtəsinin sürətini belə tapmaq olar:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP}. \quad (4)$$

$\vec{V}_P = 0$ olduğu üçün $\vec{V}_B = \vec{V}_{BP}$ alınar. Onda $V_B = V_{BP} = \omega \cdot BP$. Uyğun olaraq yastı fiqurun digər nöqtələri üçün yazsaq: $V_C = V_{CP} = \omega \cdot CP$, $V_D = V_{DP} = \omega \cdot DP$ və s. Yazdıqlarımızdan görünür ki, yastı fiqurun istənilən nöqtəsinin sürəti onun bu fiqurun ani sürətlər mərkəzi ətrafında fırlanma hərəkətindəki sürətinə bərabərdir. Deməli, zamanın verilmiş anında yastı fiqurun hərəkətinə ani fırlanma hərəkəti kimi baxmaq olar.

Yastı fiqurun ani sürətlər mərkəzinin vəziyyətini təyin etmək üçün onun hər hansı iki nöqtəsinin sürətinin istiqamətini bilmək kifayətdir. Bu nöqtələrdən həmin sürət vektorlarına çəkilmiş perpendikulyarların kəsişmə nöqtəsi bu fiqurun ani sürətlər mərkəzi olacaqdır (şək.2.22).



Şək. 2.22

Yastı fiqurun yerləşdiyi tərpənməz müstəvinin baxılan anda bu fiqurun ani sürətlər mərkəzi ilə üst-üstə düşən nöqtəsinə həmin fiqurun ani fırlanma mərkəzi deyilir. Yastı fiqurun hərəkəti zamanı onun ani sürətlər mərkəzinin bu fiqur üzərindəki vəziyyəti, həmçinin ani fırlanma mərkəzinin tərpənməz müstəvi üzərindəki vəziyyəti fasiləsiz olaraq dəyişir. Ani sürətlər mərkəzinin yastı fiqur üzərindəki ardıcıl vəziyyətlərinin həndəsi yeri tərpənən sentroid, ani fırlanma mərkəzinin tərpənməz müstəvi üzərindəki ardıcıl vəziyyətlərinin həndəsi yeri isə tərpənən sentroid adlanır. Sübut olunmuşdur ki, yastı fiqurun hərəkəti zamanı onun tərpənən sentroidi tərpənməz sentroidin üzəri ilə sürüşmədən diyirlənir.

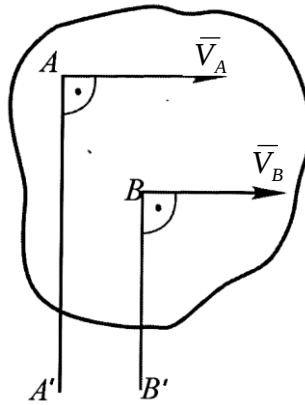
Bəzi xüsusi halları nəzərdən keçirək.

1) Baxılan anda yastı fiqurun verilmiş iki nöqtəsinin sürət vektorları bir-birinə paraleldir və onlara həmin nöqtələrdən çəkilmiş perpendikulyarlar bir düz xətt üzərinə düşür (şək.2.23). Bu halda həmin perpendikulyarlar

sonsuzluqda kəsişir və ona görə də $\omega = \frac{V_A}{\infty} = \frac{V_B}{\infty} = 0$ alınır.

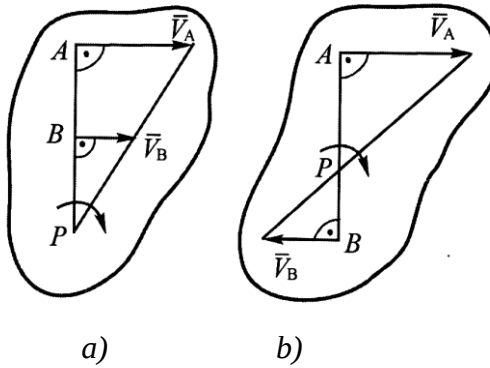
Ani bucaq sürətinin sıfıra bərabər olması səbəbindən yastı fiqurun bütün nöqtələrinin sürətləri həm qiymət, həm də istiqamətcə eyni olur, yəni $\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_C = \dots$. Belə halda yastı

fiqur (həm də ona uyğun gələn bərk cisim) ani irəliləmə hərəkəti edir.



