N.A. NƏSİBOV, Z.Ş. ŞAYEV

NƏZƏRİ MEXANİKADAN MÜHAZİRƏLƏR

Ali texniki məktəblərin bakalavr pilləsi üçün

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin 24.12.2012-ci il tarixli 2330 saylı əmri ilə dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir.

BAKI – 2013

UOT 531.01

Elmi redaktor : professor **K.Ə. Əliyev** (AzMİU)

Rəyçilər : professor **S.Ə. Quliyev** (AzMİU)
professor **V.İ. Baxşəliyev** (AzTU)
dosent **İ.X. İbrahimov** (ADNA)
dosent **V.Ə. Şirəliyev** (AzTU)

N.A. Nəsibov, З.Ш. Шайев. Nəzəri mexanikaдан mühazirələr. Dərs vəsaiti. Bakı. 2013. 212 c.

Dərs vəsaitində ali texniki məktəblərin nəzəri mexanika fənni üzrə tədris proqramlarında nəzərdə tutulan əsas mövzular öz əksini tapmışdır. Fənnin statika, kinematika və dinamika bölmələrinin hər üçü əhatə olunmuşdur.

Dərs vəsaiti bakalavr pilləsində təhsil alan tələbələr üçün yazılsa da o, magistrantlar, elmi və mühəndis–texniki işçilər üçün də faydalı ola bilər.

G İ R İ Ş

Nəzəri mexanikanın predmeti və əsas anlayişları

Nəzəri mexanika cisimlərin mexaniki hərəkətinin və müvazinətinin ümumi qanunlarını öyrənən bir elmdir. Mexaniki hərəkət dedikdə cisimlərin fəzada müəyyən zaman ərzində baş verən qarşılıqlı yerdəyişmələri nəzərdə tutulur. Eyni bir cismin öz hissəcikləri arasında baş verən qarşılıqlı yerdəyişmələr də mexaniki hərəkətdir.

Mexaniki hərəkətdən əlavə istilik, elektromaqnit, kimyəvi və s. kimi hərəkət növləri də məlumdur. Fikirləşmə prosesi özü də hərəkətdir. Ancaq bu hərəkət növləri digər elmlər tərəfindən öyrənilir.

Nəzəri mexanikanın öyrənilməsi zərurəti müasir texnikanın inkişafının tələblərindən irəli gəlir. Müxtəlif qurğuların və maşınların nəzəriyyəsi və hesablanması ilə məşğul olan bir sıra fənnlər, məsələn, materiallar müqaviməti, maşın hissələri, maşın və mexanizmlər nəzəriyyəsi, inşaat mexanikası və s., nəzəri mexanikanın müddəalarına əsaslanır.

Mexanikanın banisi qədim yunan alimi Arximed (bizim eradan əvvəl üçüncü əsr) hesab olunur. Mexanikanın əsas qanunlarının müəyyən olunmasında isə dahi ingilis alimi Nyuton (1643-1727) müstəsna rol oynamışdır. Nəzəri mexanika Qaliley, Laqranj, Dalamber, Eyler, Lyapunov, Meşşerski və digər alimlər tərəfindən də inkişaf etdirilmişdir.

Müasir nəzəri mexanika kursu üç bölmədən ibarətdir: statika, kinematika və dinamika. Statikada əsas etibarilə cisimlərin müvazinət şərtləri nəzərdən keçirilir. Kinematikada cisimlərin hərəkəti həndəsi cəhətdən, yəni təsir edən qüvvələr nəzərə alınmadan, dinamikada isə təsir edən qüvvələr də nəzərə alınmaqla öyrənilir.

Mexaniki hərəkətin ümumi qanunlarının öyrənilməsində bir sıra sadələşdirmələrdən, hadisələrin sxematikləşdirilməsindən və mücərrəd modellərdən istifadə olunur. Bu cür yanaşma aparılan tədqiqatları son dərəcədə sadələşdirir. Dediyimiz mücərrəd modellərə misal olaraq maddi nöqtə və mütləq bərk cisim anlayışlarını göstərmək olar.

Maddi nöqtə elə cismə deyilir ki, verilmiş məsələnin şərtləri daxilində onun ölçülərini nəzərdən atmaq olar. Maddi nöqtənin kütləsi bir nöqtədə toplanmış hesab edilir. Bəzən çox böyük ölçüləri olan cismə də maddi nöqtə kimi baxmaq olur. Məsələn, çox vaxt Yer kürəsinə onun Günəş ətrafında hərəkətini öyrənərkən maddi nöqtə kimi baxırlar.

Bir-birilə müəyyən şərtlərlə bağlı olan maddi nöqtələr yığımı maddi sistem, yaxud maddi nöqtələr sistemi adlanır. Maddi sistemə çox vaxt sadəcə olaraq sistem deyirlər.

Mütləq bərk cisim elə cismə deyilir ki, onun hissəcikləri arasındakı məsafələr heç bir şərt daxilində dəyişmir. Nəzəri mexanikada mütləq bərk cismə çox vaxt sadəcə olaraq bərk cisim deyirlər.

Maddi nöqtənin yaxud cismin istənilən hərəkətini ancaq başqa bir cismə nəzərən müşahidə etmək və öyrənmək olar. Dediyimiz həmin ikinci cisimlə bağlı olan koordinat sisteminə hesabaparma sistemi deyilir.

Əgər baxılan sistemə nəzərən klassik mexanika qanunları öz doğruluğunu saxlayırsa, o, inersial hesabaparma sistemi adlanır. Təcrübə göstərir ki, texniki hesablamaların çoxunda Yerlə bağlı olan hesabaparma sistemini kifayət qədər böyük dəqiqliklə inersial sistem saymaq olar.

Klassik mexanikada mütləq məkan və mütləq zaman anlayışlarından istifadə edilir. Hesab olunur ki, bu anlayışlar bir-birindən və materiyanın hərəkətindən asılı deyillər. Belə yanaşma adi texniki hesablamalarda özünü tamamilə doğruldur, işıq sürətinə yaxın sürətlərdə isə doğrultmur. Sonuncu halda Eynşteynin nisbilik nəzəriyyəsindən istifadə etmək lazım gəlir. Mikrohissəciklərin (elektronların, protonların, neytronların və s.) hərəkəti isə kvant mexanikasının qanunlarına tabe olur. Deyilənlər klassik mexanikanın qanunlarını rədd etmir, sadəcə olaraq onların tətbiq sahəsini dəqiqləşdirir.

I. STATİKA

1.1. Statikaya giriş

Statika nəzəri mexanikanın elə bir bölməsidir ki, burada verilmiş qüvvələr sisteminin ekvivalent sistemlə əvəz olunma qaydaları və bərk cismə tətbiq edilmiş qüvvələrin müvazinət şərtləri öyrənilir.

Statikanın ən əsas anlayışı qüvvə anlayışıdır.

Qüvvə maddi cisimlərin qarşılıqlı mexaniki təsir ölçüsüdür. Qüvvənin təsiri nəticəsində sərbəst cismin kinematik vəziyyətində dəyişiklik əmələ gəlir.

Qüvvə özünün üç elementi ilə təyin edilir: modulu (ədədi qiyməti), istiqaməti və tətbiq nöqtəsi. Dediklərimizdən görünür ki, qüvvə vektorial kəmiyyətdir.

Qüvvənin təsir xətti elə düz xəttə deyilir ki, həmin qüvvə bu düz xətt boyunca yönəlir.

Verilmiş cismə, yaxud cisimlər sisteminə tətbiq olunmuş qüvvələr yığımına qüvvələr sistemi deyilir.

Əgər baxılan cisim müxtəlif qüvvələr sisteminin ayrı-ayrılıqda təsiri nəticəsində eyni cür kinematik vəziyyət alırsa bu qüvvələr sistemi bir-birinə ekvivalent sistemlər sayılır.

Verilmiş qüvvələr sisteminə ekvivalent olan bir qüvvə bu qüvvələr sisteminin əvəzləyicisi adlanır.

Əgər verilmiş qüvvələr sisteminin təsiri altında bərk cisim seçilmiş inersial sistemə nəzərən sükunətdə qalarsa, yaxud bərabərsürətli düzxətli hərəkət edərsə, o, müvazinətdə olan cisim hesab olunar. Dediyimiz hərəkətdə cismin hər bir nöqtəsi bərabərsürətli düzxətli hərəkət etməlidir. Müvazinətdə olan cismə tətbiq olunmuş qüvvələr sistemi müvazinətləşmiş, yaxud sıfra ekvivalent sistem adlanır.

Müvazinətdə olan qüvvələr sisteminin hər hansı bir qüvvəsi bu sistemin digər qüvvələrinə nəzərən müvazinətləşdirici qüvvə sayılır.

Cismin ancaq bir nöqtəsinə tətbiq olunmuş qüvvə topa qüvvə adlanır.

Cismin həcminin, yaxud səthinin, yaxud da onların bir hissəsinin bütün nöqtələrinə tətbiq olunmuş qüvvələrə səpələnmiş qüvvələr deyilir.

1.2. Статиканын аксиомлары

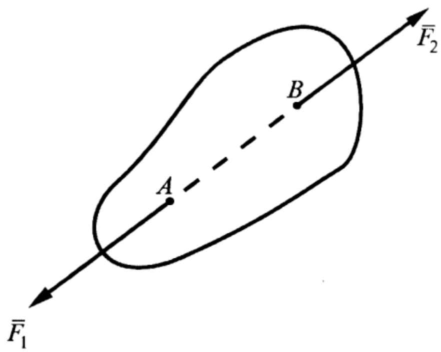
Nəzəri mexanikanın statika bölməsi müəyyən aksiomlara (isbatsız qəbul olunan müddəalara) əsaslanır. Bu aksiomlar aşağıdakılardır.

I aksiom. Hər hansı iki qüvvənin müvazinətdə olması üçün bu qüvvələrin modulca bir-birinə bərabər olub, bir düz xətt boyunca əks tərəflərə yönəlmələri zəruri və kafidir.

Fərz edək ki, baxılan cismə qiymətcə bir-birinə bərabər olub bir düz xətt boyunca əks tərəflərə yönəlmiş $\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələri tətbiq olunmuşdur (şək.1.1). Dediklərimizə əsasən yaza bilərik:

$$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2 . \quad (1)$$

Birinci aksioma görə $\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələri müvazinətləşmiş (yəni sıfra ekvivalent) qüvvələr sistemi təşkil edir.

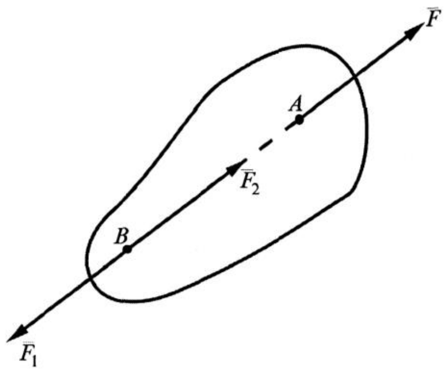


Şək.1.1

II aksiom. Əgər verilmiş qüvvələr sisteminə müvazinətləşmiş sistem əlavə etsək və ya ondan belə bir sistemi çıxsaq, bununla həmin qüvvələr sisteminin mütləq bərk cismə olan təsiri dəyişməz

Nəticə. Mütləq bərk cismə tətbiq olunmuş qüvvənin tətbiq nöqtəsini onun təsir xətti boyunca istənilən yerə köçürsək, bununla bu qüvvənin həmin cismə olan təsiri dəyişməz.

Nəticənin isbatı. Fərz edək ki, baxılan cismə onun A nöqtəsində tətbiq olunmuş $\overline{F}$ qüvvəsi təsir edir (şək. 1.2). $\overline{F}$ qüvvəsinin təsir xətti üzərində yerləşən ixtiyari B nöqtəsində həmin xətt boyunca əks tərəflərə yönələn və modulca F-ə bərabər olan $\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələrini bu cismə tətbiq edək.



Şək.1.2

Beləliklə,

$$F_1 = F_2 = F. \qquad (2)$$

$\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələri müvazinətləşmiş sistem təşkil etdikləri üçün ikinci aksioma görə onlaın baxılan cismə tətbiqi heç nəyi dəyişmir. Yəni,

$$(\overline{F}, \overline{F}_1, \overline{F}_2) \sim \overline{F}\ . \qquad (3)$$

Baxılan halda $\overline{F}_1 = -\overline{F}$, yaxud $\overline{F}_1 + \overline{F} = 0$. Deməli

$$(\overline{F}_1, \overline{F}) \sim 0. \qquad (4)$$

İkinci aksioma əsaslanaraq (4) şərtini (3) – də nəzərə alsaq əldə edərik:

$$\overline{F}_2 \sim \overline{F} \qquad 5)$$

Bununla da nəticə isbat olundu.

Baxılan nəticəni nəzərə alaraq iddia etmək olar ki, mütləq bərk cismə tətbiq olunmuş qüvvə sürüşkən vektordur.

III aksiom (paraleloqram qaydası). Təsir xətləri kəsişən iki qüvvənin əvəzləyicisi bu xətlərin kəsişmə nöqtəsində tətbiq olunub həmin qüvvələr üzərində qurulmuş paraleloqramın diaqonalı ilə təsvir oluna bilər.

Fərz edək ki, verilmiş $\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələrinin təsir xətləri *A* nöqtəsində kəsişir. İkinci aksiomdan çıxan nəticədən istifadə edərək bu qüvvələrin tətbiq nöqtələrini *A* nöqtəsinə köçürüb bir nöqtədə tətbiq olunmuş iki qüvvə alarıq (şək.1.3). Bu qüvvələr üzərində paraleloqram quraraq onun dioqanalını çəkək. Bu diaqonalla təsvir olunan $\overline{R}$ qüvvəsi üçüncü aksioma görə $\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələrinin əvəzləyicisi olacaqdır.

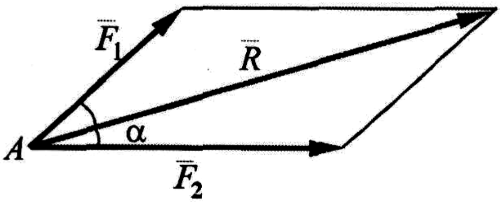
$\overline{R}$ qüvvəsi $\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələrinin həndəsi cəminə bərabərdir:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 . \qquad (6)$$

Əvəzləyici qüvvənin modulu

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}\ . \qquad (7)$$

Burada α $\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələri arasında qalan bucaqdır.



Şək.1.3

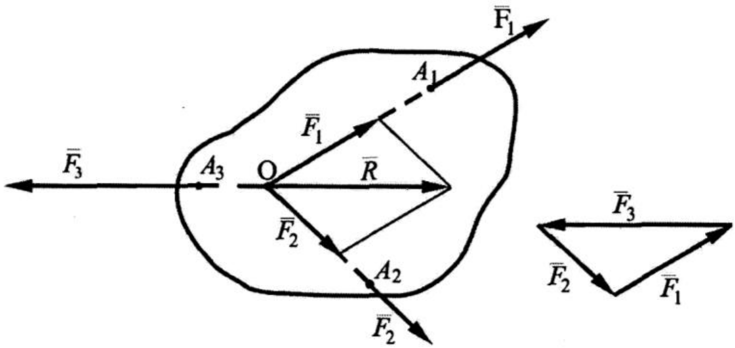
IV aksiom (təsirin əks təsirə bərabərliyi qanunu). Hər hansı iki cisim bir- birinə modulca bərabər olub bir düz xətt boyunca əks tərəflərə yönəlmiş qüvvələrlə təsir edir.