Şək. 2.23

2) Baxılan anda yastı fiqurun verilmiş iki nöqtəsinin sürət vektorları bir-birinə paraleldir, və onlara həmin nöqtələrdən çəkilmiş perpendikulyarlar bir düz xətt üzərinə düşür. Sürət vektorları eyni tərəfə (şək.2.24a) və əks tərəflərə (şək.2.24b) yönələ bilər. Bu hallarda ani sürətlər mərkəzi sürət vektorlarına çəkilmiş ümumi perpendikulyarla bu vektorların üç nöqtələrindən keçən düz xəttin kəsişmə nöqtəsində yerləşir.



Şək. 2.24

2.17. Yastı fiqur nöqtələrinin təcili

Teorem. Yastı fiqurun hər hansı nöqtəsinin təcili bu fiqur üzərində götürülmüş ixtiyari qütbün təcili ilə fiqurun qütb ətrafında fırlanmasında həmin nöqtənin aldığı təcilin həndəsi cəminə bərabərdir.

Teoremin riyazi ifadəsi:

$$\overline{W}_A = \overline{W}_{O'} + \overline{W}_{AO'}.$$

Burada $\overline{W}_A$ – fiqurun hər hansı A nöqtəsinin təcili; $\overline{W}_{O'}$ – fiqur üzərində götürülmüş ixtiyari O' qütbünün təcili; $\overline{W}_{AO'}$ – fiqurun O' qütbü ətrafında fırlanmasında onun A nöqtəsinin aldığı təcildir.

İsbatı. Məlumdur ki, yastı fiqurun ixtiyari A nöqtəsinin sürətini belə ifadə etmək olar:

$$\overline{V}_A = \overline{V}_{O'} + \overline{V}_{AO'}, \quad (1)$$

burada $\overline{V}_{O'}$ – fiqur üzərində götürülmüş ixtiyari O' qütbünün sürəti; $\overline{V}_{AO'}$ – fiqurun O' qütbü ətrafında fırlanmasında onun A nöqtəsinin aldığı sürət.

(1) ifadəsindən zamana görə törəmə alaıq:

$$\frac{d\overline{V}_A}{dt} = \frac{d\overline{V}_{O'}}{dt} + \frac{d\overline{V}_{AO'}}{dt}, \quad (2)$$

burada

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\overline{V}_A}{dt} &= \overline{W}_A, & \frac{d\overline{V}_{O'}}{dt} &= \overline{W}_{O'}, & \frac{d\overline{V}_{AO'}}{dt} &= \overline{W}_{AO'} \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

(3) ifadələrini (2) - də yerinə yazaq:

$$\overline{W}_A = \overline{W}_{O'} + \overline{W}_{AO'} . \quad (4)$$

Teorem isbat olundu.

$\overline{W}_{AO'}$ fırlanma hərəkətində yaranan təcil olduğundan bu bərabərliyi yazmaq olar:

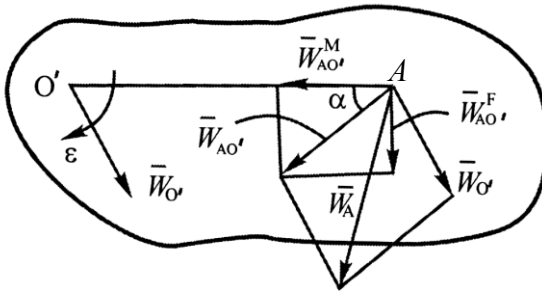
$$\overline{W}_{AO'} = \overline{W}_{AO'}^F + \overline{W}_{AO'}^M , \quad (5)$$

burada $\overline{W}_{AO'}^F$ və $\overline{W}_{AO'}^M$ – fiqurun O' qütbü ətrafında fırlanmasında onun A nöqtəsinin aldığı fırlanma və mərkəzə doğru yönəlmə təcilləridir. Mərkəzə doğru yönəlmə təcili əslində O' qütbündən keçərək yastı fiqur müstəvisinə perpendikulyar yönəlmiş oxa doğru yönəlmə təcilidir.

(5)-i (4) düsturunda yerinə yazsaq alarıq:

$$\overline{W}_A = \overline{W}_{O'} + \overline{W}_{AO'}^F + \overline{W}_{AO'}^M . \quad (6)$$

Şək. 2.25-də (6) vektorial ifadəsinin qrafiki təsviri göstərilmişdir.