V aksiom (bərkimə prinsipi). Verilmiş qüvvələr sisteminin təsiri altında deformasiya olunaraq müvazinətdə qalan cismi mütləq bərk cisim hesab etsək (yəni cismi bərkimiş saysaq) bununla onun müvazinət halı pozulmaz.

1.3. Паралел олмайан цч гцввянин мцвазиняти щаггында теорем

Teorem. Bir-birinə paralel olmayan və bir müstəvi üzərində yerləşən müvazinətləşmiş üç qüvvənin təsir xətləri bir nöqtədə kəsişir.

İsbatı. Fərz edək ki, müvazinətləşmiş $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ qüvvələri bir müstəvi üzərində yerləşirlər və bir-birinə paralel deyillər (şək.1.4). $\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələrinin təsir xətlərini uzadaraq onların O kəsişmə nöqtəsini tapırıq. Bu iki qüvvəni öz təsir xətləri boyunca sürüşdürərək onları O nöqtəsində tətbiq edirik. Sonra $\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələri üzərində paraleloqram quraraq



Şək.1.4

onların $\overline{R}$ əvəzləyicisi tapırıq. $\overline{R}$ və $\overline{F}_3$ qüvvələri müvazinətləşmiş sistem təşkil etməlidir. Birinci aksioma görə bu o vaxt ola bilər ki, $\overline{F}_3$-ün təsir xətti $\overline{R}$–in təsir xətti ilə üst–üstə düşsün, yəni O nöqtəsindən keçsin. Onda $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ və $\overline{F}_3$ qüvvələrinin hər üçünün təsir xətti O nöqtəsindən keçmiş olar. Bununla da teorem isbat olunur.

Qeyd edək ki, teoremdə göstərilən şərt (qüvvələrin təsir xətlərinin bir nöqtədə kəsişməsi) paralel olmayan üç qüvvənin müvazinətdə olması üçün zəruridir, amma kafi deyildir. Kafilik şərtini müəyyən edək. Birinci aksioma görə $\overline{R} = -\overline{F}_3$. $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$ olduğu üçün nəticədə $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = -\overline{F}_3$, yaxud

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = 0 \qquad (1)$$

bərabərliyini alarıq. (1) şərtinə görə paralel olmayan üç qüvvənin müvazinətdə olması üçün onların həndəsi cəmi sıfra bərabər olmalıdır (təsir xətlərinin bir nöqtədə kəsişməsindən əlavə), yəni onlar üzərində qurulmuş qüvvələr üçbucağı qapanmalıdır (kafilik şərti). Deyilən qüvvələr üçbucağı şək.1.4–də ayrıca göstərilmişdir.

1.4. Рабитяляр вя онларын реаксийа гцввяляри

Əgər bərk cisim fəzada istənilən istiqamətdə yerdəyişmə ala bilərsə o, sərbəst cisim adlanır. Əgər bərk cismin fəzada hər hansı yerdəyişməsinə başqa cisim, yaxud cisimlər mane olursa o, qeyri–sərbəst cisim sayılır.

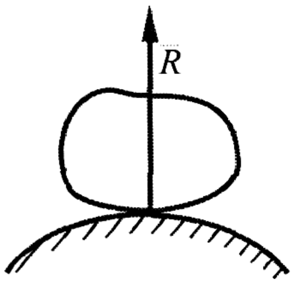
Verilmiş cismin yerdəyişmələrini məhdudlaşdıran səbəblərə rabitələr deyilir. Statikada rast gəlinən rabitələr adətən maddi cisimlər vasitəsilə həyata keçirilir. Rabitənin baxılan cismə göstərdiyi mexaniki təsirə bu rabitənin reaksiya qüvvəsi, yaxud sadəcə olaraq reaksiyası deyilir. Reaksiya qüvvəsi həmişə rabitənin cismin yerdəyişməsinə imkan vermədiyi istiqamətin əksinə yönəlir. Rabitənin reaksiyası tək bir qüvvə yox, qüvvələr sistemi şəklində də ola bilər.

Rabitələr aksiomu (sərbəstləşdirmə prinsipi). İstənilən qeyri–sərbəst cismi sərbəst cisim kimi təsəvvür etmək olar, bunun üçün həmin cismi xəyalən rabitələrdən azad edib, onların cismə olan təsirini reaksiya qüvvələri ilə əvəz etmək lazımdır.

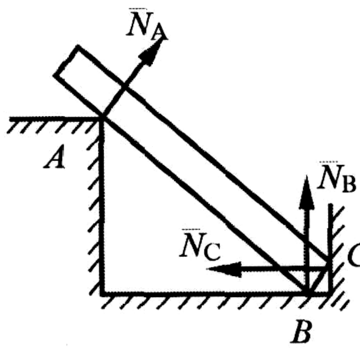
Statikada adətən aşağıdakı cür rabitələrə rast gəlinir:

1. Hamar dayaq səthi. Hamar səth elə səthə deyilir ki, onunla cisim arasında sürtünmə qüvvəsi olmur. Əslində cisimlə onun toxunduğu səth arasında sürtünmə müqaviməti həmişə mövcud olur, ancaq bu müqavimət çox kiçik olan hallarda onu nəzərdən atıb səthi ideal hamar qəbul etmək mümkündür (mexanika məsələlərinin həllində). Hamar səthin reaksiya qüvvəsi toxunma nöqtəsində tətbiq olunub, səthə normal

istiqamətdə yönəlir. Şək. 1.5 və 1.6–da hamar dayaq səthinə aid nümunələr göstərilmişdir.

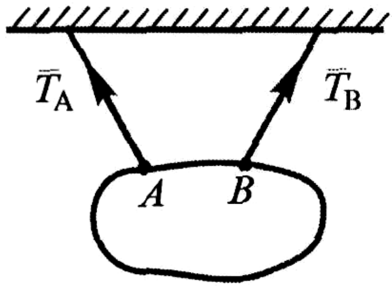


Şək. 1.5



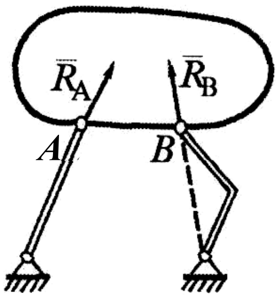
Şək. 1.6

2.Ç evik rabitə (ip, sap, kanat, zəncir və s.). Çəkisi nəzərə alınmayan çevik rabitənin reaksiya qüvvəsi bu rabitə boyunca yönəlir (şək. 1.7).



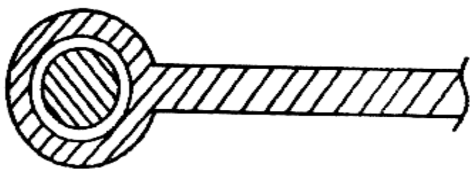
Şək.1.7

3.Çəkisiz çubuq. Ucları oynaqlarla birləşdirilmiş çəkisiz çubuğun reaksiya qüvvəsi bu oynaqların mərkəzindən keçən düz xətt boyunca yönəlir (şək. 1.8).



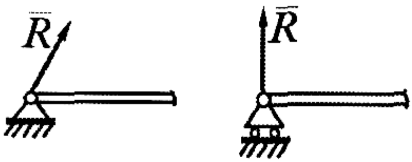
Şək.1.8

4.Tərpənməz silindrik oynaq. Silindrik oynaq dedikdə baxılan cismin ondakı deşikdən keçən silindrik cisimlə (rabitə) birləşməsi nəzərdə tutulur (şək.1.9).Baxılan cisim deyilən silindrik cisim ətrafında fırlana bilir.



Şək. 1.9

Tərpənməz silindrik oynağın reaksiya qüvvəsi bu oynağın mərkəzindən keçməklə onun oxuna perpendikulyar olaraq istənilən istiqamətdə yönələ bilər. Şək. 1.10a–da tərpənməz silindrik oynağın nəzəri mexanikada qəbul olunmuş şərti təsviri göstərilmişdir.



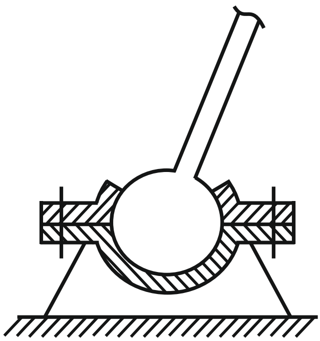
a) b)

Şək. 1.10

5.Tərpənən silindrik oynaq (diyircəklər üzərində dayaq). Tərpənən silindrik oynağın reaksiya qüvvəsi oynağın mərkəzindən keçməklə dayaq səthinə normal istiqamətdə yönəlir (şək. 1.10b).

6.Sferik oynaq (şək. 1.11).

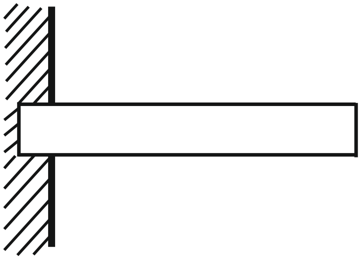
Sferik oynağın reaksiya qüvvəsi bu oynağın mərkəzindən keçməklə (sürtünmə qüvvələri nəzərə alınmadıqda) fəzada istənilən istiqamətdə yönələ bilər.



Şək. 1.11

7.Pərçim dayaq (şək. 1.12)

Pərçim dayağın reaksiya qüvvəsinin həm tətbiq nöqtəsi, həm qiyməti, həm də istiqaməti naməlum olur.

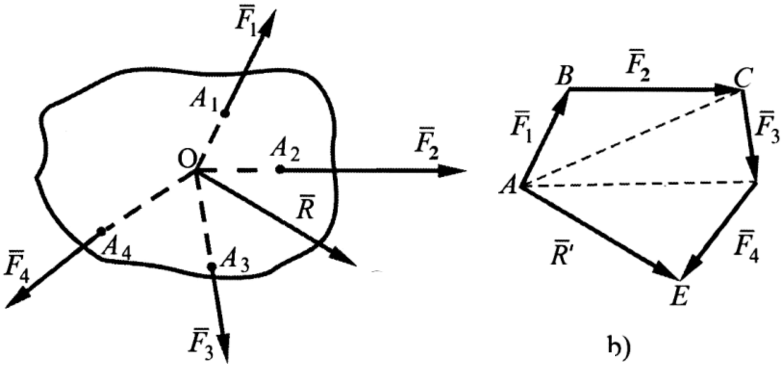


Şək. 1.12

Qeyd edək ki, bəzən rabitələri üç növə bölürlər. Bu halda birinci növ rabitələr elə rabitələrə deyirlər ki, onların reaksiya qüvvələrinin ancaq bir elementi – modulu (qiyməti) naməlum olsun (hamar dayaq səthi, çevik rabitə, ucları oynaqlarla birləşdirilmiş çəkisiz çubuq, tərpənən silindrik oynaq). Bu rabitələrin reaksiya qüvvələrinin istiqaməti və tətbiq nöqtəsi əvvəlcədən məlum olur. İkinci növ rabitələr elə rabitələrə deyirlər ki, onların reaksiya qüvvələrinin iki elementi – modulu və istiqaməti naməlum olsun (tərpənməz silindrik oynaq, sferik oynaq). İkinci növ rabitənin reaksiya qüvvəsinin tətbiq nöqtəsi əvvəlcədən məlum olur. Üçüncü növ rabitələr isə elə rabitələrə deyilir ki, onların reaksiya qüvvələrinin hə üç elementi (tətbiq nöqtəsi, qiyməti, istiqaməti) naməlum olsun (pərçim dayaq).

1.5. Бир нюгтядя эюрцшян гцввяляр системи

Bir nöqtədə görüşən qüvvələr sistemi elə qüvvələr sisteminə deyilir ki, onların təsir xətləri bir nöqtədə kəsişir (şək. 1.13a).



a) *b)*

Şək. 1.13

Fərz edək ki, təsir xətləri O nöqtəsidə kəsişən $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ qüvvələri mütləq bərk cismin uyğun olaraq A_1, A_2, A_3 və A_4 nöqtələrində tətbiq olunmuşdur. İkinci aksiomdan çıxan nəticədən istifadə edərək bu qüvvələri öz təsir xətləri boyunca sürüşdürüb onların tətbiq nöqtələrini O nöqtəsi ilə üst–üstə salmaq olar. Nəticədə bir nöqtədə görüşən qüvvələr sistemini daha sadə hal olan bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sisteminə gətirmiş olarıq.

Bir nöqtədə görüşən qüvvələri həndəsi olaraq toplamaq üçün qüvvələr çoxbucaqlısı qaydasından istifadə etmək olar. Bu məqsədə fəzada ixtiyari *A* nöqtəsini qəbul edərək ardıcıl olaraq $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ qüvvələrinə uyğun olan $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ vektorlarını çəkirik (şək. 1.13b). Vektorlar cəbrindən məlumdur ki, bu halda alınan çoxbucaqlının qapayıcısı olan $\overline{AE}$ vektoru yuxarıda deyilən vektorların həndəsi cəminə bərabər olacaqdır. Onda $\overline{AE}$ vektorunu $\overline{R}'$ ilə işarə edərək yaza bilərik:

$$\overline{R}' = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4 . \qquad (1)$$

Bir nöqtədə görüşən ixtiyari n sayda qüvvələr olan halda

$$\overline{R}^{/} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \; . \qquad (2)$$

Qüvvələr çoxbucaqlısının qapayıcısı olan $\overline{R}^{/}$ vektoru baxılan qüvvələr sisteminin baş vektoru adlanır. Beləliklə, baş vektor sistemin qüvvələrinin həndəsi cəminə bərabər olur.

Baxılan qüvvələr sisteminin əvəzləyicisi $\overline{R}$ qiymət və istiqamətcə baş vektorla eyni olub qüvvələrin təsir xətlərinin ümumi kəsişmə yeri olan O nöqtəsinə tətbiq olunur. Onda $\overline{R}^{/}$ vektorunu özünə paralel olaraq O nöqtəsinə köçürsək bu qüvvələr sisteminin $\overline{R}$ əvəzləyicisini alarıq. Deyilənləri nəzərə alaraq yaza bilərik:

$$\overline{R} = \overline{R}^{/} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \; . \qquad (3)$$

Bir nöqtədə görüşən qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün bu qüvvələrin əvəzləyicisi sıfra bərabər olmalıdır, yəni $\overline{R}$=0 şərti ödənməlidir. Onda (3) bərabərliyini nəzərə alaraq yaza bilərik:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0. \qquad (4)$$

(4) ifadəsi bir nöqtədə görüşən qüvvələr sisteminin həndəsi müvazinət şərti adlanır. Buradan görünür ki, bir nöqtədə görüşən qüvvələr sisteminin müvazinərdə olması üçün bu qüvvələrin həndəsi cəminin sıfra bərabər olması zəruri və kafidir.