Şək. 2.25

$\overline{W}_{AO'}^F$, $\overline{W}_{AO'}^M$ və $\overline{W}_{AO'}$ təcillərinin modulları bu ifadələrdən tapılır:

$$W_{AO'}^F = \varepsilon \cdot AO', \quad W_{AO'}^M = \omega^2 \cdot AO', \quad \} \quad (7)$$

$$W_{AO'} = AO' \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (8)$$

α bucağı isə belə təyin edilir:

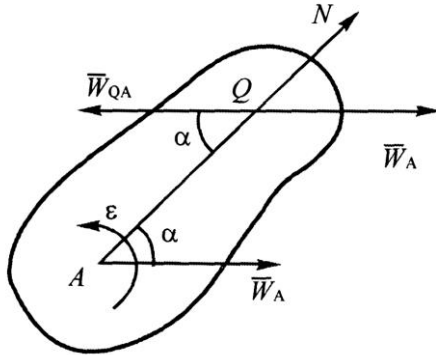
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{W_{AO'}^F}{W_{AO'}^M} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (9)$$

ε və ω kəmiyyətləri bütün fiqur üçün eyni qiymətlərə malik olduqlarından α bucağı da fiqurun bütün nöqtələri üçün eyni qiymətə malik olur.

2.18. Yastı fiqurun ani təcillər mərkəzi

Ani təcillər mərkəzi yastı fiqurun elə nöqtəsinə deyilir ki, baxılan anda həmin nöqtənin təcili sıfıra bərabər olur. Yastı fiqurun ani təcillər mərkəzinin mövcud olduğunu isbat edək. Fərz edək ki, yastı fiqurun baxılan andakı bucaq sürəti ω , bucaq təcili ε və onun hər hansı A nöqtəsinin təcili $\overline{W}_A$ verilmişdir (şək.2.26). Əvvəlcə $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ ifadəsindən α bucağını tapırıq. Sonra $\overline{W}_A$ ilə α bucağı təşkil edən AN düz xəttini çəkirik. α bucağı $\overline{W}_A$ vektorundan başlayaraq bucaq təcili ε – un istiqamətində ayrılır. AN düz xəttinin üzərində elə bir Q nöqtəsi götürürük ki, onun vəziyyəti bu şərti ödəsin:

$$AQ = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (1)$$



Şək. 2.26

A nöqtəsini qütb qəbul edərək Q nöqtəsinin təcilini belə ifadə edə bilərik:

$$\overline{W}_Q = \overline{W}_A + \overline{W}_{QA}. \quad (2)$$

Burada $\overline{W}_{QA}$ - yastı fiqurun A qütbü ətrafında fırlanmasında onun Q nöqtəsinin aldığı təcildir. Fırlanma hərəkətinin kinematikasından məlumdur ki, bu təcilin modulu

$$W_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3)$$

(1)- dən

$$W_A = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (4)$$

Sonuncu ifadələrə görə $W_{QA} = W_A$. Digər tərəfdən $\overline{W}_{QA}$ vektoru da AN düz xətti ilə α bucağı əmələ gətirir. Bu halda modulları bərabər olan $\overline{W}_{QA}$ və $\overline{W}_A$ vektorları bir-birinə paralel olaraq əks tərəflərə yönəldirlər. Onda yazı bilərik:

$$\overline{W}_{QA} = -\overline{W}_A. \quad (5)$$

Bu ifadəni (2)-də yerinə yazsaq alırıq:

$$\overline{W}_Q = \overline{W}_A - \overline{W}_A = 0. \quad (6)$$

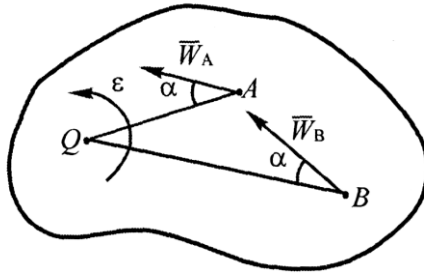
Bununla da Q nöqtəsinin baxılan halda yastı fiqurun ani təcillər mərkəzi olduğu isbat olunur.