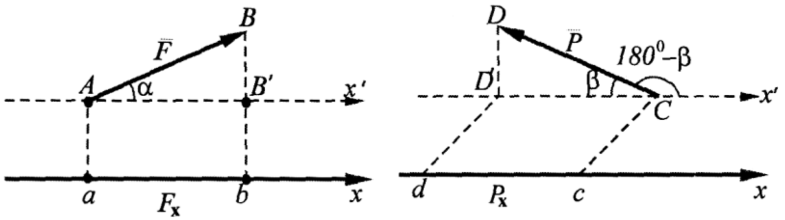
Bundan sonra sadəlik üçün cəm işarəsinin indekslərini yazmayacağıq.

1.6. Гцввянин ох вя мцстяви цзяриндя пройексийалары

Qüvvənin ox üzərində proyeksiyası skalyar kəmiyyət olub bu qüvvə vektorunun başlanğıc və son nöqtələrinin həmin ox üzərindəki proyeksiyaları arasında qalan parçanın müəyyən işarə ilə götürülmüş uzunluğuna bərabərdir. Əgər qüvvənin proyeksiyasının başlanğıcından sonuna doğru keçid oxun müsbət istiqamətində baş verərsə bu proyeksiya müsbət, əks halda mənfi hesab olunur.

Qüvvənin ox üzərində proyeksiyası bu qüvvənin modulunun qüvvə ilə oxun müsbət istiqamətləri arasında qalan bucağın kosinusu hasilinə bərabərdir.

Deyilənlər şək. 1.14–də və onlara uyğun olaraq yazılmış aşağıdakı ifadələrdə əks olunur. Şək. 1.14a–da $\overline{F}$ qüvvəsi ilə x oxu eyni müstəvi üzərində yerləşir, şək.1.14b–də isə $\overline{P}$ qüvvəsinin təsir xətti x oxu ilə çarpazdır. Köməkçi x' oxu qüvvənin tətbiq nöqtəsindən keçməklə x oxuna paralel yönəlir.



a) *b)*

b)

Şək. 1.14

$\overline{F}$ qüvvəsinin x oxu üzərindəki proyeksiyası

$$F_x = AB' = ab, \qquad (1)$$

yaxud

$$F_x = F\cos\alpha\,. \tag{2}$$

$\overline{P}$ qüvvəsinin x oxu üzərindəki proyeksiyası

$$P_x = -CD' = -cd\,, \tag{3}$$

yaxud
$$P_x = P\cos(180^0 - \beta) = -P\cos\beta\,. \tag{4}$$

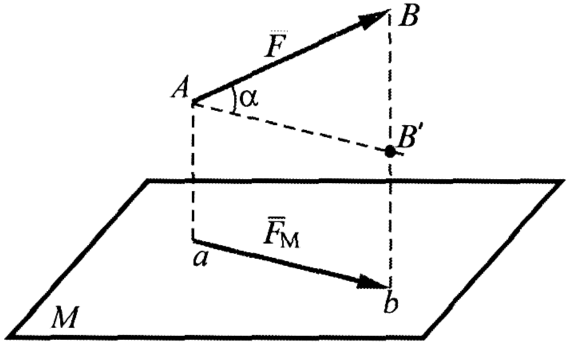
Qüvvə oxa perpendikulyar olan halda bu qüvvənin həmin ox üzərindəki proyeksiyası sıfra bərabər olur.

Qüvvənin müstəvi üzərində proyeksiyası vektor olub modulca bu qüvvə vektorunun başlanğıc və son nöqtələrinin həmin müstəvi üzərindəki proyeksiyaları arasında qalan parçanın uzunluğuna bərabərdir. Şək. 1.15–də $\overline{F}$ qüvvəsinin M müstəvisi üzərindəki proyeksiyası göstərilmişdir. Bu proyeksiyanın modulu

$$F_M = AB' = ab\,, \tag{5}$$

yaxud
$$F_M = F\cos\alpha\,, \tag{6}$$

burada α - qüvvə ilə M müstəvisi arasında qalan bucaqdır. Qüvvə müstəviyə perpendikulyar olan halda bu qüvvənin həmin müstəvi üzərindəki proyeksiyası sıfra bərabər olur.



Şək. 1.15

1.7. Гцввянин аналитик цсулла верилмяси

Qüvvənin analitik üsulla verilməsi dedikdə bu qüvvənin öz proyeksiyaları vasitəsilə ifadə olunması nəzərdə tutulur. $\overline{F}$ qüvvəsinin *Oxyz* sistemində analitik ifadə edilməsinə baxaq. Bu məqsədlə başlanğıcı $\overline{F}$ qüvvəsinin tətbiq nöqtəsi ilə üst–üstə düşən köməkçi $O'x'y'z'$ koordinat sistemini qəbul edək. Uyğun adlı oxları paralel yönəldirik (şək. 1.16)

$\overline{F}$ qüvvəsinin x', y' və z' oxları üzərindəki proyeksiyaları

$$F_{x'} = F\cos\alpha, \quad F_{y'} = F\cos\beta, \quad F_{z'} = F\cos\gamma \;\Big\}. \quad (1)$$

Baxılan halda

$$F_x = F_{x'}, \quad F_y = F_{y'}, \quad F_z = F_{z'} \;\Big\}. \quad (2)$$

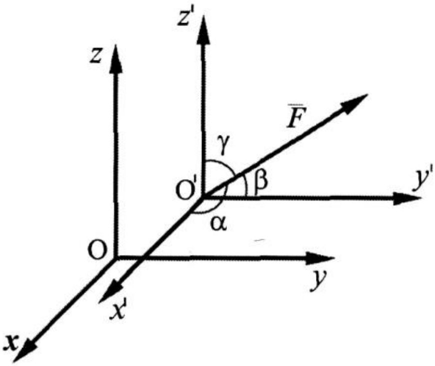
(1)– i (2) –də nəzərə alaq:

$$F_x = F\cos\alpha, \quad F_y = F\cos\beta, \quad F_z = F\cos\gamma \;\Big\}. \quad (3)$$

(3) ifadələrini kvadrata yüksəldib tərəf–tərəfə toplasaq

$$F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = F^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma). \quad (4)$$

olar. Analitik həndəsədən məlumdur ki,



Şək.1.16

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (5)$$

Bu bərabərliyi nəzərə alaraq (4)–dən $\overline{F}$ qüvvəsinin modulunu tapa bilərik:

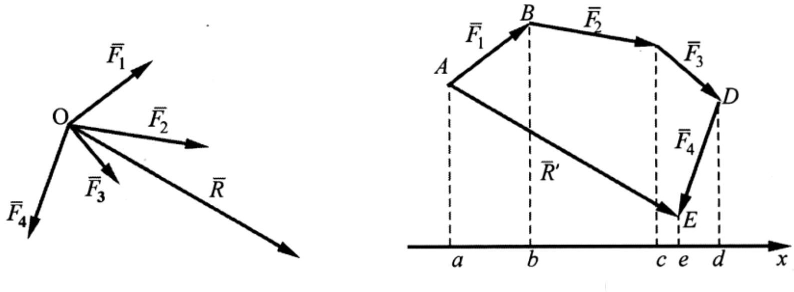
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\,. \qquad (6)$$

$\overline{F}$ qüvvəsinin istiqaməti isə (3) bərabərliklərindən çıxarılan aşağıdakı ifadələrlə təyin edilir:

$$\left.\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}\right\}. \qquad (7)$$

1.8. Бир нюгтядя тятбиг олунмуш гцввялярин аналитик цсулла топланмасы

Verilmiş O nöqtəsində tətbiq olunmuş $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ və $\overline{F}_4$ qüvvələrinin analitik olaraq toplanmasını nəzərdən keçirək. Bu məqsədlə biz əvvəlcə onları keçən mövzulardan məlum olan həndəsi üsulla toplayıb $\overline{R}^{/}$ baş vektorunu və $\overline{R}$ əvəzləyivisini təyin edirik (şək. 1.17).



a) *b)*

Şək.1.17

Qüvvələr çoxbucaqlısını verilmiş x oxu üzərinə proyeksiyalasaq yaza bilərik:

$$\left.\begin{array}{l} ab = F_{1x},\quad bc = F_{2x},\quad cd = F_{3x}, \\ -de = F_{4x},\quad ae = R_x^{/} = R_x. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Şək. 1.17b – yə görə

$$ae = ab + bc + cd + (-de)\,. \qquad (2)$$

(1) ifadələrini (2) – də yerinə yazsaq:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}. \qquad (3)$$

Qüvvələr ixtiyari sayda olarsa

$$R_x = \sum F_{ix}. \qquad (4)$$

Beləliklə, bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələrin əvəzləyicisinin hər hansı ox üzərindəki proyeksiyası həmin qüvvələrin bu ox üzərindəki proyeksiyalarının cəbri cəminə bərabər olur. (4) ifadəsinə uyğun olaraq yaza bilərik:

$$R_y = \sum F_{iy}, \quad R_z = \sum F_{iz} \Big\}. \tag{5}$$

Əvəzləyici qüvvənin modulu

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2 + (\sum F_{iz})^2}. \tag{6}$$

Məlumdur ki, bir nöqtədə görüşən qüvvələr sistemini bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sisteminə gətirmək olar. Ona görə də bu mövzuda deyilənlərin hamısını bir nöqtədə görüşən qüvvələr sisteminə də aid etmək mümkündür.

1.9. Бир нюгтядя тятбиг олунмуш гцввяляр системинин аналитик мüвазинят шяртляри

Bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sistemi bir əvəzləyici qüvvəyə gətirilir. Deməli belə qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün onun əvəzləyici qüvvəsi sıfra bərabər olmalıdır, yəni

$$R = 0 \tag{1}$$

şərti ödənməlidir. Məlumdur ki, əvəzləyici qüvvənin modulu belə ifadə olunur:

$$R = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2 + (\sum F_{iz})^2}. \tag{2}$$

(2)–ni (1)–də nəzərə alsaq yaza bilərik:

$$\sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2 + (\sum F_{iz})^2} = 0. \tag{3}$$

(3) bərabərliyinin ödənilməsi üçün aşağıdakı şərtlər yerinə yetirilməlidir:

$$\left.\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0,\\ \sum F_{iy} &= 0,\\ \sum F_{iz} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(4) bərabərlikləri bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sisteminin analitik müvazinət şərtləri adlanır. Bu şərtlərə görə bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün həmin qüvvələrin hər üç koordinat oxunun hər biri üzərindəki proyeksiyalarının cəbri cəminin sıfra bərabər olması zəruri və kafidir.

Bir nöqtədə tətbiq olunmuş qüvvələr sistemi bir müstəvi üzərində yerləşərsə (4) şərtlərinin üçüncüsünə ehtiyac qalmaz və analitik müvazinət şərtləri bu formada yazılar:

$$\left.\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0,\\ \sum F_{ix} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(4) və (5) müvazinət şərtləri bir nöqtədə görüşən qüvvələr sistemi üçün də doğrudur.

1.10. Ики паралел гцввянин топланмасы

İki paralel qüvvəni toplayarkən iki hala rast gəlinir. Birinci halda bu qüvvələr eyni tərəfə, ikinci halda isə əks tərəflərə yönəlir. Əvvəlcə birinci halı nəzərdən keçirək. Fərz edək ki, bir-birinə paralel olaraq eyni tərəfə yönəlmiş $\overline{F_1}$ və $\overline{F_2}$ qüvvələrini toplamaq tələb olunur. Aydındır ki, bu halda paraleloqram qaydasını bilavasitə tətbiq etmək mümkün deyildir. Buna görə də əvvəlcə $\overline{F_1}$ və $\overline{F_2}-$ dən ibarət qüvvələr sistemini ona ekvivalent olan $\overline{R}_1$ və $\overline{R}_2$ qüvvələr sisteminə gətiririk. Bu məqsədlə $\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələrinə müvazinətləşmiş sistem təşkil edən $\overline{T}_1$ və $\overline{T}_2$ qüvvələrini əlavə edirik (ikinci aksioma görə bunu etmək olar). Beləliklə, $\overline{T}_1 = -\overline{T}_2$. $\overline{T}_1$ ilə $\overline{F}_1$– i, $\overline{T}_2$ ilə isə $\overline{F}_2$– ni paraleloqram qaydası ilə toplayaraq onların uyğun olaraq $\overline{R}_1$ və $\overline{R}_2$ əvəzləyicilərini tapırıq (şək. 1. 18). Belə ki,

$$\left.\begin{aligned} \overline{F}_1 + \overline{T}_1 = \overline{R}_1, \\ \overline{F}_2 + \overline{T}_2 = \overline{R}_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$\overline{R}_1$ və $\overline{R}_2$ qüvvələrini öz təsir xətləri boyunca sürüşdürərək onları bu xətlərinin kəsişdiyi O nöqtəsində tətbiq edirik. Köçürülmüş qüvvələri $\overline{R}_1^{/}$ və $\overline{R}_2^{/}$ işarə edərək onları uyğun olaraq $\overline{F}_1^{/}$, $\overline{T}_1^{/}$ və $\overline{F}_2^{/}$, $\overline{T}_2^{/}$ toplananlarına ayırırıq.

Baxılan halda

$$\overline{R}_1^{/} = \overline{R}_1, \quad \overline{R}_2^{/} = \overline{R}_2, \quad \overline{F}_1^{/} = \overline{F}_1, \quad \overline{F}_2^{/} = \overline{F}_2, \quad \overline{T}_1^{/} = \overline{T}_1, \quad \overline{T}_2^{/} = \overline{T}_2.$$

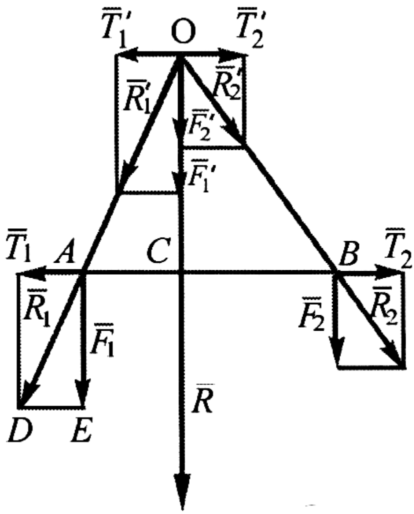
Deyilənləri nəzərə alaraq yaza bilərik:

$$\overline{T}_1^{/} + \overline{T}_2^{/} = \overline{T}_1 + \overline{T}_2 = 0, \tag{2}$$

$$\overline{F}_1^{/} + \overline{F}_2^{/} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{R}. \tag{3}$$

$\overline{F}_1^{/}$ və $\overline{F}_2^{/}$ qüvvələrinin bir düz xətt boyunca eyni tərəfə yönəldiklərini və (3) bərabərliyini nəzərə alaraq $\overline{R}$ əvəzləyicisinin modulunu belə ifadə etmək olar:

$$R = F_1 + F_2. \tag{4}$$



Şək. 1. 18

İndi $\overline{R}$ əvəzləyicisinin təsir xəttinin vəziyyətini müəyyən edən asılılığı çıxaraq. OAC və ADE üçbucaqları oxşar olduqlarından

$$\frac{OC}{AC}=\frac{AE}{DE}, \qquad \text{yaxud} \qquad \frac{OC}{AC}=\frac{F_1}{T_1}. \tag{5}$$

Uyğun olaraq

$$\frac{OC}{BC}=\frac{F_2}{T_2}. \tag{6}$$

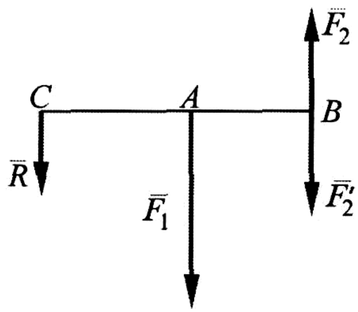
$T_1 = T_2$ olduğunu nəzərə alaraq (5) və (6) ifadələrini tərəf–tərəfə bölsək alarıq:

$$\frac{BC}{AC}=\frac{F_1}{F_2}. \tag{7}$$

Beləliklə, eyni tərəfə yönəlmiş iki paralel qüvvənin əvəzləyicisi modulca toplanan qüvvələrin modulları cəminə bərabər olub onlara paralel olaraq eyni tərəfə yönəlir. Əvəzləyicinin təsir xətti toplanan qüvvələr arasında qalan məsafəni bu qüvvələrin modulları ilə tərs mütənasib olan iki hissəyə ayırır.

İndi ikinci halı nəzərdən keçirək, yəni fərz edək ki, $\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələri bir–birinə paralel olaraq əks tərəflərə yönəlmişlər (şək. 1. 19). Tutaq ki, bu qüvvələr modulca bərabər deyillər (qüvvələrin modulları bərabər olan halı sonra ayrıca nəzərdən keçirəcəyik). Fərz edək ki, $F_1 > F_2$.

$\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələrini toplamaq üçün $\overline{F}_1$ qüvvəsini ona paralel olaraq eyni tərəfə yönəlmiş $\overline{R}$ və $\overline{F}_2^{/}$ toplananlarına ayırırıq. $\overline{F}_2^{/}$ qüvvəsini qiymətcə $\overline{F}_2$ – nin moduluna bərabər qəbul edirik. $\overline{F}_2$ və $\overline{F}_2^{/}$ qüvvələrini müvazinətləşmiş sistem kimi nəzərdən atırıq. Nəticədə təkcə $\overline{R}$ qüvvəsi qalır ki, bu da $\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələrinin əvəzləyicisi olur.



Şək. 1. 19

Deyilənləri nəzərə alaraq yaza bilərik:

$$F_1 = R + F_2^{/}. \qquad (8)$$

Buradan

$$R = F_1 - F_2^{/}. \qquad (9)$$

$F_2^{/} = F_2$ olduğu üçün

$$R = F_1 - F_2 \qquad (10)$$

yaza bilərik. Əvəzləyicinin təsir xəttinin vəziyyətini müəyyən edən (7) ifadəsi bu halda da öz doğruluğunu saxlayır.

Beləliklə, qiymətcə bərabər olmayan və əks tərəflərə yönələn iki paralel qüvvənin əvəzləyicisi modulca böyük qüvvə ilə kiçik qüvvənin modulları fərqinə bərabərdir. Əvəzləyicinin təsir xəttinin vəziyyəti (7) ifadəsi ilə müəyyən edilir. Əvəzləyici toplanan qüvvələrə paralel olaraq böyük qüvvə yönələn tərəfə yönəlir.

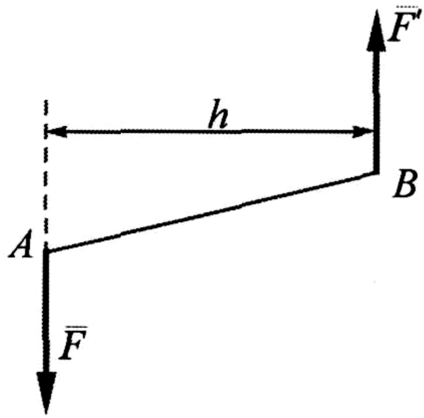
1.11. Cüt qüvvə

Qiymətcə bərabər, istiqamətcə əks olan iki paralel qüvvənin əmələ gətirdiyi sistemə cüt qüvvə deyilir. Ç ox vaxt cüt qüvvəyə sadəcə olaraq cüt deyirlər. Şək.1.20–də $\overline{F}$ və $\overline{F}^{/}$ qüvvələrinin əmələ gətirdiyi cüt göstərilmişdir. Tərifə görə $\overline{F} = -\overline{F}^{/}$.

Cütün qüvvələri bir əvəzləyici qüvvəyə gətirilə bilməzlər və birinci aksioma görə müvazinətləşmiş sistem təşkil etmirlər. Cütün daha da sadələşdirilməsi mümkün deyildir.

Cütün qüvvələrinin yerləşdiyi müstəvi bu cütün təsir müstəvisi adlanır. Cütün qüvvələrinin təsir xətləri arasıda qalan h məsafəsinə bu cütün qolu deyilir.

Bərk cismə tətbiq olunmuş cüt bu cismi fırlatmağa çalışır. Cütün yaratdığı bu fırlatma effektini qiymətləndirmək üçün cütün momenti anlayışından istifadə edirlər.



Şək. 1. 20

Cütün qüvvələrindən birinin modulu ilə qolunun müəyyən işarə ilə götürülmüş hasilinə cütün cəbri momenti deyirlər. Beləliklə, ($\overline{F}, \overline{F}^{/}$) cütünün cəbri momenti

$$m(\overline{F}, \overline{F}^{/}) = \pm Fh\,.$$

Əgər cütün yaratdığı fırlatma effekti saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində görünərsə onun cəbri momenti müsbət, saat əqrəbi hərəkəti istiqamətində isə mənfi hesab olunur. Bu, şərti olaraq belə qəbul olunmuşdur.

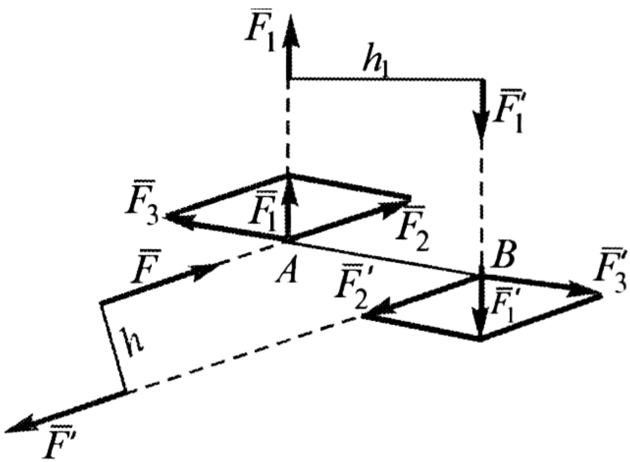
1.12. Жцтлярин еквивалентлийи щаггында теорем

Teorem. Mütləq bərk cismə tətbiq olunaraq eyni müstəvi üzərində yerləşən, momentlərinin qiyməti və fırlanma istiqamətləri eyni olan iki cüt bir – birinə ekvivalentdir.

İsbatı. Fərz edək ki, $(\overline{F}, \overline{F}^{/})$ və $(\overline{F}_1, \overline{F}_1^{/})$ cütləri mütləq bərk cismə tətbiq olunmuşlar, fırlanma istiqamətləri və momentlərinin qiyməti eynidir (şək.1.21). Beləliklə,

$$F_1 h_1 = Fh. \tag{1}$$

$\overline{F}_1$ və $\overline{F}_1^{/}$ qüvvələrini öz təsir xətləri boyunca sürüşdürərək bu xətlərin $\overline{F}$ və $F^{/}$ qüvvələrinin təsir xətləri ilə *A* və *B* kəsişmə nöqtələrində tətbiq edirik. Sonra $\overline{F}_1$və $\overline{F}_1^{/}$ qüvvələrini şək. 1.21–də göstərildiyi kimi uyğun olaraq $\overline{F}_2$,$\overline{F}_3$ və $\overline{F}_2^{/}, \overline{F}_3^{/}$ toplananlarına ayırırıq. Yəni,



Şək. 1.21

$$\left.\overline{F}_1 = \overline{F}_2 + \overline{F}_3, \quad \overline{F}_1^{/} = \overline{F}_2^{/} + \overline{F}_3^{/}.\right\} \tag{2}$$

Deyilənləri nəzərə alaraq yaza bilərik:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_1^{/}) \sim (\overline{F}_2, \overline{F}_2^{/}, \overline{F}_3, \overline{F}_3^{/}) . \tag{3}$$

Baxılan halda $\overline{F}_3$ və $\overline{F}_3^{/}$ qüvvələrinin bir düz xətt boyunca yönəldiklərini, həmçinin $\overline{F}_3 = -\overline{F}_3^{/}$ olduğunu nəzərə alaraq yazmaq olar: ($\overline{F}_3, \overline{F}_3^{/}$)~0. Onda (3)-ə görə

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_1^{/}) \sim (\overline{F}_2, \overline{F}_2^{/}). \tag{4}$$

Deməli
$$F_1 h_1 = F_2 h. \tag{5}$$

(1) və (5) ifadələrinin sol tərəflərinin bərabərliyindən sağ tərəflərinin bərabərliyini yaza bilərik: $Fh = F_2h$. Buradan $F=F_2$. Beləliklə, $(\overline{F}_2, \overline{F}_2^{/})$ və $(\overline{F}\ , \overline{F}^{/})$ cütlərinin qolu və qüvvələri eynidir. Onda

$$(\overline{F}_2, \overline{F}_2^{/}) \sim (\overline{F}\ , \overline{F}^{/}). \tag{6}$$

(4) və (6) ifadələrinin müqayisəsindən alarıq:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_1^{/}) \sim (\overline{F}\ , \overline{F}^{/}). \tag{7}$$

Teorem isbat olundu.

Baxılan teoremdən aşağıdakı nəticələr çıxır:

1. Mütləq bərk cismə olan təsirini dəyişmədən cütü öz təsir müstəvisi üzərində istənilən yerə köçürmək olar;
2. Mütləq bərk cismə olan təsirini dəyişmədən cütün qüvvələrinin modulunu və qolunu dəyişmək olar, bu şərtlə ki, onun momenti və fırlanma istiqaməti dəyişməsin;
3. Mütləq bərk cismə olan təsirini dəyişmədən istənilən iki cütü eyni qola gətirmək olar.

1.13. Жцтцн юз тясир мцстявисиня паралел мцстяви цзяриня кючцрцлмяси щаггында теорем

Teorem. Mütləq bərk cismə olan təsirini dəyişmədən cütü öz təsir müstəvisinə paralel müstəvi üzərinə köçürmək olar.

İsbatı. M_1 müstəvisi üzərində yerləşən $(\overline{F}, \overline{F}^{/})$ cütünün bu müstəviyə paralel M_2 müstəvisinin üzərinə köçürülməsinin mümkün olduğunu isbat edək. Bu məqsədlə M_2 müstəvisi üzərində müvazinətləşmiş $(\overline{F}_1, \overline{F}_1^{/}, \overline{F}_2, \overline{F}_2^{/})$ qüvvələr sistemini qəbul edirik (şək. 1.22). Hesab edirik ki,

$$F = F^{/} = F_1 = F_1^{/} = F_2 = F_2^{/}. \qquad (1)$$

$\overline{F}$ və $\overline{F}_2$ qüvvələrini toplayıb onların $\overline{R}$, $\overline{F}^{/}$ və $\overline{F}_2^{/}$ qüvvələrinin isə $\overline{R}^{/}$ əvəzləyicilərini tapırıq.

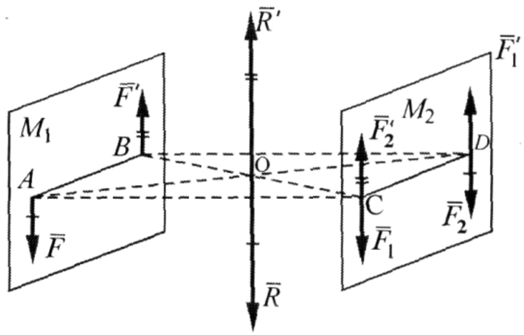
$(\overline{F}_1, \overline{F}_1^{/}, \overline{F}_2, \overline{F}_2^{/}) \sim 0$ olduğu üçün

$$(\overline{F}, \overline{F}^{/}) \sim (\overline{F}, \overline{F}^{/}, \overline{F}_1, \overline{F}_1^{/}, \overline{F}_2, \overline{F}_2^{/}). \qquad (2)$$

yaza bilərik.

Digər tərəfdən

$$(\overline{F}, \overline{F}^{/}, \overline{F}_2, \overline{F}_2^{/}) \sim (\overline{R}, \overline{R}^{/}). \qquad (3)$$



Şək. 1.22

$\overline{R}$ вя $\overline{R}^{/}$ əvəzləyiciləri qiymətcə bərabər olub bir düz xətt boyunca əks tərəflərə yönəlirlər. Belə ki, ($\overline{R},\overline{R}^{/}$)~0. Bunu (3)–də nəzərə alaq:

$$(\overline{F},\overline{F}^{/},\overline{F}_2,\overline{F}_2^{/})\sim 0. \qquad (4)$$

(4) şərtinə əsaslanaraq (2)–dən əldə edərik:

$$(\overline{F},\overline{F}^{/})\sim(\overline{F}_1,\overline{F}_1^{/}). \qquad (5)$$

Teorem isbat olundu.

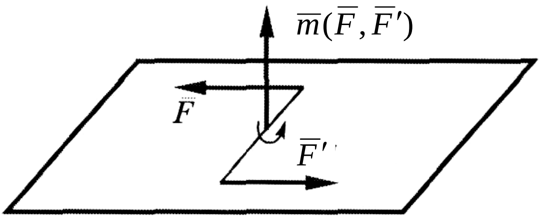
1.14. Жцтцн вектор–моменти

Cütün momenti vektor kimi təsvir oluna bilər. Buna cütün vektor–momenti deyirlər. Cütün vektor–momentinin modulu bu cütün qüvvələrindən birinin modulu ilə qolunun hasilinə bərabərdir. Cütün vektor–momenti bu cütün təsir müstəvisinə perpendikulyar olaraq elə yönəlir ki, onun ucundan baxdıqda cütün fırlanması saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində görünür (şək. 1.23).

($\overline{F},\overline{F}^{/}$) cütünün vektor – momentinin modulu

$$m(\overline{F},\overline{F}^{/}) = Fh\,. \qquad (1)$$

Məlumdur ki, mütləq bərk cismə tətbiq olunmuş cütü öz təsir müstəvisi üzərində istənilən yerə köçürmək olar. Buradan belə çıxır ki, cütün vektor–momentinin müəyyən bir təsir xətti yoxdur, və buna görə də o, sərbəst vektor hesab olunur.



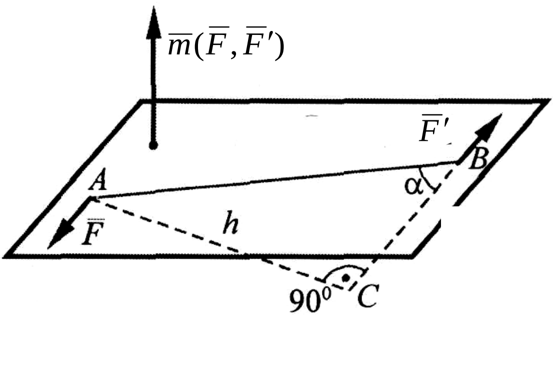
Şək. 1.23

Cütün vektor–momentinin modulu və istiqaməti haqqında yuxarıda deyilənləri nəzərə alaraq onun vektorial ifadəsini belə yazmaq olar (şək. 1.24):

$$\overline{m}(\overline{F},\overline{F}^{/}) = \overline{AB}\times\overline{F}^{/}. \qquad (2)$$

Onda bu cütün vektor–momentinin modulunu belə də ifadə etmək mümkündür:

$$m(\overline{F},\overline{F}^{/}) = \left|\overline{m}(\overline{F},\overline{F}^{/})\right| = AB\cdot F^{/}\sin\alpha\,. \qquad (3)$$



Шяк. 1.24

$AB\sin\alpha = h, \quad F^{/} = F$ olduğunu nəzərə alsaq buradan (1) bərabərliyini əldə etmək olar.