Q nöqtəsinə qütb qəbul edərək yastı fiqurun ixtiyari B nöqtəsinin təcilini belə təyin etmək olar:

$$\overline{W}_B = \overline{W}_Q + \overline{W}_{BQ}. \quad (7)$$

$\overline{W}_Q = 0$ olduğu üçün $\overline{W}_B = \overline{W}_{BQ}$ bərabərliyini alırıq. Onda $W_B = W_{BQ} = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ olar. Analoci olaraq $\overline{W}_C = \overline{W}_{CQ} = CQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, $W_D = W_{DQ} = DQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ və s. yazı bilərik. Yazdıqlarımızdan görünür ki, yastı fiqurun nöqtələrinin təcillərinin modulu bu nöqtələrin ani təcillər mərkəzindən olan məsafələri ilə düz mütənasibdir.

Yastı fiqurun ani təcillər mərkəzinin vəziyyətini təyin etmək üçün onun hər hansı iki nöqtəsinin təcil vektorlarının istiqamətini və $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ bərabərliyindən tapılan α bucağının qiymətini bilmək kifayətdir. Həmin nöqtələrdən keçən və onların təcil vektorları ilə α bucağı təşkil edən (α bucağı

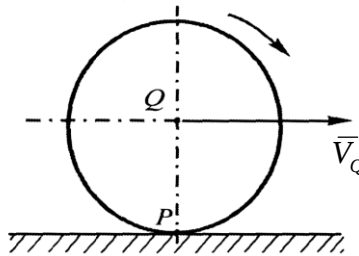


Şək. 2.27

təcil vektorundan bucaq təcili ε –nun istiqamətinə uyğun olaraq ayrılır) düz xətlərin kəsişmə nöqtəsi Q ani təcillər mərkəzi olacaqdır (şək. 2.27).

Qeyd edək ki, ümumi halda yastı fiqurun ani təcillər mərkəzi onun ani sürətlər mərkəzi ilə üst-üstə düşmür.

Misal olaraq düz yolla sürüşmədən müntəzəm diyərlənən təkərin hərəkətini nəzərdən keçirək (şək.2.28).



Şək.2.28

Təkərin yola toxunan P nöqtəsi sürüşmədiyinə görə $V_P = 0$. Deməli P nöqtəsi təkərin P ani sürətlər mərkəzidir.

$\overline{V}_Q = \overline{const}$ olduğu üçün $\overline{W}_Q = \frac{d\overline{V}_Q}{dt} = 0$. Bu halda Q nöqtəsi təkərin ani təcillər mərkəzi olur.

2.19. Nöqtənin mürəkkəb hərəkəti

Nöqtənin mürəkkəb hərəkəti elə hərəkətə deyilir ki, bu vaxt o eyni zamanda iki, yaxud daha çox hərəkətdə iştirak edir. Biz nöqtənin ancaq iki hərəkətdə iştirak etdiyi halı nəzərdən keçirəcəyik. Mürəkkəb hərəkətə misal olaraq üzən gəminin göyertəsində, yaxud gedən qatarda adamın hərəkətini göstərmək olar.

Mürəkkəb hərəkəti öyrənmək üçün bu cür hərəkət formalarından istifadə edirlər: mütləq hərəkət, nisbi hərəkət və köçürmə hərəkəti.

Fərz edək ki, baxılan nöqtə verilmiş koordinat sisteminə nəzərən, bu sistem isə öz növbəsində tərpənməz koordinat sisteminə nəzərən hərəkət edir.

Nöqtənin tərpənməz sistemə nəzərən hərəkəti mütləq hərəkət, tərpənən sistemə nəzərən hərəkəti isə nisbi hərəkət adlanır. Nöqtənin köçürmə hərəkəti tərpənən sistemin baxılan anda bu nöqtə ilə üst-üstə düşən nöqtəsinin tərpənməz sistemə nəzərən hərəkətinə deyilir. Tərpənən sistemin bütövlükdə tərpənməz sistemə nəzərən hərəkətini də köçürmə hərəkəti adlandırırlar.

Nöqtənin mütləq, nisbi və köçürmə hərəkətlərindəki sürət və təcilləri uyğun olaraq mütləq sürət, mütləq təcil, nisbi sürət, nisbi təcil, köçürmə sürəti və köçürmə təcili adlanır.

2.20. Mürəkkəb hərəkət edən nöqtənin mütləq sürəti

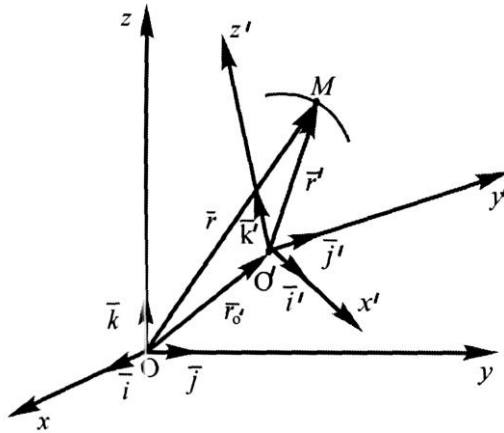
Teorem. Mürəkkəb hərəkət edən nöqtənin mütləq sürəti onun köçürmə və nisbi sürətlərinin həndəsi cəminə bərabərdir.

Teoremin riyazi ifadəsi:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

Burada $\bar{V}_a$ – nöqtənin mütləq sürəti; $\bar{V}_e$ – nöqtənin köçürmə sürəti; $\bar{V}_r$ – nöqtənin nisbi sürətidir.

İsbatı. Fərz edək ki, baxılan M nöqtəsi tərpənən $O'x'y'z'$ sisteminə nəzərən, bu sistem isə tərpənməz $Oxyz$ sisteminə nəzərən hərəkət edir (şək. 2.29).



Şək.2.29

M nöqtəsinin tərpənməz O başlanğıcına nəzərən radius-vektoru

$$\bar{r} = \bar{r}_{O'} + \bar{r}', \quad (1)$$

burada $\bar{r}_{O'}$ – tərpənən O' başlanğıcının tərpənməz O başlanğıcına nəzərən radius-vektoru; $\bar{r}'$ – baxılan M nöqtəsinin O' başlanğıcına nəzərən nisbi radius-vektordur. Bu radius-vektoru belə ifadə etmək olar:

$$\bar{r}' = \bar{i}'x' + \bar{j}'y' + \bar{k}'z', \quad (2)$$

burada $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ – tərpənən sistemin koordinat oxlarının vahid vektorları; x', y', z' – M nöqtəsinin tərpənən sistemdəki koordinatlarıdır. Sonuncu ifadəni (1)- də nəzərə alaq:

$$\bar{r}' = \bar{r}_{O'} + \bar{i}'x' + \bar{j}'y' + \bar{k}'z'. \quad (3)$$

Əgər x', y' və z' kəmiyyətlərini sabit hesab edərək (3) ifadəsindən zamana görə törəmə alsaq M nöqtəsinin köçürmə sürətini taparıq:

$$\bar{V}_e = \frac{d\bar{r}_{O'}}{dt} + x' \frac{d\bar{i}'}{dt} + y' \frac{d\bar{j}'}{dt} + z' \frac{d\bar{k}'}{dt}. \quad (4)$$

Əgər $\bar{r}_{O'}, \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ vektorlarını həm qiymət, həm də istiqamətcə sabit hesab edərək (3) ifadəsindən zamana görə törəmə alsaq M nöqtəsinin nisbi sürətini taparıq:

$$\bar{V}_r = \bar{i}' \frac{dx'}{dt} + \bar{j}' \frac{dy'}{dt} + \bar{k}' \frac{dz'}{dt}. \quad (5)$$

(3) ifadəsinə daxil olan kəmiyyətlərin hamısını dəyişən hesab edərək ondan zamana görə törəmə alsaq M nöqtəsinin mütləq sürətini təyin edirik:

$$\begin{aligned} \bar{V}_a = & \frac{d\bar{r}_{O'}}{dt} + x' \frac{d\bar{i}'}{dt} + y' \frac{d\bar{j}'}{dt} + z' \frac{d\bar{k}'}{dt} + \\ & + \bar{i}' \frac{dx'}{dt} + \bar{j}' \frac{dy'}{dt} + \bar{k}' \frac{dz'}{dt}. \end{aligned} \quad (6)$$

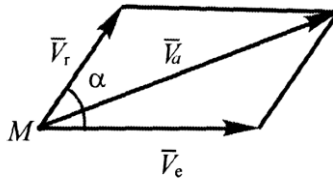
(4) və (5) düsturlarını (6) bərabərliyində nəzərə alsaq əldə edərik:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r. \quad (7)$$

Teorem isbat olundu. (7) ifadəsinə əsasən sürətlər paraleloqramını qurmaq olar (şək. 2.30).