1.15.Жцтлярин топланмасы

İki cütü toplayarkən iki hala rast gəlinir. Birinci halda bu cütlərin təsir müstəviləri kəsişir, ikinci halda isə bir–birinə paralel olur. Əvvəlcə birinci halı nəzərdən keçirək.

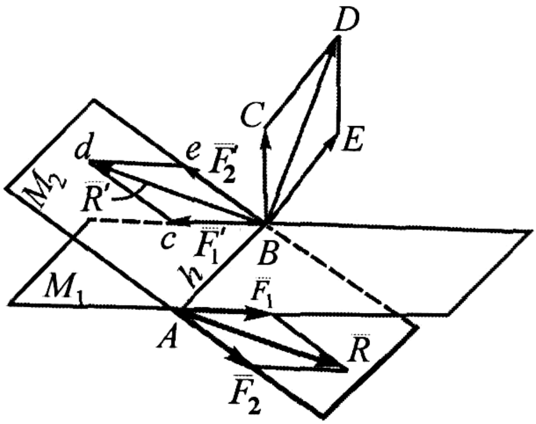
Teorem. Kəsişən müstəvilər üzərində yerləşən iki cütün mütləq bərk cismə olan təsiri vektor–momenti bu cütlərin vektor–momentlərinin həndəsi cəminə bərabər olan bir cütün təsirinə ekvivalentdir.

İsbatı. Teoremi isbat etmək məqsədilə mütləq bərk cismə tətbiq olunaraq kəsişən M_1 və M_2 müstəviləri üzərində yerləşmiş iki cütün toplanmasını nəzərdən keçirək. Eyni bir $\overline{AB}$ qoluna gətirilmiş $(\overline{F}, \overline{F}^{/})$ və $(\overline{F}_2, \overline{F}_2^{/})$ cütlərinin vektor–momentlərini uyğun olaraq $\overline{BC}$ və $\overline{BE}$ ilə işarə edək (şək. 1.25).

$\overline{F}_1$ və $\overline{F}_2$ qüvvələrini toplayaraq onların $\overline{R}$ əvəzləyicisini, $\overline{F}_1^{/}$ və $\overline{F}_2^{/}$ qüvvələrinin isə $\overline{R}^{/}$ əvəzləyicisini tapırıq.

Beləliklə,

$$\left.\begin{aligned} \overline{R} &= \overline{F}_1 + \overline{F}_2 , \\ \overline{R}^{/} &= \overline{F}_1^{/} + \overline{F}_2^{/} . \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$



Şək. 1.25

$\overline{F}_1 = -\overline{F}_1^{/}$, $\overline{F}_2 = -\overline{F}_2^{/}$ olduğu üçün (1) ifadələrinə görə $\overline{R} = -\overline{R}^{/}$ olar. Deməli $\overline{R}$ və $\overline{R}^{/}$ qüvvələri cüt təşkil edirlər. Bu cütün vektor–momentini $\overline{BD}$ ilə işarə edək.

Baxılan halda $\overline{BC} \perp \overline{Bc}$, $\overline{BE} \perp \overline{Be}$, $\overline{BD} \perp \overline{Bd}$. Onda $\angle CBD = \angle cBd$, $\angle EBD = \angle eBd$. Vektor–momentlərin modulları isə

$$\left. BC = F_1^{/} h, \quad BE = F_2^{/} h, \quad BD = R^{/} h. \right\} \tag{2}$$

Bu ifadələrə əsasən yaza bilərik:

$$\left.\begin{aligned} \frac{BC}{BD} &= \frac{F_1^{/} h}{R^{/} h} = \frac{F_1^{/}}{R^{/}} = \frac{Bc}{Bd}, \\ \frac{BE}{BD} &= \frac{F_2^{/} h}{R^{/} h} = \frac{F_2^{/}}{R^{/}} = \frac{Be}{Bd}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Yuxarıda qeyd olunan bucaqların bərabərliklərinə və (3) ifadələrinə görə *BCD* üçbucağı *Bcd* üçbucağına, *BED* üçbucağı isə *Bed* üçbucağına oxşardır. Onda *BCDE* dördbucaqlısı *Bcde* paraleloqramına oxşar olacaqdır. Deməli *BCDE* dördbucaqlısı da paraleloqramdır. Bu halda yazmaq olar:

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{BE} . \tag{4}$$

Teorem isbat olundu.

Kəsişən müstəvilər üzərində yerləşən ixtiyari sayda cütlər üçün yaza bilərik:

$$\overline{M} = \sum \overline{m}_i , \tag{5}$$

burada *M* - əvəzləyici cütün, $\overline{m}_i$ isə *i* saylı toplanan cütün vektor–momentidir.

Toplanan cütlərin təsir müstəvilərinin bir–birinə paralel olduğu halda onların vektor–momentləri sərbəst kollinear vektorlar kimi toplanır. Nəticədə (5) ifadəsi bu halda da öz doğruluğunu saxlayır. Bu ifadəyə görə cütlərin vektor–momentləri ümumi halda vektorlar çoxbucaqlısı qurmaq qaydası ilə də toplana bilər.

Cütlərdən ibarət sistemin müvazinətdə olması üçün bu sistemin əvəzləyici cütünün vektor–momenti sıfra bərabər olmalıdır, yəni $\overline{M} = 0$ şərti ödənilməlidir. Bunu və (5) ifadəsini nəzərə alaraq cütlərdən ibarət sistemin həndəsi müvazinət şərtini bu şəkildə yaza bilərik:

$$\sum \overline{m}_i = 0 . \tag{6}$$

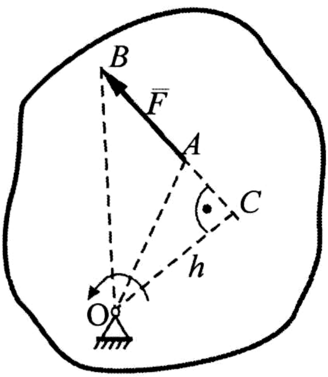
Deməli, cütlərdən ibarət sistemin müvazinətdə olması üçün bu cütlərin vektor–momentlərinin həndəsi cəminin sıfra bərabər olması zəruri və kafidir.

1.16. Гцввянин нюгтяйя нязярян жябри моменти вя вектор –моменти

Fərz edək ki, öz O ağırlıq mərkəzində tərpənməz sistemə oynaqla birləşdirilmiş cismə hər hansı $\overline{F}$ qüvvəsi tətbiq edilmişdir (şək.1.26). $\overline{F}$ qüvvəsinin təsiri altında cisim bu oynaq ətrafında fırlanacaqdır. Qüvvənin yaratdığı bu fırlatma effektini qiymətləndirmək üçün qüvvənin nöqtəyə nəzərən momenti anlayışından istifadə edirlər.

Qüvvənin momenti hansı nöqtəyə nəzərən hesablanırsa həmin nöqtə moment mərkəzi adlanır. Moment mərkəzindən qüvvənin təsir xəttinə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğuna bu qüvvənin həmin mərkəzə nəzərən qolu deyilir.

Qüvvənin cəbri momenti və vektor–momenti anlayışlarını fərqləndirmək lazımdır.



Şək. 1.26

Qüvvənin nöqtəyə nəzərən cəbri momenti bu qüvvənin modulu ilə həmin nöqtəyə nəzərən qolunun müəyyən işarə ilə götürülmüş hasilinə bərabərdir. Beləliklə, $\overline{F}$ qüvvəsinin O nöqtəsinə nəzərən cəbri momenti

$$m_0(\overline{F}) = \pm Fh, \qquad (1)$$

burada *щ* - $\overline{F}$ qüvvəsinin O nöqtəsinə nəzərən qoludur.

Qüvvənin moment mərkəzi ətrafında yaratdığı fırlatma effekti saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində olarsa onun həmin mərkəzə nəzərən cəbri momenti müsbət, saat əqrəbi hərəkəti istiqamətində olduqda isə mənfi hesab olunur. Bu qayda şərti olaraq qəbul olunmuşdur.

(1) düsturuna əsasən $\overline{F}$ qüvvəsinin O mərkəzinə nəzərən cəbri momentini belə də ifadə etmək olar:

$$m_0(\overline{F}) = \pm 2S_{\Delta OAB}, \qquad (2)$$

burada $S_{\Delta OAB}$ -*OAB* üçbucağının sahəsidir.

Əgər qüvvəni öz təsir xətti boyunca sürüşdürsək bununla onun verilmiş nöqtəyə nəzərən momenti dəyişməz. Qüvvənin təsir xətti moment mərkəzindən keçərsə h=0 olar və nəticədə $m_0(\overline{F})$ =0 alınar.

Qüvvənin nöqtəyə nəzərən momenti vektor kimi təsvir oluna bilər. Buna qüvvənin həmin nöqtəyə nəzərən vektor – momenti deyilir.

Qüvvənin nöqtəyə nəzərən vektor–momenti bu qüvvənin tətbiq nöqtəsinin moment mərkəzindən çəkilmiş radius–vektoru ilə qüvvə vektorunun vektorial hasilinə bərabərdir.

Yəni

$$\overline{m}_0(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}, \qquad (3)$$

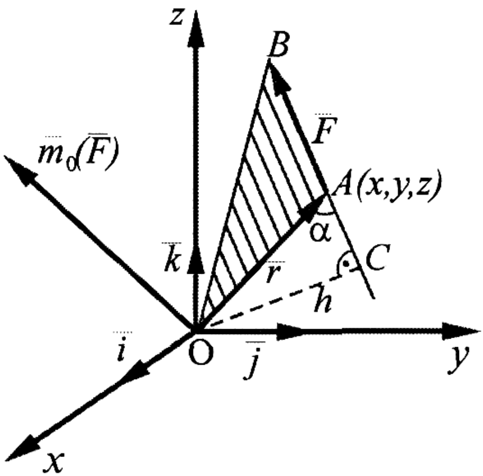
burada $\overline{r}$ –qüvvənin tətbiq nöqtəsinin moment mərkəzinə nəzərən radius– vektorudur (şək. 1.27).

$\overline{F}$ qüvvəsinin *O* mərkəzinə nəzərən vektor – momentinin modulu

$$\left|\overline{m}_0(\overline{F})\right| = rF\sin\alpha = Fh, \qquad (4)$$

yaxud

$$\left|\overline{m}_0(\overline{F})\right| = 2S_{\Delta OAB}\,. \tag{5}$$



Şək. 1.27

$\bar{r}$ və $\overline{F}$ vektorları analitik şəkildə belə ifadə oluna bilər:

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z, \tag{6}$$

$$\overline{F} = \bar{i}F_x + \bar{j}F_y + \bar{k}F_z, \tag{7}$$

burada $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ –koordinat oxlarının vahid vektorları; x,y,z– qüvvənin tətbiq nöqtəsinin koordinatları; F_x, F_y, F_z isə $\overline{F}$ qüvvəsinin proyeksiyalarıdır.

(6) və (7) ifadələrini (3)–də nəzərə alsaq taparıq:

$$\overline{m}_0(\overline{F}) = \bar{i}(yF_z - zF_y) + \bar{j}(zF_x - xF_z) + \bar{k}(xF_y - yF_x). \quad (8)$$

Bu bərabərliyi koordinat oxları üzərinə proyeksiyalasaq əldə edərik:

$$\left.\begin{aligned} m_{ox}(\overline{F}) &= yF_z - zF_y, \\ m_{oy}(\overline{F}) &= zF_x - xF_z, \\ m_{oz}(\overline{F}) &= xF_y - yF_x, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

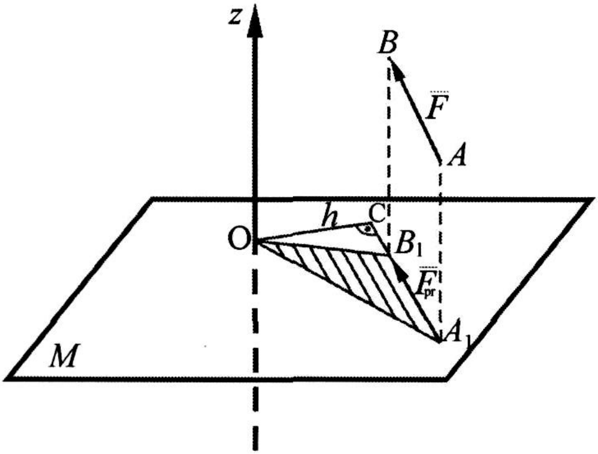
Alınmış bərabərliklər qüvvənin koordinat başlanğıcına nəzərən vektor–momentinin koordinat oxları üzərindəki proyeksiyalarının analitik ifadələridir.

1.17. Гцввянин оха нязярян моменти

Statikanın fəza məsələlərini və dinamikanın bəzi məsələlərini həll edərkən qüvvənin oxa nəzərən momenti anlayışından istifadə olunur.

Qüvvənin oxa nəzərən momenti onun oxa perpendikulyar keçirilmiş müstəvi üzərindəki proyeksiyasının modulu ilə bu proyeksiyanın oxla müstəvinin kəsişmə nöqtəsinə nəzərən qolunun müəyyən işarə ilə götürülmüş hasilinə bərabərdir. Deyiləni nəzərə alaraq $\overline{F}$ qüvvəsinin z oxuna nəzərən momentini belə ifadə edə bilərik (şək. 1.28) :

$$m_z(\overline{F}) = \pm F_{pr.} h, \quad (1)$$



Şək. 1.28

burada $F_{pr.}$–$\overline{F}$ qüvvəsinin z oxuna perpendikulyar M müstəvisi üzərindəki proyeksiyası, h isə həmin proyeksiyanın oxla müstəvinin O kəsişmə nöqtəsinə nəzərən qoludur. Əgər oxun ucundan (oxcuq tərəfdən) baxdıqda $\overline{F}_{pr.}$– in z oxu ətrafında yaratdığı fırlatma effektini saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində görünərsə $\overline{F}$ qüvvəsinin bu oxa nəzərən momenti müsbət, saat əqrəbi hərəkəti istiqamətində isə mənfi hesab olunur. İşarənin bu cür götürülməsi şərti olaraq qəbul olunub.

(1) ifadəsinə əsaslanaraq $\overline{F}$ qüvvəsinin z oxuna nəzərən momentini belə də ifadə etmək olar:

$$m_z(\overline{F}) = \pm 2S_{\Delta OA_1B_1}, \qquad (2)$$

burada $S_{\Delta OA_1B_1}$ -OA_1B_1 üçbucağının sahəsidir.

Qüvvənin oxa nəzərən momenti skalyar kəmiyyətdir.