M nöqtəsinin mütləq sürətinin modulu

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos \alpha}, \quad (8)$$



Şək. 2.30

burada α – nöqtənin köçürmə və nisbi sürət vektorları arasındakı bucaqdır.

2.21. Mürəkkəb hərəkət edən nöqtənin mütləq təcili

Teorem. Mürəkkəb hərəkət edən nöqtənin mütləq təcili ümumi halda onun köçürmə, nisbi və Koriolis təcillərinin həndəsi cəminə bərabərdir.

Bu teoremə Koriolis teoremi də deyirlər (Qustov Koriolis XIX əsr fransız alimidir).

Teoremin riyazi ifadəsi:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_k.$$

Burada $\overline{W}_a, \overline{W}_e, \overline{W}_r$ və $\overline{W}_k$ – uyğun olaraq nöqtənin mütləq, köçürmə, nisbi və Koriolis təciləridir.

Koriolis təcili $\overline{W}_k = 2(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r)$. Burada $\overline{\omega}_e$ – tərpənən sistemin bucaq sürəti (köçürmə hərəkətindəki bucaq sürəti); $\overline{V}_r$ – baxılan nöqtənin nisbi sürətidir.

Teoremin isbatı. Məlumdur ki, nöqtənin mürəkkəb hərəkətində onun köçürmə, nisbi və mütləq sürətləri belə ifadə olunur:

$$\overline{V}_e = \frac{d \bar{r}_{O'}}{dt} + x' \frac{d \bar{i}'}{dt} + y' \frac{d \bar{j}'}{dt} + z' \frac{d \bar{k}'}{dt}, \quad (1)$$

$$\overline{V}_r = \bar{i}' \frac{d x'}{dt} + \bar{j}' \frac{d y'}{dt} + \bar{k}' \frac{d z'}{dt}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \overline{V}_a = & \frac{d \bar{r}_{O'}}{dt} + x' \frac{d \bar{i}'}{dt} + y' \frac{d \bar{j}'}{dt} + z' \frac{d \bar{k}'}{dt} + \\ & + \bar{i}' \frac{d x'}{dt} + \bar{j}' \frac{d y'}{dt} + \bar{k}' \frac{d z'}{dt}. \end{aligned} \quad (3)$$

Nöqtənin mütləq təcilini tapmaq üçün (3) bərabərliyinə daxil olan kəmiyyətlərin hamısını dəyişən hesab edərək ondan zamana görə törəmə almaq lazımdır:

$$\begin{aligned} \overline{W}_a = \frac{d \overline{V}_a}{dt} = & \frac{d^2 \bar{r}_{O'}}{dt^2} + \frac{d x'}{dt} \frac{d \bar{i}'}{dt} + \frac{d y'}{dt} \frac{d \bar{j}'}{dt} + \frac{d z'}{dt} \frac{d \bar{k}'}{dt} + \\ & + x' \frac{d^2 \bar{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \bar{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \bar{k}'}{dt^2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{d\bar{i}'}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{d\bar{j}'}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{d\bar{k}'}{dt} \frac{dz'}{dt} + \bar{i}' \frac{d^2 x'}{dt^2} + \bar{j}' \frac{d^2 y'}{dt^2} + \bar{k}' \frac{d^2 z'}{dt^2}. \quad (4)$$

(4) ifadəsini sadələşdirib bu şəkildə də yazmaq olar:

$$\begin{aligned} \bar{W}_a = & \left(\frac{d^2 \bar{r}_{O'}}{dt^2} + x' \frac{d^2 \bar{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \bar{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \bar{k}'}{dt^2} \right) + \\ & + \left(\bar{i}' \frac{d^2 x'}{dt^2} + \bar{j}' \frac{d^2 y'}{dt^2} + \bar{k}' \frac{d^2 z'}{dt^2} \right) + \\ & + 2 \left(\frac{dx'}{dt} \frac{d\bar{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\bar{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\bar{k}'}{dt} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