Qüvvənin oxa nəzərən momenti iki halda sıfra bərabər olur: qüvvə oxa paralel olduqda və qüvvənin təsir xətti oxla kəsişdikdə. Bu iki halı birləşdirərək demək olar ki, əgər qüvvə ilə ox eyni müstəvi üzərində yerləşərsə bu qüvvənin həmin oxa nəzərən momenti sıfra bərabər olar.

1.18. Гцввянин нюгтяйя вя бу нюгтядян кечян оха нязярян моментляри арасында асылылыг

Verilmiş ixtiyari $\overline{F}$ qüvvəsinin hər hansı O nöqtəsinə nəzərən momenti ilə bu nöqtədən keçən ixtiyari z oxuna nəzərən momenti arasında əlaqəni araşdıraq. Məlumdur ki, $\overline{F}$ qüvvəsinin O nöqtəsinə nəzərən vektor–momenti *OAB* üçbucaq müstəvisinə perpendikulyar yönəlir (şək. 1.29) və modulca belə ifadə oluna bilər:

$$m_0(\overline{F}) = 2S_{\Delta OAB}, \tag{1}$$

burada $S_{\Delta OAB}$ - *OAB* üçbucağının sahəsidir.

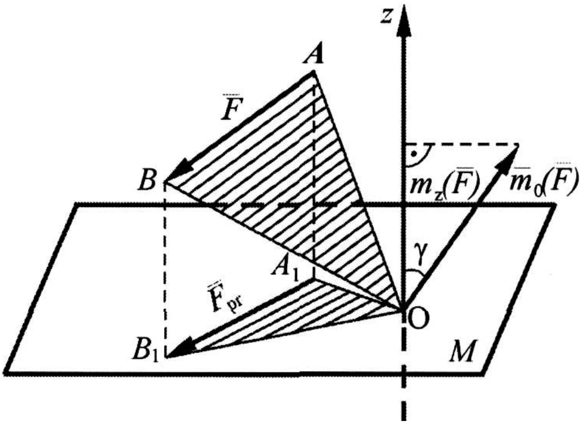
O nöqtəsindən z oxuna perpendikulyar *M* müstəvisini keçirək. $\overline{F}$ qüvvəsinin z oxuna nəzərən momentinin modulu

$$m_z(\overline{F}) = 2S_{\Delta OA_1B_1}, \tag{2}$$

burada $S_{\Delta OA_1B_1}$ -*M* müstəvisinin üzərində yerləşən OA_1B_1 üçbucağının sahəsidir.

OA_1B_1 üçbucağı *OAB* üçbucağının *M* müstəvisi üzərindəki proyeksiyasıdır. Ona görə

$$S_{\Delta OA_1B_1} = S_{\Delta OAB}\cos\gamma, \tag{3}$$



Шяк. 1.29

burada γ - *OAB* və OA_1B_1 üçbucaqlarının müstəviləri arasında qalan bucaqdır. Bu bucaq eyni zamanda $\overline{m}_0(\overline{F})$ vektoru ilə *z* oxu arasında qalan bucağa bərabərdir.

(3)- ü (2)–də yerinə yazaq:

$$m_z(\overline{F}) = 2S_{\Delta OAB}\cos\gamma. \tag{4}$$

(1)–i bu bərabərlikdə nəzərə alsaq

$$m_z(\overline{F}) = m_0(\overline{F})\cos\gamma \tag{5}$$

olar. $m_0(\overline{F})\mathbf{cos}\,\gamma$ $\overline{m}_0(\overline{F})$ vektor–momentinin *z* oxu üzərində proyeksiyasına bərabərdir, yəni $m_0(\overline{F})\cos\gamma = m_{oz}(\overline{F})$. Onda

$$m_z(\overline{F}) = m_{oz}(\overline{F}). \tag{6}$$

(6) bərabərliyi qüvvənin nöqtəyə və bu nöqtədən keçən oxa nəzərən momentləri arasındakı asılılığı ifadə edir. Bu

ifadəyə görə qüvvənin oxa nəzərən momenti bu qüvvənin həmin ox üzərindəki istənilən nöqtəyə nəzərən vektor – momentinin bu ox üzərindəki proyeksiyasına bərabərdir. Bu nəticə O nöqtəsinin z oxu üzərindəki vəziyyətindən asılı deyildir.

$m_{oz}(\overline{F})$–in əvvəlki mövzularda çıxardığımız ifadəsini (6)–da nəzərə alsaq və deyilənləri *x* və *y* oxlarına da tətbiq etsək qüvvənin koordinat oxlarına nəzərən momentinin analitik ifadələrini alarıq:

$$\left.\begin{aligned} m_x(\overline{F}) &= yF_z - zF_y, \\ m_y(\overline{F}) &= zF_x - xF_z, \\ m_z(\overline{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

1.19. Гцввянин верилмиш мяркязя эятирилмяси (Пуансо методу)

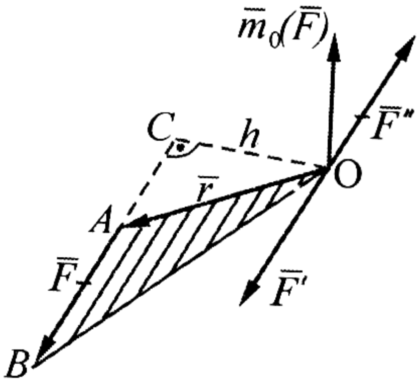
Qüvvənin verilmiş mərkəzə gətirilməsi fransız alimi Puanso tərəfindən təklif olunmuş metodla yerinə yetirilə bilər. Bu metodun məğzi belə ifadə olunur: Mütləq bərk cismə olan təsirini dəyişmədən qüvvəni özünə paralel olaraq bu cismin istənilən digər nöqtəsinə köçürmək olar, bu şərtlə ki, bu cismə vektor–momenti köçürülən qüvvənin köçürülmə mərkəzinə nəzərən vektor–momentinə bərabər olan əlavə bir cüt də tətbiq edilsin. Bu deyiləni isbat edək.

Mütləq bərk cismin *A* nöqtəsində ona tətbiq olunmuş $\overline{F}$ qüvvəsinin bu cismin ixtiyari O nöqtəsinə köçürülməsini nəzərdən keçirək (şək.1.30). O nöqtəsinə $\overline{F}$-ə paralel yönələn, qiymətcə ona bərabər olub müvazinətləşmiş sistem təşkil edən $\overline{F}^{/}$ və $\overline{F}^{//}$ qüvvələrini tətbiq edək. Beləliklə,

$$\left. F^{/} = F^{//} = F, \quad \overline{F}^{/} = -\overline{F}^{//}. \right\} \qquad (1)$$

Müvazinətləşmiş $\overline{F}^{/}$ və $\overline{F}^{//}$ qüvvələrinin tətbiq edilməsi statikanın ikinci aksiomuna görə mümkündür. İndi $\overline{F}$ və $\overline{F}^{//}$ qüvvələrinə bir cüt kimi baxa bilərik. Bu cütün vektor–momenti

$$\overline{m}(\overline{F}, \overline{F}^{//}) = \overline{OA} \times \overline{F} = \overline{r} \times \overline{F}. \qquad (2)$$



Şək. 1.30

Məlumdur ki, $\overline{r} \times \overline{F}$ vektorial hasili eyni zamanda $\overline{F}$ qüvvəsinin *O* mərkəzinə nəzərən vektor–momentinə bərabərdir, yəni

$$\overline{r} \times \overline{F} = \overline{m}_0(\overline{F}). \qquad (3)$$

(3)-ü (2)–də yerinə yazsaq alarıq:

$$\overline{m}(\overline{F}, \overline{F}^{//}) = \overline{m}_0(\overline{F}). \qquad (4)$$

Beləliklə, verilmiş $\overline{F}$ qüvvəsinin əvəzində $\overline{F}^{/}$ qüvvəsi ilə $\overline{m}_0(\overline{F})$ vektor–momentindən ibarət ekvivalent bir sistem alarıq. Bununla da Puanso metodunun doğruluğu isbat olunur. Deyilən vektor–momentin modulu:

$$\left|\overline{m}(\overline{F},\overline{F}^{//})\right| = \left|\overline{m}_0(\overline{F})\right| = Fh. \tag{5}$$

1.20. Ихтийари фяза гцввяляр системинин верилмиш мяркязя эятирилмяси

Fəzada ixtiyari sürətdə yerləşmiş qüvvələr sistemini verilmiş mərkəzə gətirməklə bu sistemə ekvivalent olan ən sadə sistem almaq mümkündür. Bu, statikanın aşağıda göstərilən əsas teoremi (Puanso teoremi) vasitəsilə yerinə yetirilir.

Teorem. Fəzada ixtiyari sürətdə yerləşmiş qüvvələr sistemi ümumi halda verilmiş mərkəzə tətbiq olunaraq bu qüvvələrin həndəsi cəminə bərabər olan bir qüvvəyə (baş vektora) və vektor–momenti həmin qüvvələrin bu mərkəzə nəzərən vektor – momentlərinin həndəsi cəminə bərabər olan bir cütə (baş momentə) ekvivalentdir.

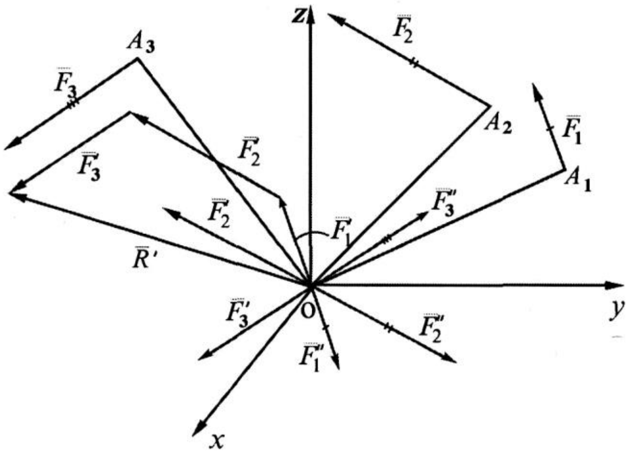
İsbatı. Teoremi isbat etmək üçün fəzada ixtiyari sürətdə yerləşmiş $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ və $\overline{F}_3$ qüvvələrindən ibarət sistemin verilmiş O mərkəzinə gətirilməsini nəzərdən keçirək (şək.1.31). Hər bir qüvvəni O mərkəzinə gətirmək üçün Puanso metodundan istifadə edirik. Nəticədə $\overline{F}_1^{/}, \overline{F}_2^{/}, \overline{F}_3^{/}$ qüvvələrini və $(\overline{F}_1, \overline{F}_1^{//})$, $(\overline{F}_2, \overline{F}_2^{//})$, $(\overline{F}_3, \overline{F}_3^{//})$ cütlərini alırıq. Burada

$$\left.\begin{aligned} F_1^{//} &= F_1^{/} = F_1, \\ F_2^{//} &= F_2^{/} = F_2, \\ F_3^{//} &= F_3^{/} = F_3. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Bir nöqtədə tətbiq olunmuş $\overline{F}_1^{/}$, $\overline{F}_2^{/}$, $\overline{F}_3^{/}$ qüvvələrini qüvvələr çoxbucaqlısı qaydası ilə toplayaraq taparıq:

$$\overline{R}^{/} = \overline{F}_1^{/} + \overline{F}_2^{/} + \overline{F}_3^{/} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 \ . \qquad (2)$$

Ü mumi halda, $\qquad \overline{R}^{/} = \sum \overline{F}_i \, . \qquad (3)$



Шяк. 1.31

$\overline{R}^{/}$ qüvvələr sisteminin baş vektoru adlanır. Göründüyü kimi, baş vektor sistemin qüvvələrinin həndəsi cəminə bərabərdir. Baş vektor gətirilmə mərkəzinin vəziyyətindən asılı deyildir.

Sonra $(\overline{F}_1, \overline{F}_1^{//})$, $(\overline{F}_2, \overline{F}_2^{//})$, $(\overline{F}_3, \overline{F}_3^{//})$ cütlərinin vektor–momentlərini toplayaraq onlara ekvivalent cütün vektor–momentini təyin edirik:

$$\begin{aligned} \overline{M}_0 &= \overline{m}(\overline{F}_1, \overline{F}_1^{//}) + \overline{m}(\overline{F}_2, \overline{F}_2^{//}) + \overline{m}(\overline{F}_3, \overline{F}_3^{//}) = \\ &= \overline{m}_0(\overline{F}_1) + \overline{m}_0(\overline{F}_2) + \overline{m}_0(\overline{F}_3). \end{aligned} \qquad (4)$$

Ü mumi halda $\overline{M}_0 = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_i)$. (5)

$\overline{M}_0$–qüvvələr sisteminin verilmiş O mərkəzinə nəzərən baş momenti adlanır. Göründüyü kimi, qüvvələr sisteminin verilmiş mərkəzə nəzərən baş momenti sistemin qüvvələrinin həmin mərkəzə nəzərən vektor–momentlərinin həndəsi cəminə bərabərdir. Baş moment ümumi halda gətirilmə mərkəzinin vəziyyətindən asılıdır.

Bununla da ixtiyari fəza qüvvələr sisteminin ümumi halda bir qüvvəyə (baş vektora) və bir cütə (baş momentə) gətirilməsi (Puanso teoremi) isbat olunur.

1.21. Ихтийари фяза гцввяляр системинин баш векторунун вя баш моментинин аналитик тяйини

Məlum olduğu kimi ixtiyari qüvvələr sisteminin baş vektoru bu sistemin qüvvələrinin həndəsi cəminə bərabərdir və aşağıdakı vektorial ifadə ilə təyin edilir:

$$\overline{R}^{/} = \sum \overline{F}_i . \tag{1}$$

(1) ifadəsini koordinat oxları üzərində proyeksiyalasaq baş vektorun uyğun proyeksiyalarını alarıq:

$$\left.\begin{aligned} R_x^{/} &= \sum F_{ix}, \\ R_y^{/} &= \sum F_{iy}, \\ R_z^{/} &= \sum F_{iz}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Baş vektorun modulu

$$R' = \sqrt{(R_x')^2 + (R_y')^2 + (R_z')^2}. \tag{3}$$

(2) ifadələrini burada nəzərə alsaq

$$R' = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2 + (\sum F_{iz})^2}. \tag{4}$$

Baş vektorun istiqaməti isə aşağıdakı ifadələrlə müəyyən edilir:

$$\left.\cos(\overline{R}', x) = \frac{R_x'}{R'},\ \cos(\overline{R}', y) = \frac{R_y'}{R'},\ \cos(\overline{R}', z) = \frac{R_z'}{R'}\right\}. \tag{5}$$

Məlumdur ki, ixtiyari qüvvələr sisteminin verilmiş mərkəzə nəzərən baş momentinin vektorial ifadəsi belə yazılır:

$$\overline{M}_0 = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_i). \tag{6}$$

(6) ifadəsini koordinat oxları üzərində proyeksiyalayaq:

$$\left.M_{ox} = \sum m_{ox}(\overline{F}_i),\quad M_{oy} = \sum m_{oy}(\overline{F}_i),\quad M_{oz} = \sum m_{oz}(\overline{F}_i)\right\}, \tag{7}$$

burada M_{ox}, M_{oy}, M_{oz} – baş momentin koordinat oxları üzərindəki proyeksiyalarıdır; $m_{ox}(\overline{F}_i)$, $m_{oy}(\overline{F}_i)$, $m_{oz}(\overline{F}_i)$ - qüvvələr sisteminin ixtiyari $\overline{F}_i$ qüvvəsinin O mərkəzinə nəzərən vektor–momentinin koordinat oxları üzərindəki proyeksiyalarıdır. Koordinat oxları O mərkəzindən keçdiyinə görə

$$\left.\begin{array}{l} M_{ox} = M_x,\quad M_{oy} = M_y,\quad M_{oz} = M_z, \\ m_{ox}(\overline{F}_i) = m_x(\overline{F}_i),\quad m_{oy}(\overline{F}_i) = m_y(\overline{F}_i),\quad m_{oz}(\overline{F}_i) = m_z(\overline{F}_i) \end{array}\right\} \tag{8}$$

olar. Burada M_x, M_y, M_z –baxılan qüvvələr sisteminin koordinat oxlarına nəzərən baş momentləri; $m_x(\overline{F}_i)$, $m_y(\overline{F}_i)$, $m_z(\overline{F}_i)$ isə $\overline{F}_i$ qüvvəsinin koordinat oxlarına nəzərən momentləridir. (8) ifadələrini (7) – də nəzərə alsaq taparıq:

$$M_x = \sum m_x(\overline{F}_i), \quad M_y = \sum m_y(\overline{F}_i), \quad M_z = \sum m_z(\overline{F}_i).\Big\} \quad (9)$$

Baş momentin modulu

$$M_0 = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (10)$$

(9) ifadələrini (10) – da yerinə yazsaq alarıq:

$$M_0 = \sqrt{\left[\sum m_x(\overline{F}_i)\right]^2 + \left[\sum m_y(\overline{F}_i)\right]^2 + \left[\sum m_z(\overline{F}_i)\right]^2} \quad (11)$$

Baş momentin istiqamətləndirici kosinusları

$$\left.\cos(\overline{M}_0, x) = \frac{M_x}{M_0}, \quad \cos(\overline{M}_0, y) = \frac{M_y}{M_0}, \quad \cos(\overline{M}_0, z) = \frac{M_z}{M_0}.\right\} \quad (12)$$

1.22. Ихтийари фяза гцввяляр системинин верилмиш мяркязя эятирилмясинин хцсуси щаллары

İxtiyari fəza qüvvələr sisteminin verilmiş mərkəzə gətirilməsində aşağıdakı xüsusi hallara rast gəlinir.

1) $\overline{R}^/ = 0$, $\overline{M}_0 = 0$. Bu halda qüvvələr sistemi sıfra ekvivalent sayılır, yəni müvazinətdə olur;

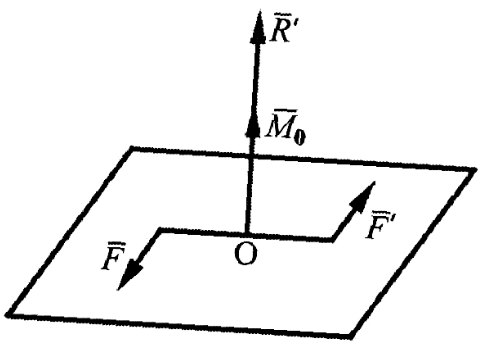
2) $\overline{R}^/ = 0$, $\overline{M}_0 \neq 0$. Bu halda qüvvələr sistemi vektor–momenti $\overline{M}_0$–ya bərabər olan bir cütə gətirilir. Bu cütün momenti gətirilmə mərkəzinin vəziyyətindən asılı olmur;

3) $\overline{R}^{/} \neq 0,\ \overline{M}_0 = 0.$ Bu halda qüvvələr sistemi bir əvəzləyici qüvvəyə gətirilir. Bu əvəzləyicinin təsir xətti gətirilmə mərkəzindən keçir. Əvəzləyici qüvvə $\overline{R} = \overline{R}^{/} = \sum \overline{F}_i$;

4) $\overline{R}^{/} \neq 0,\quad \overline{M}_0 \neq 0,\quad \overline{R}^{/} \perp \overline{M}_0$. Bu halda baş vektor baş momentin cütünün qüvvələri ilə bir müstəvi üzərində yerləşir. Bu üç qüvvəni isə toplayaraq bir əvəzləyici qüvvəyə gətirmək mümkündür. Bu halda da əvəzləyici qüvvə baş vektora bərabər alınır, ancaq onun təsir xətti gətirilmə mərkəzindən keçmir;

5) $\overline{R}^{/} \neq 0,\quad \overline{M}_0 = 0,\quad \overline{R}^{/} \parallel \overline{M}_0$. Bu halda baş vektorla baş momenti gətirilmə mərkəzindən keçən bir düz xətt boyunca yönəltmək olar. Belə hala dinama, yaxud dinamik vint deyirlər (şək. 1.32).

Dinamanın daha da sadələşdirilməsi mümkün deyildir. Sükunətdə olan sərbəst cismə dinama tətbiq edildikdə o, vint hərəkəti edir. Dinamanın $\overline{R}^{/}$ və $\overline{M}_0$ vektorlarının yönəldiyi düz xəttə baxılan qüvvələr sisteminin mərkəzi oxu deyilir.



Шяк. 1.32

Daha geniş nəzəri mexanika kurslarında qüvvələr sisteminin mərkəzi oxunun tənliyi çıxarılır. Ümumi halda isə (yəni $\overline{R}^{/} \neq 0$, $\overline{M}_0 \neq 0$, bu vektorlar arasındakı bucaq isə ixtiyari olduqda) qüvvələr sisteminin dinamaya, yaxud iki çarpaz qüvvəyə gətirilməsinin mümkün olduğu isbat olunur.

1.23. Ихтийари фяза гüввяляр системинин аналитик мцвазинят шяртляри

Məlumdur ki, ixtiyari fəza qüvvələr sisitemini ümumi halda bir qüvvəyə (baş vektora) və bir cütə (baş momentə) gətirmək mümkündür. Deməli belə qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün onun baş vektoru və baş momenti sıfra bərabər olmalıdır, yəni bu bərabərliklər ödənməlidir:

$$\left.\overline{R}^{/} = 0, \quad \overline{M}_0 = 0.\right\} \tag{1}$$

(1) иfadələri ixtiyari fəza qüvvələr sisteminin həndəsi müvazinət şərtləri adlanır.

Baş vektorun və baş momentin modullarının əvvəllər çıxardığımız ifadələrini nəzərə alaraq (1) şərtlərini analitik olaraq belə yazmaq olar:

$$R' = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2 + (\sum F_{iz})^2} = 0, \tag{2}$$

$$M_0 = \sqrt{\left[\sum m_x(\overline{F}_i)\right]^2 + \left[\sum m_y(\overline{F}_i)\right]^2 + \left[\sum m_z(\overline{F}_i)\right]^2} = 0\,. \tag{3}$$

(2) və (3) bərabərliklərinin ödənilməsi üçün isə aşağıdakı şərtlər yerinə yetirilməlidir:

$$\left.\begin{array}{l} \sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0, \\ \sum m_x(\overline{F}_i) = 0, \quad \sum m_y(\overline{F}_i) = 0, \quad \sum m_z(\overline{F}_i) = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

(4) ifadələri ixtiyari fəza qüvvələr sisteminin analitik müvazinət şərtləri adlanır. Bu şərtlərə görə ixtiyari fəza qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün həmin qüvvələrin üç koordinat oxunun hər biri üzərindəki proyeksiyalarının cəminin sıfra bərabər olması və həmin oxların hər birinə nəzərən momentlərinin cəminin sıfra bərabər olması zəruri və kafidir.

Bəzi xüsusi halları nəzərdən keçirək.

1) Bir nöqtədə görüşən qüvvələr sistemi. Bu halda koordinat başlanğıcını qüvvələrin təsir xətlərinin kəsişmə nöqtəsində yerləşdirsək altı müvazinət tənliyindən üçü (moment tənlikləri) eyniliyə çevrilər. Nəticədə analitik müvazinət şərtləri belə yazılar:

$$\left.\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0.\right\} \tag{5}$$

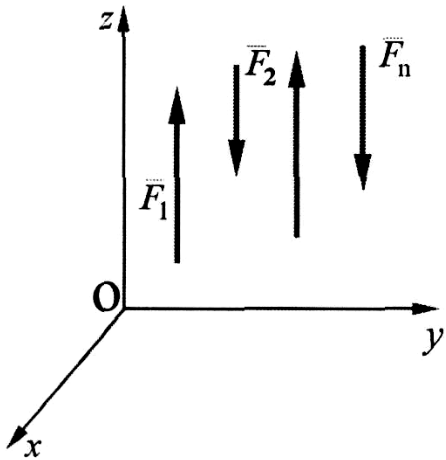
Bu halı əvvəllər ayrıca nəzərdən keçirmişdik.

2) Fəza qüvvələr sistemi ancaq cütlərdən ibarətdir. Bu halda proyeksiya tənlikləri eyniliyə çevrilir və müvazinət tənlikləri aşağıdakılardan ibarət olur:

$$\left.\sum m_x(\overline{F}_i) = 0, \quad \sum m_y(\overline{F}_i) = 0, \quad \sum m_z(\overline{F}_i) = 0.\right\} \tag{6}$$

3) Fəza paralel qüvvələr sistemi. Bu halda oxlardan birini, məsələn, *z* oxunu qüvvələrə paralel yönəltmək olar (şək. 1.33). Onda altı müvazinət tənliyindən üçü (*z* oxuna görə moment tənliyi, *x* və *y* oxlarına görə proyeksiya tənlikləri) eyniliyə çevrilər və müvazinət tənlikləri bu şəkildə yazılar:

$$\left.\sum F_{iz} = 0, \quad \sum m_x(\overline{F}_i) = 0, \quad \sum m_y(\overline{F}_i) = 0.\right\} \tag{7}$$



Шяк.1.33

Beləliklə, fəza paralel qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün bu qüvvələrin onlara paralel ox üzərindəki proyeksiyalarının cəminin və digər iki oxa nəzərən momentlərinin cəminin ayrı–ayrılıqda sıfra bərabər olması zəruri və kafidir.

1.24. Ихтийари мцстяви гцвваляг системинин аналитик мцвазинят шяртляри

Fərz edək ki, baxılan qüvvələr sistemi bir müstəvi üzərində, məsələn, *Oxy* müstəvisi üzərində yerləşir. Bu halda ixtiyari fəza qüvvələr sistemi üçün yazdığımız altı müvazinət tənliyindən üçü (*z* oxuna görə proyeksiya tənliyi, *x* və *y* oxlarına görə moment tənlikləri) eyniliyə çevrilir və nəzərdən atılır. Bunun səbəbi odur ki, deyilən halda ayrıca götürülmüş hər qüvvənin *z* oxu üzərindəki proyeksiyası və həm *x*, həm də y oxlarına nəzərən momentləri sıfra bərabər olur.

Nəticədə, baxılan halda $m_z(\overline{F}_i) = m_0(\overline{F}_i)$ olduğunu nəzərə alaraq, müvazinət şərtlərini belə yazmaq olar:

$$\left.\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum m_0(\overline{F}_i) = 0.\right\} \qquad (1)$$

(1) иfadələri müstəvi üzərində ixtiyari sürətdə yerləşmiş qüvvələr sisteminin analitik müvazinət şərtləri adlanır. Bu şərtlərə görə müstəvi üzərində ixtiyari sürətdə yerləşmiş qüvvələr sisteminin müvazinətdə olması üçün həmin qüvvələrin bu müstəvi üzərində götürülmüş iki koordinat oxunun hər biri üzərindəki proyeksiyalarının cəminin sıfra bərabər olması və həmin müstəvi üzərində yerləşən ixtiyari nöqtəyə nəzərən cəbri momentlərinin cəminin sıfra bərabər olması zəruri və kafidir.

Müstəvi üzərində ixtiyari sürətdə yerləşmiş qüvvələr sisteminin analitik müvazinət şərtlərini aşağıdakı əlavə formalarda da yazmaq olar:

1) Ü ç moment tənlikləri.

$$\left.\sum m_A(\overline{F}_i) = 0, \quad \sum m_B(\overline{F}_i) = 0, \quad \sum m_C(\overline{F}_i) = 0.\right\} \qquad (2)$$

Bu halda qüvvələrin yerləşdiyi müstəvi üzərində götürülmüş *A*, *B* və *C* nöqtələri bir düz xətt üzərində olmamalıdır.

$$2) \left.\sum F_{ix} = 0, \quad \sum m_A(\overline{F}_i) = 0, \quad \sum m_B(\overline{F}_i) = 0.\right\} \qquad (3)$$

Bu halda *x* oxu *A* və *B* nöqtələrindən keçən düz xəttə perpendikulyar olmamalıdır.

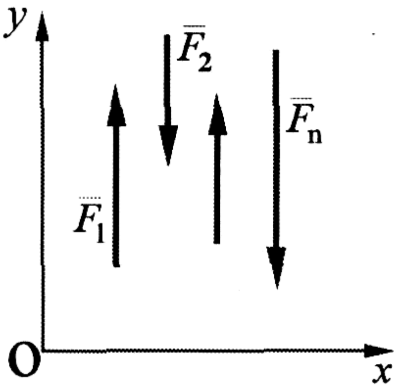
Xüsusi halda müstəvi üzərində yerləşən qüvvələr bir–birinə paralel ola bilər (müstəvi paralel qüvvələr sistemi). Bu halda oxlardan birini, məsələn y oxunu qüvvələrə paralel yönəltmək olar (şək.1.34). Onda $\sum F_{ix} = 0$ tənliyi eyniliyə çevrilər və müvazinət tənlikləri belə yazılar:

$$\left.\sum F_{iy} = 0, \quad \sum m_0(\overline{F}_i) = 0,\right\} \qquad (4)$$

yaxud $$\left.\sum m_A(\overline{F}_i)=0, \quad \sum m_B(\overline{F}_i)=0.\right\} \qquad (5)$$

(5) tənliklərindən istifadə edərkən A və B nöqtələri elə götürülməlidir ki, onlardan keçən düz xətt qüvvələrə paralel olmasın.

Yazdıqlarımızdan görünür ki, müstəvi paralel qüvvələr sisteminin iki müvazinət şərti olur.



Шяк.1.34

Qeyd edək ki, bəzən elə məsələlərə rast gəlinir ki, onlarda rabitə reaksiyalarının sayı, yəni məchulların sayı, bir–birindən asılı olmayan müvazinət tənliklərinin sayından çox olur. Bu cür məsələləri ancaq statika tənliklərinin köməyi ilə həll etmək mümkün deyildir. Ona görə də onlara statik həll olunmayan məsələlər deyirlər. Belə məsələləri həll etmək üçün statika tənliklərindən əlavə digər şərtlərdən də (məsələn, deformasiya tənliklərindən) istifadə etmək lazım gəlir. Bu məsələlərin həlli nəzəri mexanika kursundan kənara çıxır.

1.25. Сцртунмя

Bir cismin digər cismin üzəri ilə yerdəyişməsi zamanı yaranan müqavimət sürtünmə adlanır. Cisimlər arasında ən çox aşağıdakı cür sürtünmələrə rast gəlinir:

1) Sürüşmə sürtünməsi (birinci növ sürtünmə). Əgər sürtünən cisimlər arasında kifayət qalınlıqlı yağ təbəqəsi olarsa sürtünmə mayeli sürtünmə adlanır. Əks halda sürtünməyə sərhəd sürtünməsi deyirlər. Bəzən sərhəd sürtünməsini quru sürtünmə də adlandırırlar.