(5) bərabərliyinin sağ tərəfində mütərizəyə alınmış birinci ifadə nöqtənin köçürmə təcilinə bərabərdir, çünki bu ifadəni x', y' və z' – i sabit hesab edərək $\bar{V}_e$ – ni təyin edən (1) bərabərliyinin sağ tərəfindən zamana görə törəmə almaqla əldə etmək olar. Beləliklə,

$$\frac{d^2 \bar{r}_{O'}}{dt^2} + x' \frac{d^2 \bar{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \bar{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \bar{k}'}{dt^2} = \bar{W}_e. \quad (6)$$

(5) bərabərliyinin sağ tərəfində mütərizəyə alınmış ikinci ifadə nöqtənin nisbi təcilinə bərabərdir, çünki bu ifadəni $\bar{i}', \bar{j}'$ və $\bar{k}'$ – i sabit hesab edərək $\bar{V}_r$ – i təyin edən (2) bərabərliyinin sağ tərəfindən zamana görə törəmə almaqla əldə edə bilərik. Deməli,

$$\bar{i}' \frac{d^2 x'}{dt^2} + \bar{j}' \frac{d^2 y'}{dt^2} + \bar{k}' \frac{d^2 z'}{dt^2} = \bar{W}_r. \quad (7)$$

İndi (5) bərabərliyinin sağ tərəfində mütərizəyə alınmış üçüncü ifadəni araşdıraraq.

Məlumdur ki, $\bar{i}', \bar{j}'$ və $\bar{k}'$ -i modulca sabit (vahidə bərabər) vektorlardır. $\frac{d\bar{i}'}{dt}$ törəməsi isə tərpənən sistemin O' qütbü ətrafında fırlanmasında $\bar{i}'$ vahid vektorunun sonunun aldığı sürətdir. Onda, deyilənləri $\bar{j}'$ və $\bar{k}'$ vahid vektorlarına da aid edib yaza bilərik:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{i}'}{dt} &= \bar{\omega}_e \times \bar{i}', & \frac{d\bar{j}'}{dt} &= \bar{\omega}_e \times \bar{j}', & \frac{d\bar{k}'}{dt} &= \bar{\omega}_e \times \bar{k}'. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Deməli

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} \frac{d\bar{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\bar{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\bar{k}'}{dt} &= \frac{dx'}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{i}') + \\ &+ \frac{dy'}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{j}') + \frac{dz'}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{k}') = \\ &= \bar{\omega}_e \times \left(\bar{i}' \frac{dx'}{dt} + \bar{j}' \frac{dy'}{dt} + \bar{k}' \frac{dz'}{dt} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

(2)- ni (9)- da yerinə yazaq:

$$\frac{dx'}{dt} \frac{d\bar{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\bar{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\bar{k}'}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{V}_r. \quad (10)$$

(6), (7) və (10) ifadələrini (5)-də nəzərə alaraq tapırıq:

$$\bar{W}_a = \bar{W}_e + \bar{W}_r + 2(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r). \quad (11)$$

İşarə edək:

$$2(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r) = \bar{W}_k. \quad (12)$$

Nəticədə alırıq:

$$\overline{W}_a = \overline{W}_e + \overline{W}_r + \overline{W}_k. \quad (13)$$

Teorem isbat olundu.

Koriolis təcilinin modulu

$$W_k = 2\omega_e V_r \sin(\overline{\omega}_e, \overline{V}_r). \quad (14)$$

Koriolis təcili bu hallarda sıfıra bərabər olar: 1) Tərpənən sistem irəliləmə hərəkəti etdikdə. Bu halda $\omega_e = 0$ olduğundan $W_k = 0$ alınar; 2) ω_e və $\overline{V}_r$ vektorları bir-birinə paralel olduqda. Bu halda $\sin(\overline{\omega}_e, \overline{V}_r) = 0$ olduğuna görə $W_k = 0$ olar.

Koriolis təcilinin istiqamətini təyin etmək üçün əvvəlcə $\overline{\omega}_e$ vektorunu özünə paralel olaraq baxılan nöqtəyə köçürürük. $\overline{W}_k$ vektoru $\overline{\omega}_e$ və $\overline{V}_r$ vektorları yerləşən müstəviyə perpendikulyar olaraq elə yönəlir ki, onun ucundan baxdıqda $\overline{\omega}_e$ vektorunun $\overline{V}_r$ vektorunun üzərinə düşənədək qısa yolla (kiçik bucaqla) dönməsi saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində baş versin.