Sürüşmə sürtünmə qüvvəsi həmişə baxılan cismin rabitə rolunu oynayan ikinci cismin səthinə nəzərən yerdəyişməsinin əksi istiqamətində yönəlir.

Texniki hesablamalarda sərhəd sürtünməsi zamanı yaranan sürtünmə qüvvəsini çox vaxt Amonton – Kulon qanunu ilə təyin edirlər:

$$F = fN, \tag{1}$$

burada F–sürtünmə qüvvəsi; f–sürüşmə sürtünmə əmsalı (ədədi qiyməti təcrübədən tapılır); N–səthlər arasında yaranan normal reaksiya qüvvəsidir (şək. 1.35). Sürüşmə sürtünmə əmsalı adsız ədəddir və əksər hallarda vahiddən xeyli kiçik olur. Fərz edək ki, baxılan cisim $\overline{N}$, $\overline{F}$ və hərəkət etdirici $\overline{T}$ qüvvəsinin təsiri altında müvazinətdədir (yəni sükunət, yaxud bərabərsürətli düzxətli hərəkət halında). Onda bu cisim üçün müvazinət tənliklərini yaza bilərik:

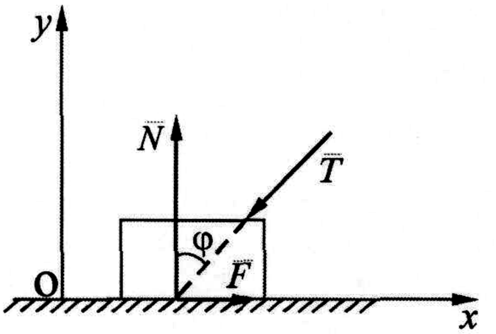
$$\left.\begin{aligned} \sum F_{ix} &= F - T\sin\varphi = 0, \\ \sum F_{iy} &= N - T\cos\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Buradan

$$T\sin\varphi = F, \quad T\cos\varphi = N,\} \tag{3}$$

Axırıncı iki bərabərliyi tərəf–tərəfə bölsək alarıq:

$$tg\varphi = \frac{F}{N}. \qquad (4)$$



Шяк. 1.35

(1)- dən

$$f = \frac{F}{N}. \qquad (5)$$

(4) və (5)–ci ifadələrin sağ tərəflərinin bərabərliyindən sol tərəflərinin bərabərliyi yaza bilərik:

$$f = tg\varphi. \qquad (6)$$

φ sürütnmə bucağı adlanır. $\overline{T}$ qüvvəsinin təsir xəttini $\overline{N}$ qüvvəsinin təsir xətti ətrafında fırlatsaq konik səth alarıq ki, buna da sürtünmə konusu deyilir. Əgər hərəkət etdirici qüvvə sürtünmə konusunun daxilində tətbiq olunarsa (yəni $tg\varphi < f$ olarsa) sükunətdə olan cisim hərəkətə gəlməz (pərçimlənmə hadisəsi).

Mayeli sürtünmə mürəkkəb qanunlara tabe olur, burada ona baxılmır.

2) Diyirlənmə sürtünməsi (ikinci növ sürtünmə). Bir cismin digər cismin səthi üzrə diyirlənməsi zamanı yaranan müqavimətə diyirlənmə sürtünməsi deyilir.

Diyirlənmə sürtünməsi nəticəsində səthin normal reaksiyası öz yerini (təsir xəttinin vəziyyətini) hərəkət istiqamətində δ qədər dəyişir. Uzunluq ölçüsünə malik olan həmin bu δ kəmiyyəti diyirlənmə sürtünmə əmsalı adlanır. δ-nın da ədədi qiyməti təcrübədən tapılır və praktikada bu qiymət diyirlənən cismin səthinin əyrilik radiusundan qat–qat kiçik olur.

Fərz edək ki, bircinsli ağır dairəvi silindr hərəkət etdirici $\overline{T}$ qüvvəsinin təsiri altında üfüqi səth üzrə sürüşmədən müntəzəm diyirlənmə hərəkəti edir (şək.1.36).

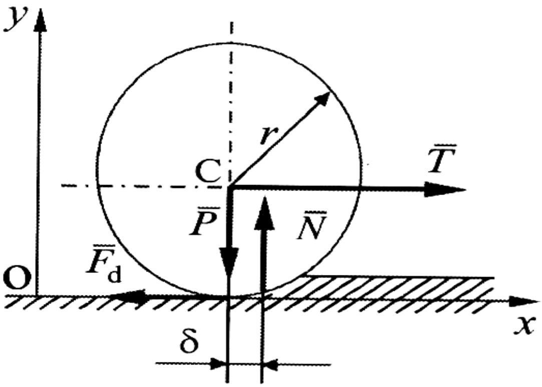
Bu halda silindr müvazinət vəziyyətində sayılır. Onun müvazinət tənliklərini yazaq:

$$\left.\begin{aligned} &\sum F_{ix} = T - F_d = 0, \\ &\sum F_{iy} = N - P = 0, \\ &\sum m_0(\overline{F_i}) = \delta N - rF_d = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

burada F_d–diyirlənmə sürtünmə qüvvəsi; P–silindrin ağırlıq qüvvəsi; N–səthin normal reaksiyası; r–silindrin radiusudur.

(7) ifadələrindən taparıq:

$$\left. T = F_d, \quad F_d = \frac{\delta}{r} N = \frac{\delta}{r} P. \right\} \qquad (8)$$



Şək.1.36

Diyirlənmədə yaranan müqavimət sürüşmədə yaranan müqavimətdən çox – çox azdır. Ona görə də praktikada sürüşmə sürtünməsini çox vaxt diyirlənmə sürtünməsi ilə əvəz etməyə çalışırlar. Buna misal olaraq müasir texnikada çox geniş miqyasda tətbiq olunan diyirlənmə yastıqlarını göstərmək olar.

1.26. Аьырлыг мяркязи

Cismin ağırlıq mərkəzi onunla ayrılmaz sürətdə bağlı olan elə bir həndəsi nöqtəyə deyilir ki, bu cismin fəzadakı istənilən vəziyyətində onun hissəciklərinin ağırlıq qüvvələrinin əvəzləyicisinin təsir xətti bu nöqtədən keçir.

Hissəciyin ağırlıq qüvvəsi Yerin cazibə qüvvəsi ilə Yerlə birlikdə fırlanmada yaranan mərkəzdənqaçma qüvvəsinin əvəzləyicisinə bərabərdir. Praktiki hesablamalarda çox vaxt ikinci qüvvəni nəzərdən ataraq (nisbətən çox kiçik olduğu üçün) ağırlıq qüvvəsini Yerin cazibə qüvvəsinə bərabər hesab edirlər.

Hissəciklərin ağırlıq qüvvələrinin təsir xətləri təxminən Yerin mərkəzində kəsişir. Yerin radiusunun onun üzərində olan cisimlərin ölçülərindən çox böyük olduğunu nəzərə alaraq kifayət qədər yüksək dəqiqliklə hesab etmək olar ki, verilmiş cismin hissəciklərinin ağırlıq qüvvələri bir–birinə paralel yönəlir.

Baxılan cismin ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını aşağıdakı ifadələrlə təyin etmək olar (bu ifadələrin əsaslandırılmasl nəzəri mexanikanın nisbətən geniş kurslarında verilir):

$$\left. x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P}, \qquad y_c = \frac{\sum P_i y_i}{P}, \qquad z_c = \frac{\sum P_i z_i}{P} \right\}, \tag{1}$$

burada P – cismin ağırlıq qüvvəsi (çəkisi); P_i – cismin i hissəciyinin ağırlıq qüvvəsi; x_i, y_i, z_i – həmin hissəciyin koordinatlarıdır.

Cismin ağırlıq mərkəzi maddi yox, həndəsi nöqtə olduğuna görə o, cismin xaricində də yerləşə bilər. Buna misal olaraq üzüyün, bucaqlığın, spiral yayın ağırlıq mərkəzlərini göstərmək olar.

Sabit qalınlıqlı nazik lövhə şəklində olan bircinsli cismə maddi yastı fiqur kimi baxmaq olar. Onda onun ağırlıq mərkəzinin iki koordinatı olar. Bu halda

$$\left. P_i = qS_i, \quad P = \sum P_i = q\sum S_i = qS \right\}, \tag{2}$$

burada S – yastı fiqurun ümumi sahəsi; S_i – yastı fiqurun i hissəciyinin sahəsi; q – yastı fiqurun vahid səthinə uyğun gələn ağırlıq qüvvəsidir.

(2) ifadələrini (1)– də (birinci iki bərabərlikdə) yerinə yazsaq yastı fiqurun ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını taparıq:

$$\left. x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S}, \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S}. \right\} \tag{3}$$

Uzunluğuna nisbətən en kəsiyinin ölçüləri çox kiçik olan bircinsli cismə maddi xətt kimi baxmaq olar. Yuxarıda deyilənlərə uyğun olaraq maddi xəttin ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını bu ifadələrlə təyin edə bilərik:

$$x_c = \frac{\sum l_i x_i}{l}, \quad y_c = \frac{\sum l_i y_i}{l}, \quad z_c = \frac{\sum l_i z_i}{l} \Bigg\}, \qquad (4)$$

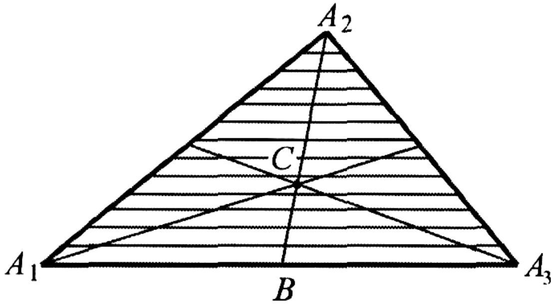
burada l –maddi xəttin uzunluğu: l_i –maddi xəttin i hissəciyinin uzunluğu; x_i, y_i, z_i – həmin hissəciyin koordinatlarıdır.

Əgər bircinsli cismin simmetriya müstəvisi, oxu, yaxud mərkəzi olarsa onun ağırlıq mərkəzi uyğun olaraq bu müstəvi, ox, yaxud mərkəz üzərində yerləşər. Bircinsli cismin iki, yaxud daha çox simmetriya oxu olduqda isə onun ağırlıq mərkəzi bu oxların kəsişdiyi nöqtədə yerləşər.

1.27. Бязи садя фигурларын аьырлыг мяркязинин тапылмасы

1. Üçbucaq sahəsinin ağırlıq mərkəzi. $A_1A_2A_3$ üçbucağını onun A_1A_3 oturacağına paralel düz xətlərlə elementar zolaqlara ayıraq (şək.1.37). Hər bir belə zolağı elementar hündürlüklü düzbucaqlı kimi qəbul etmək olar. Bu düzbucaqlıların ağırlıq mərkəzləri isə onların ortalarında, yəni üçbucağın A_2B medianının üzərində yerləşər. Onda üçbucaq sahəsinin ümumi ağırlıq mərkəzi də həmin median üzərində yerləşəcəkdir. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, üçbucaq sahəsinin ağırlıq mərkəzi onun digər medianlarının da üzərinə düşməlidir. Buradan isə belə nəticə çıxır ki, üçbucaq sahəsinin C ağırlıq mərkəzi onun medianlarının kəsişmə nöqtəsində yerləşir. Bunu nəzərə alaraq həndəsə qaydalarına əsasən yaza bilərik:

$$BC = \frac{1}{3} A_2 B. \qquad (1)$$

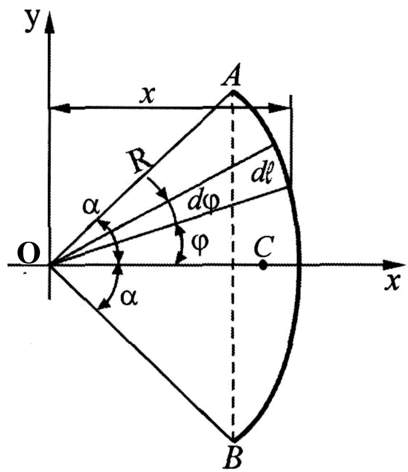


Şək.1.37

Aydındır ki, baxılan halda üçbucaq sahəsi bircinsli nazik lövhə kimi qəbul edilir.

2.Çevrə qövsünün ağırlıq mərkəzi. *R* radiuslu *AB* çevrə qövsünü (şək.1.38) bircinsli maddi xətt kimi qəbul edərək və *x* oxunu qövsün simmetriya oxu boyunca yönəldərək yaza bilərik:

$$x_c = \frac{\int\limits_{(A)}^{(B)} x dl}{l}, \quad y_c = 0. \qquad (2)$$



Şək.1.38

Baxılan halda

$$x = R\cos\varphi, \quad dl = Rd\varphi \Big\} \tag{3}$$

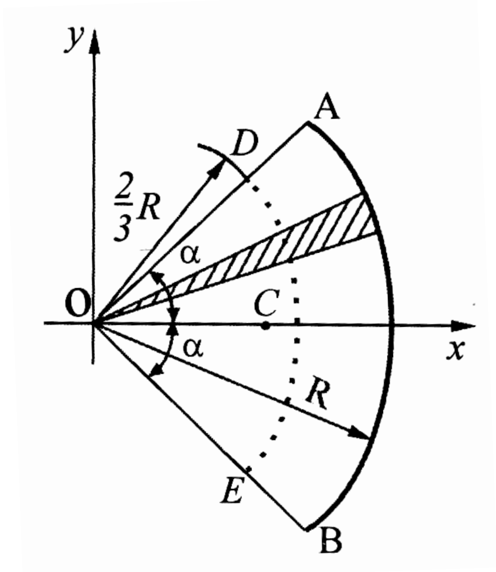
Onda

$$x_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi \cdot Rd\varphi}{l} = \frac{R^2}{l}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi = 2\frac{R^2}{l}\sin\alpha. \tag{4}$$

$l = 2R\alpha$ olduğunu nəzərə alaraq buradan tapa bilərik:

$$x_c = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{5}$$

3. Dairə sektorunun ağırlıq mərkəzi. Sektoru bircinsli nazik lövhə kimi qəbul edərək x oxunu onun simmetriya oxu boyunca yönəldək (y_c=0).



Şək.1.39

Dairə sektorundan elementar sektor ayıraq (şək.1.39–da ştrixlənmişdir). Bu elementar sektoru hündürlüyü R olan bərabəryanlı üçbucaq kimi qəbul etmək olar. Yuxarıda baxılan birinci misala uyğun olaraq bu üçbucağın ağırlıq mərkəzi O koordinat başlanğıcından $\frac{2}{3}R$ məsafəsində yerləşəcəkdir. Bu cür elementar üçbucaqların ağırlıq mərkəzlərinin həndəsi yerinə $\frac{2}{3}R$ radiuslu maddi çevrə qövsü kimi baxmaq olar. Onda ikinci misala uyğun olaraq bu maddi çevrə qövsünün, və beləliklə də baxılan dairə sektorunun ağırlıq mərkəzinin vəziyyətini bu ifadə ilə təyin edə bilərik:

$$x_c = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (6)$$